

TRƯỜNG ĐẠI HỌC LÂM NGHIỆP

BỘ MÔN TOÁN

VŨ KHẮC BẦY

BÀI GIẢNG TOÁN CAO CẤP

Dùng cho các ngành:

- **Quản trị kinh doanh**
- **Kế toán**
- **Kinh tế**
- **Quản lý đất đai**

Hà nội - 2011

CHƯƠNG 1

HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC- GIỚI HẠN - SỰ LIÊN TỤC CỦA HÀM.

1.1 Hàm số

1.1.1 Định nghĩa hàm số và các phương pháp cho hàm số.

1.1.1.1 Các tập hợp số thực

- Tập các số tự nhiên (được ký hiệu là N) là tập các số $\{0, 1, 2, \dots\}$
- Tập các số nguyên (được ký hiệu là Z) là tập các số $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- Tập các số hữu tỷ (được ký hiệu là Q) là tập các số có dạng $\frac{p}{q}$ với p, q ($q \neq 0$).

là các số nguyên

Số hữu tỷ còn có thể định nghĩa theo cách khác : *số hữu tỷ là các số thập phân hoặc thập phân vô hạn tuần hoàn.*

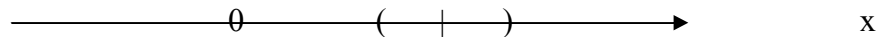
Ví dụ : $2,3 = \frac{23}{10}$; $\frac{1}{3} = 0,33333\dots = 0,(3)$; $0,02323\dots = 0,0(23) = \frac{23}{990}$

• $2,1(56) = \frac{21}{10} + 0,0(56) = \frac{21}{10} + \frac{56}{990} = \frac{2135}{990}$

$2,456(567) = 2,456 + 0,000(567) = \frac{2456}{1000} + \frac{567}{999000}$

- Số vô tỷ : là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn : số pi ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$,
- Số thực : là tập hợp tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ, được ký hiệu là
-

Biểu diễn số thực trên trục số :



- Khoảng số thực :

Các khoảng hữu hạn :

- Khoảng mở (sau này gọi là **khoảng**) : (a, b) - là tập các giá trị thực x sao cho $a < x < b$

- Khoảng đóng (sau này gọi là **đoạn**) : $[a, b]$ - là tập các giá trị thực x sao cho $a \leq x \leq b$

- Nửa khoảng : $(a, b]$ - là tập các giá trị thực x sao cho $a < x \leq b$
 $[a, b)$ - là tập các giá trị thực x sao cho $a \leq x < b$

Các khoảng vô hạn :

- Khoảng $(a, +\infty)$ - là tập các giá trị thực x sao cho $a < x$
- Khoảng $[a, +\infty)$ - là tập các giá trị thực x sao cho $a \leq x$
- Khoảng $(-\infty, a)$ - là tập các giá trị thực x sao cho $x < a$
- Khoảng $(-\infty, a]$ - là tập các giá trị thực x sao cho $x \leq a$
- Khoảng $(-\infty, +\infty)$ - là tập các giá trị thực x
- **Lân cận điểm :** cho một số $\delta > 0$, x_0 là một số thực
 Người ta gọi : δ - lân cận điểm x_0 là một khoảng số thực $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ và được ký hiệu là $U_\delta(x_0)$, tức là bao gồm các giá trị x : $|x - x_0| < \delta$

$$U_\delta(x_0) = \{ x : |x - x_0| < \delta \}$$

 hoặc $U_\delta(x_0) = \{ x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \}$

1.1.1.2 Định nghĩa hàm số

Cho hai tập hợp $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Nếu ứng mỗi số thực $x \in X$ mà cho duy nhất một số thực $y \in Y$ theo một quy luật f thì khi đó nói rằng y là hàm số của x xác định trên X

Kí hiệu $f: X \rightarrow Y$ hay $X \ni x \mapsto y = f(x) \in Y$ hay $y = f(x)$,

trong đó : X : Tập xác định (miền xác định) của hàm số f .

- $x \in X$: đối số (biến số, biến độc lập).
- $y = f(x)$, $x \in X$: hàm số (biến phụ thuộc).
- $f(X) = \{y \in Y: y = f(x), x \in X\}$: miền giá trị của f .

Ta có $f(X) \subseteq Y$.

Chú ý : nếu cho hàm số $y = f(x)$ mà không nói gì đến miền xác định thì hiểu miền xác định của hàm số là tập tất cả các giá trị thực x sao cho khi thay các giá trị x này vào biểu thức của $f(x)$ thì đều tính được.

Ví dụ: $y = \sqrt{1 - x^2}$ là một hàm số có miền xác định $x^2 \leq 1$ hay $-1 \leq x \leq 1$

1.1.1.3 Các phương pháp cho hàm số.

a) Phương pháp bảng số.

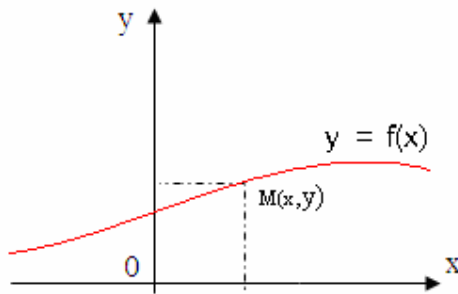
Hàm số được cho bởi một bảng số có hai dòng liệt kê các giá trị tương ứng giữa x và y

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	...	y_n

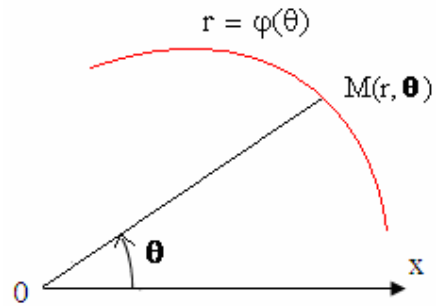
b) Phương pháp đồ thị.

Hàm số được cho bởi một tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ (thường là một đường cong trong mặt phẳng).

Hệ tọa độ ở đây có thể là hệ tọa độ Đề - Các vuông góc : Oxy (hình 1.a) hoặc có thể là hệ tọa độ cực (hình 1.b)



Hình 1.a : Đồ thị trong hệ tọa độ Đề-các



Hình 1.b : Đồ thị trong hệ tọa độ cực

c) Phương pháp cho bằng biểu thức:

Hàm số được cho bởi một hay nhiều biểu thức

Ví dụ: $f(x) = x^2 + x - 3$: hàm số được cho bởi 1 biểu thức giải tích.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 + \frac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{hàm số được cho bởi 2 biểu thức giải tích}$$

1.1.1.4 Hàm hợp và hàm ngược.

a. Hàm số hợp

Cho các tập hợp $X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$ và các hàm số $g: X \rightarrow Y, f: Y \rightarrow Z$

Khi đó hàm số $h: X \rightarrow Z$ định nghĩa bởi: $x \rightarrow h(x) = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số g và hàm số f .

Thường ký hiệu hàm số hợp $h: h(x) = f[g(x)]$ hay $h(x) = (f \circ g)(x)$.

Chú ý: Điều kiện tồn tại hàm hợp của hai hàm g và f là: miền giá trị của g là tập con của miền xác định hàm f .

Ví dụ : Cho $X, Y, Z \equiv \mathbb{R}$, Xét các hàm số: $z = f(y) = y^2 + 2$; $y = g(x) = 3x + 1$

Khi đó: $z = f(g(x)) = [g(x)]^2 + 2 = (3x+1)^2 + 2$

Chú ý: $f(g(x)) \neq g(f(x))$

Ví dụ : Cho $Y, Z \equiv \mathbb{R}$; $X = [2, +\infty)$

Xét các hàm số: $f: x \mapsto \sin x$; $g: x \mapsto \ln(x-2)$

Khi đó: $f(g(x)) = \sin(\ln(x-2))$; $g(f(x)) = \ln(\sin x - 2)$: không tồn tại vì $\sin x - 2 < 0$

b. Hàm số ngược

Cho hai tập số thực X và Y , các giá trị $x \in X$ và $y \in Y$ có quan hệ hàm số $y = f(x)$ (tức là với mỗi x cho tương ứng duy nhất một giá trị y), nếu quan hệ này cũng được biểu diễn dưới dạng x là hàm của y , tức là $y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$ thì quy luật φ là ngược của quy luật f . Khi đó nói rằng hàm số f với tập xác định là X và tập giá trị Y sẽ có hàm ngược, được ký hiệu là f^{-1} , như vậy quy luật f^{-1} chính là quy luật φ .

Ví dụ : Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ với tập xác định $X \equiv [0, 2]$ và tập giá trị $Y \equiv [0, 4]$ khi đó với mỗi giá trị $y \in Y$ đều cho duy nhất một giá trị $x = \sqrt{y} \in [0, 2]$, như vậy $x = \varphi(y) = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1} \equiv \varphi$ tức là $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ với tập xác định là $[0, 4]$ và tập giá trị là $[0, 2]$.

Chú ý

- Để có hàm số ngược thì ngoài quy luật f còn cần phụ thuộc vào các tập xác định và tập giá trị

Ví dụ : Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ với tập xác định $X \equiv [-1, 2]$ và tập giá trị $y \equiv [0, 4]$, khi đó nếu $y = 0,09$ thì sẽ có 2 giá trị x tương ứng là $x_1 = -0,3$ và $x_2 = 0,3$, như vậy x không thể là hàm của y , do đó quy luật hàm $f(x) = x^2$ với các tập xác định và tập giá trị trên sẽ không có hàm ngược.

- Nếu hàm $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên (a, b) thì $f(x)$ được gọi là đơn điệu trên (a, b)
- Nếu $y = f(x)$ đơn điệu trên (a, b) thì sẽ tồn tại f^{-1}
- Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = f^{-1}(x)$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất trong hệ tọa độ đề - các Oxy

1.2 Các hàm số sơ cấp

1.2.1 Các hàm số sơ cấp cơ bản

- Hàm lũy thừa: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- Hàm số mũ: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).
- Hàm logarit: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).
- Hàm lượng giác: $y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.
- Hàm lượng giác ngược: $y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arccot} x$.

1.2.1.1 Hàm lũy thừa: $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Miền xác định của hàm phụ thuộc vào số mũ α , nhưng với mọi α hàm số luôn xác định với $x > 0$.

Ví dụ: $y = x^2$ miền xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$y = \sqrt{x}$ miền xác định $\forall x \geq 0$.

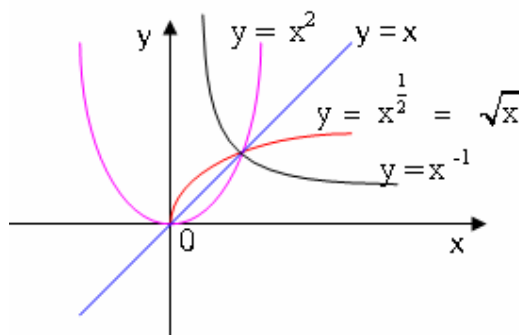
$y = x^{-1}$ miền xác định $\forall x \neq 0$.

$y = x$ miền xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

Tính chất: Xét trên miền $[0, +\infty)$

X	0	$+\infty$
$y = x^\alpha, \alpha > 0$	0	$+\infty$
$y = x^\alpha, \alpha < 0$	$+\infty$	0

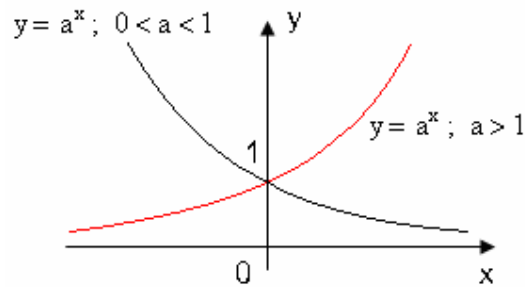
Đồ thị một số hàm lũy thừa:



1.2.1.2 Hàm mũ: $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

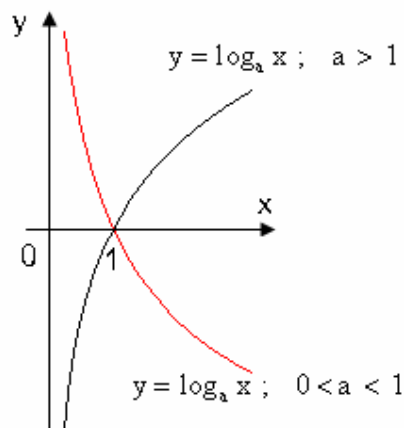
Miền xác định: $\mathbb{R}$	X	$-\infty$	$+\infty$
Miền giá trị: $\mathbb{R}^+$	$y = a^x, a > 1$	0	$+\infty$
+ Đồng biến với $a > 1$	$y = a^x, a < 1$	$+\infty$	0
+ Nghịch biến với $a < 1$			

Đồ thị hàm mũ



1.2.1.3 Hàm số logarit: $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$).

Miền xác định: $\mathbb{R}_+$		0	$+\infty$
Miền giá trị: $\mathbb{R}$	$y = \log_a x; a > 1$	$-\infty$	$+\infty$
+ Đồng biến với $a > 1$	$y = \log_a x; a < 1$	$+\infty$	$-\infty$
+ Nghịch biến với $a < 1$			



Hàm $y = \log_a x$ có hàm ngược là hàm $y = a^x$. Đồ thị hai hàm số đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

1.2.1.4 Các hàm lượng giác (hàm vòng) và các hàm lượng giác ngược (vòng ngược)

a) Hàm $y = \sin x$ và $y = \arcsin x$.

Hàm $y = \sin x$

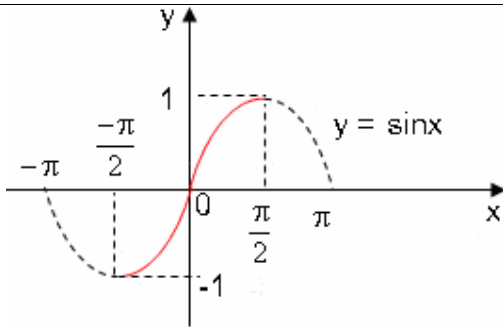
-Miền xác định: $\mathbb{R}$

-Miền giá trị: $[-1,1]$

-Tính chất:

+) Hàm lẻ, tuần hoàn chu kỳ 2π

+) Đơn điệu tăng trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Hàm $y = \arcsin x$

Xét hàm $y = \sin x$ với tập xác định

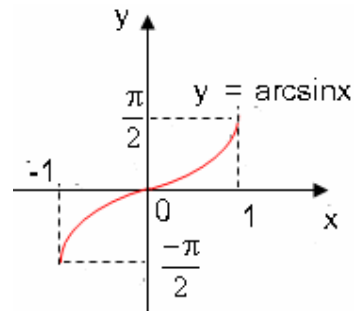
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ là một hàm đơn điệu nên $\exists$ hàm

ngược : $y = \arcsin x$

-Miền xác định: $[-1,1]$

-Miền giá trị: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

-Tính chất: Đơn điệu tăng



b) Hàm $y = \cos x$ và $y = \arccos x$.

Hàm $y = \cos x$

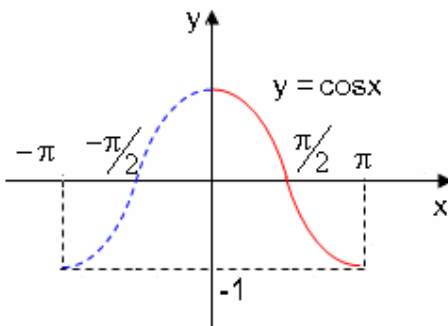
- Miền xác định: $\mathbb{R}$

- Miền giá trị: $[-1,1]$

-Tính chất:

+) Hàm chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2π

+) Đơn điệu giảm trên $[0, \pi]$



Hàm $y = \arccos x$

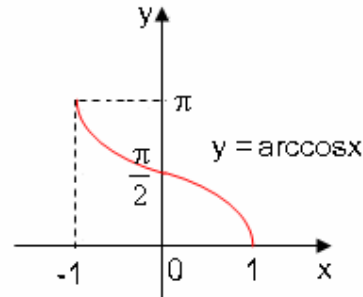
Xét hàm $y = \cos x$ với tập xác định $[0, \pi]$, là một

hàm đơn điệu nên $\exists$ hàm ngược : $y = \arccos x$

-Miền xác định: $[-1,1]$

-Miền giá trị : $[0, \pi]$

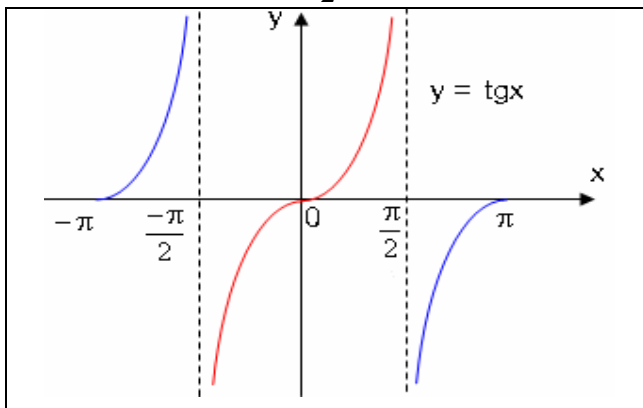
-Tính chất: Đơn điệu giảm



c) Hàm $y = \operatorname{tg}x$ và $y = \operatorname{arctg}x$.

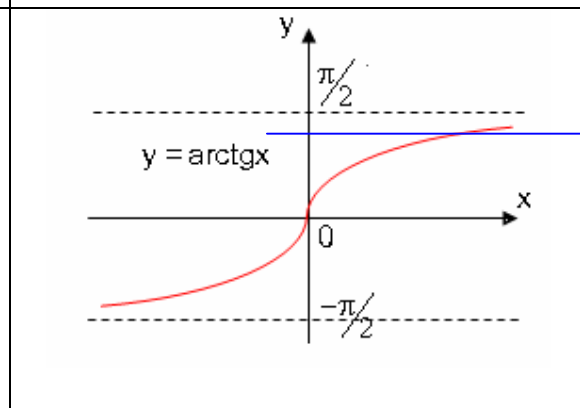
Hàm $y = \operatorname{tg}x$

- Miền xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$
- Miền giá trị: $\mathbb{R}$
- Tính chất:
 - +) Hàm lẻ, tuần hoàn chu kỳ π
 - +) Đơn điệu tăng trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
- +) Tiệm cận đứng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Hàm $y = \operatorname{arctg}x$

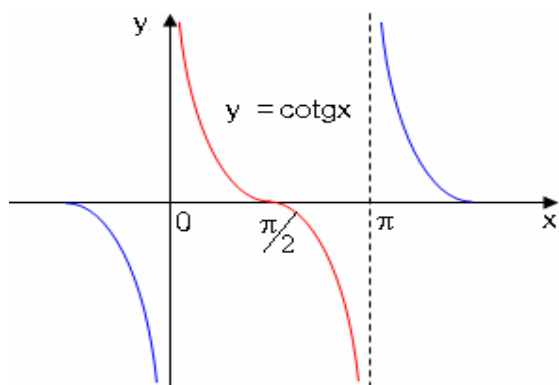
- Miền xác định: $\mathbb{R}$
- Miền giá trị: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$
- Tính chất: Đơn điệu tăng
- Tiệm cận ngang $y = -\frac{\pi}{2}$ và $y = \frac{\pi}{2}$



d). Hàm $y = \operatorname{cotg}x$ và $y = \operatorname{arccotg}x$

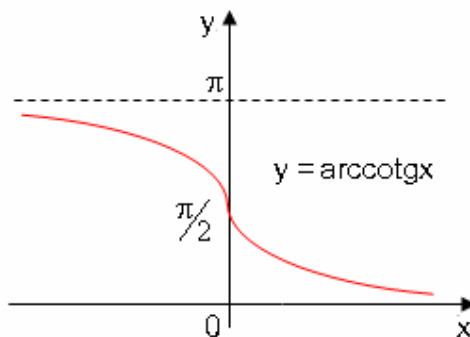
Hàm $y = \operatorname{cotg}x$ (hoặc $y = \operatorname{ctg}x$)

- Miền xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
- Miền giá trị: $\mathbb{R}$
- Tính chất:
 - +) Hàm lẻ, tuần hoàn chu kỳ π
 - +) Đơn điệu giảm trên $(0, \pi)$
 - +) Có các tiệm cận đứng: $x = k\pi$ với $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$



Hàm $y = \operatorname{arccotg}x$

- Miền xác định: $\mathbb{R}$
- Miền giá trị: $(0, \pi)$
- Tính chất:
 - +) Đơn điệu giảm
- Tiệm cận ngang $y = 0$ và $y = \pi$



1.2.2. Các hàm sơ cấp :

- Hàm số sơ cấp là hàm có được từ các hàm số **sơ cấp cơ bản và các hằng số** qua một số hữu hạn các phép toán **tổng, hiệu, tích, thương và hàm số hợp**
- Các hàm số không phải là các hàm sơ cấp được gọi là các hàm **siêu việt** :

Ví dụ : $y = |x|$ - là hàm siêu việt vì nó không biểu diễn được qua các hàm sơ cấp cơ bản nhờ các phép toán tổng, hiệu, tích, thương và hàm hợp

1.3 Giới hạn hàm số

Nghiên cứu giới hạn của hàm số $y = f(x)$ là nghiên cứu quá trình biến thiên của giá trị y khi giá trị của đối số $x \rightarrow a$ (hữu hạn) hoặc khi $x \rightarrow \infty$. Trong hai quá trình biến thiên của đối số x như trên thì giá trị của y có thể tiến đến giá trị L (giới hạn hữu hạn) hoặc tiến đến ∞ (giới hạn vô cực), hoặc không có giới hạn ($\nexists$ giới hạn)

1.3.1 Các định nghĩa về giới hạn của hàm số

1.3.1.1 Giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow a$

Định nghĩa : Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm a (có thể không xác định tại a). Giá trị L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới a (ký hiệu

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$) nếu: $\forall \varepsilon > 0$ (nhỏ bao nhiêu tùy ý) sẽ luôn $\exists \delta > 0$ để cho

$\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ thì có được $|f(x) - L| < \varepsilon$

Nhận xét: Nếu hàm số $f(x)$ xác định tại a và trong lân cận của a thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ví dụ : cho hàm $f(x) = \begin{cases} 3 + x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ Chứng minh $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

➤ Theo định nghĩa khi cho trước $\varepsilon > 0$ ta phải tìm được một số $\delta > 0$ để

$\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ thì có được $|f(x) - 3| < \varepsilon$ ⁽¹⁾. Để thực hiện được điều này ta xuất

phát từ điều kiện phải thỏa mãn (1) tức là $|f(x) - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |3 + x \sin \frac{1}{x} - 3| <$

$\varepsilon \Leftrightarrow \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| \cdot 1 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 0| < \varepsilon$ ⁽²⁾, vì vậy

ta lấy $\delta = \varepsilon$. Như vậy

với $\varepsilon > 0$ cho trước, luôn $\exists \delta = \varepsilon > 0$ để cho $\forall x : 0 < |x - 0| < \delta$ khi đó sẽ thỏa mãn (2)

vì vậy sẽ thỏa mãn (1). Do vậy theo định nghĩa $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

1.3.1.2 Giới hạn vô cực của hàm số khi $x \rightarrow a$

Định nghĩa : Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong lân cận của điểm a (có thể không xác định tại a).

- Hàm $f(x)$ được gọi là giới hạn $+\infty$ khi x dần tới a (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$) nếu:

$\forall M > 0$ (lớn bao nhiêu tùy ý) sẽ luôn $\exists \delta > 0$ để cho $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ thì có được $f(x) > M$

- Hàm $f(x)$ được gọi là giới hạn $-\infty$ khi x dần tới a (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) nếu:

$\forall M < 0$ (nhỏ bao nhiêu tùy ý) sẽ luôn $\exists \delta > 0$ để cho
 $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$ thì có được $f(x) < M$

1.3.1.3 Giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \rightarrow \infty$

Định nghĩa :

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định $\forall x > a$. Giá trị L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới $+\infty$ (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$) nếu: $\forall \varepsilon > 0$ (nhỏ tùy ý cho

trước), luôn $\exists N > 0$ để $\forall x > N$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định $\forall x < a$. Giá trị L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới $-\infty$ (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$) nếu: $\forall \varepsilon > 0$ (nhỏ tùy ý cho

trước), luôn $\exists N < 0$ để $\forall x < N$ thì $|f(x) - L| < \varepsilon$

1.3.1.4 Giới hạn vô cực của hàm số khi $x \rightarrow \infty$

Định nghĩa :

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định tại $\forall x > a$. Hàm $f(x)$ được gọi là có giới hạn vô cực khi x dần tới $+\infty$ (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$) nếu: $\forall M > 0$ (lớn tùy ý

cho trước), luôn $\exists N > 0$ để $\forall x > N$ thì $|f(x)| > M$

- Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định tại $\forall x < a$. Hàm $f(x)$ được gọi là có giới hạn vô cực khi x dần tới $-\infty$ (ký hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$) nếu: $\forall M > 0$ (lớn tùy ý cho

trước), luôn $\exists N > 0$ để $\forall x < N$ thì $|f(x)| > M$

Quy ước : Khi phát biểu "*trong quá trình nào đấy*" thì ta hiểu đó là quá trình của đối số $x \rightarrow x_0$ hữu hạn, hoặc $x \rightarrow \infty$

1.3.2 Giới hạn một phía

1.3.2.1 Giới hạn phải.

Xét giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow a$ và luôn thoả mãn $x > a$. Nếu giới hạn đó tồn tại (được ký hiệu là $f(a+0)$ hoặc $f(a^+)$) thì gọi là giới hạn phải của hàm $f(x)$ (khi x dần tới a từ bên phải)

$$\text{Ký hiệu: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a+0) \quad \text{hay} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$$

1.3.2.2 Giới hạn trái

Xét giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow a$ và luôn thoả mãn $x < a$. Nếu giới hạn đó tồn tại (được ký hiệu là $f(a-0)$) thì gọi là giới hạn trái của hàm $f(x)$ (khi x dần tới a từ bên trái)

$$\text{Ký hiệu: } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a-0) \quad \text{hay} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0)$$

Ví dụ: Tìm giới hạn một phía của hàm số $f(x) = \frac{|x|}{x}$ khi $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Định lý: Điều kiện cần và đủ để $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ là $f(a+0) = f(a-0) = L$

1.3.3. Tính chất về giới hạn

- (1) Giới hạn của hàm hằng bằng chính nó trong mọi quá trình $\lim C = C$
- (2) Giới hạn của hàm số nếu có là duy nhất
- (3) Nếu $f(x) \geq 0$ trong lân cận điểm a và $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ thì $L \geq 0$.
- (4) Giả sử: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Khi đó ta có được các kết luận sau:
 - $f(x)$ bị chặn trong một lân cận của a .
 - Nếu $L > 0$ thì $f(x) > 0$ trong một lân cận đủ nhỏ của a .
 - Nếu $L < 0$ thì $f(x) < 0$ trong một lân cận đủ nhỏ của a .

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \text{Mọi dãy } \{x_n\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \text{thì} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Chú ý: Nếu chỉ ra được hai dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\} \rightarrow a$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n)$ (hoặc không tồn tại chỉ một trong hai giới hạn trên) thì $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

1.3.4. Các phép toán về hàm có giới hạn

Định lí 1: Giả sử: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$. (L_1 và L_2 là hữu hạn), khi đó ta có:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = L_1 L_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ (nếu $g(x) \neq 0$ và $L_2 \neq 0$)

Định lí 2: (Giới hạn hàm hợp) Xét hàm số hợp $y = f(u(x))$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn: $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$, $\lim_{u \rightarrow b} f(u) = L$, thì $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = L$.

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 3} \sin(5x + 1) = \sin 16$

Chú ý:

- Cả hai định lí trên chưa khẳng định được trong các trường hợp sau (về mặt hình thức):

$$+ L_1 + L_2 = \infty - \infty$$

$$+ L_1 \cdot L_2 = 0 \cdot \infty$$

$$+ \frac{L_1}{L_2} = \frac{0}{0} \text{ hoặc } \frac{L_1}{L_2} = \frac{\infty}{\infty}$$

- Khi tìm giới hạn dạng $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$ thì ta gặp các dạng:

$$L_1^{L_2} = 1^\infty \text{ hoặc } L_1^{L_2} = 0^\infty \text{ hoặc } L_1^{L_2} = 0^0$$

Các trường hợp trên gọi là **các dạng vô định**.

Khi gặp các dạng vô định đó, muốn biết cụ thể phải tìm cách để **khử dạng vô định**. Sau đây sẽ là một số kết quả cơ bản cho phép ta có thể khử được các dạng vô định đó.

1.3.5 Hai tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

1.3.5.1 Tiêu chuẩn 1: (Nguyên lý kẹp giới hạn)

Định lí: Giả sử 3 hàm số: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ xác định tại lân cận của điểm $x = x_0$ (không cần xác định tại x_0) và thỏa mãn: $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x$ thuộc lân cận của a . Khi đó nếu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

Áp dụng: Từ định lí trên, người ta chứng minh được công thức giới hạn cơ bản:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ví dụ: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = 1$

(Gợi ý : $e^x < 1+e^x < 2e^x \Rightarrow x = \ln e^x < \ln(1+e^x) < \ln 2e^x = \ln 2 + x$

$$\Rightarrow 1 < \frac{\ln(1+e^x)}{x} < \frac{\ln 2}{x} + 1$$

Sau đây là một số ví dụ áp dụng kết quả trên.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} \cdot \frac{mx}{nx} \cdot \frac{nx}{\sin nx} = \frac{m}{n};$$

1.3.5.2 Tiêu chuẩn 2:

Định lí : Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

- Nếu $f(x)$ đơn điệu tăng và bị chặn trên thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Nếu $f(x)$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới thì tồn tại $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- Hàm $f(x)$ được gọi là đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm) trên khoảng (a, b) nếu $\forall x_1 < x_2 \in (a, b)$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ (hoặc $f(x_1) > f(x_2)$)

- Hàm $f(x)$ được gọi là bị chặn trên (hoặc bị chặn dưới) trên khoảng (a, b) nếu $\exists M$ để $f(x) < M$ (hoặc $f(x) > M$) $\forall x \in (a, b)$

Áp dụng: Xét hàm $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, hàm $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng khi $x \rightarrow +\infty$ và

$f(x) < 3 \Rightarrow$ bị chặn trên, do đó $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, e là một số vô tỷ, có giá trị $e \approx 2,78$

Nhận xét:

- Từ giới hạn của số e ta cũng có $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$
- Có thể vận dụng giới hạn trên để tính giới hạn có dạng 1^∞

Xét $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)}$ với $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty$ khi đó có

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \left[1 + (u(x) - 1) \right]^{\frac{1}{u(x)-1}} \right\}^{[(u(x)-1) \cdot v(x)]} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{\{[u(x)-1] \cdot v(x)\}} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \{[u(x)-1] \cdot v(x)\}}$$

Ví dụ: Tính các giới hạn :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{-x}{2} \cdot \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{-x}{2}} \right\}^{-2} = e^{-2};$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{2} \cdot \frac{-2}{x^2 + 1} \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{2}} \right]^{\frac{-2x^2}{x^2 + 1}} = e^{-2};$$

1.3.6 Một số công thức giới hạn cơ bản

Các công thức giới hạn sau được suy ra từ các hai công thức giới hạn cơ bản trên.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

1.4 Vô cùng bé và vô cùng

1.4.1 Vô cùng bé.

1.4.1.1. Định nghĩa: Đại lượng $\alpha(x)$ được gọi là một vô cùng bé (VCB) trong quá trình nào đó nếu trong quá trình ấy $\lim \alpha(x) = 0$

Ví dụ: $\sin x$ là VCB khi $x \rightarrow 0$; x^2 là VCB khi $x \rightarrow 0$; $\frac{1}{x}$ là VCB khi $x \rightarrow \infty$

Nhận xét:

- +) Nói VCB phải gắn vào một quá trình cụ thể của đối số x .
- +) Một số có giá trị tuyệt đối bé bao nhiêu cũng không là một VCB.
- +) Số 0 là VCB trong mọi quá trình.

1.4.1.2 Tính chất:

- Tổng, hiệu, tích của hữu hạn các VCB trong cùng một quá trình sẽ là 1 VCB trong quá trình ấy.

Tức là: nếu $\alpha_1(x); \alpha_2(x); \dots; \alpha_m(x)$ là các VCB

thì: $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x) \pm \dots \pm \alpha_m(x)$ và $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) \cdot \dots \cdot \alpha_m(x)$ là các VCB.

- Nếu trong cùng một quá trình nào đó $\alpha(x)$ là 1 VCB, hàm $f(x)$ là một hàm bị chặn thì cũng trong quá trình ấy $\alpha(x) \cdot f(x)$ cũng là một VCB.

(hàm $f(x)$ được gọi là bị chặn trong quá trình nào đó nếu $\exists M$ để $|f(x)| < M$ trong quá trình ấy)

Ví dụ: Chứng minh: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x^2} = 0$

Giải: Khi x dần tới 0 thì ta có x là một VCB. Mặt khác $\left| \cos \frac{1}{x^2} \right| < 2$ từ đó suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x^2} = 0.$$

1.4.1.3. So sánh hai VCB.

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB trong cùng một quá trình. Nếu trong quá trình ấy **tồn tại**

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$ thì khi đó:

- Nếu $k = 0$ thì $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$ trong quá trình ấy.
- Nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương, kí hiệu: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

- Nếu $k \neq 0, k \neq 1$ (k - hữu hạn) thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB ngang cấp
- Nếu $k = \infty$ thì $\beta(x)$ là VCB cấp thấp hơn $\alpha(x)$

Nếu không tồn tại k , thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB không so sánh được.

Ví dụ:

(1) $\sin x \sim x$ khi $x \rightarrow 0$ do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\operatorname{tg} 5x$ và $\sin 2x$ là VCB ngang cấp khi $x \rightarrow 0$ do

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

(3) $1 - \cos 4x$ là VCB bậc cao hơn $e^{3x} - 1$ khi $x \rightarrow 0$ do:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \cdot \frac{3x}{e^{3x} - 1} \cdot \frac{4x^2}{3x} = 0$$

(4) $\ln(1 + 2x)$ là VCB có bậc thấp hơn $\sqrt{1 + x^2} - 1$ khi $x \rightarrow 0$ do:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sqrt{1 + x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{2x} \cdot \frac{x^2}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} - 1} \cdot \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{0} = \infty$$

(5) $x \sin \frac{1}{x}$ và x là hai VCB không so sánh được khi $x \rightarrow 0$ do không tồn tại giới

hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$.

1.4.1.4. Các cặp VCB tương đương cơ bản.

- $\sin x \sim x$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $\operatorname{tg} x \sim x$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $\arcsin x \sim x$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $\operatorname{arctg} x \sim x$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $(e^x - 1) \sim x$ (khi $x \rightarrow 0$)

- $(a^x - 1) \sim x \ln a$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $\ln(1+x) \sim x$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $(x - \sin x) \sim \frac{x^3}{6}$ (khi $x \rightarrow 0$)
- $(\tan x - x) \sim \frac{x^3}{3}$ (khi $x \rightarrow 0$)

Giả sử $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$. Khi đó, từ bảng trên ta có được

$$(u(x) - \sin u(x)) \sim \frac{u^3(x)}{6} \quad (\text{khi } x \rightarrow a)$$

$$(\tan(u(x)) - u(x)) \sim \frac{u^3(x)}{3} \quad (\text{khi } x \rightarrow a)$$

1.4.2 Vô cùng lớn.

1.4.2.1 Định nghĩa: Hàm số $\alpha(x)$ được gọi là một vô cùng lớn (VCL) trong quá trình $x \rightarrow x_0$ (hữu hạn hoặc vô cùng) nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \infty$

Ví dụ: x^3 là VCL khi $x \rightarrow \infty$ nhưng x^3 không là VCL khi $x \rightarrow 1$.

$\frac{1}{x-2}$ là VCL khi $x \rightarrow 2$.

Nhận xét: Khi nói tới VCL phải gắn vào một quá trình cụ thể của đối số.

1.4.2.2 Liên hệ giữa VCB và VCL

Nếu trong một quá trình nào đó $\alpha(x)$ là một VCB thì cũng trong quá trình ấy $\frac{1}{\alpha(x)}$ là một VCL. Ngược lại, nếu $\alpha(x)$ là một VCL thì cũng trong quá trình ấy $\frac{1}{\alpha(x)}$ là một VCB

Ví dụ: x là VCB trong quá trình $x \rightarrow 0$ thì $\frac{1}{x}$ là VCL trong quá trình $x \rightarrow 0$.

1.4.2.3 Quy tắc so sánh hai VCL

Giả sử $\alpha(x); \beta(x)$ là các VCL trong cùng một quá trình. Nếu trong quá trình ấy tồn tại

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \text{ thì:}$$

- Nếu $k = 0$ thì $\alpha(x)$ là VCL cấp thấp hơn $\beta(x)$
- Nếu $k = 1$ thì $\alpha(x)$ là VCL tương đương $\beta(x)$.
- Nếu $k \neq 0; k \neq 1$ thì $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL ngang cấp.
- Nếu $k = \infty$ thì $\alpha(x)$ là VCL cấp cao hơn $\beta(x)$.

Nếu không tồn tại k thì $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCL không so sánh được.

Ví dụ 1: Khi $x \rightarrow 2$ thì $\frac{1}{x-2}$ là VCL ngang cấp với $\frac{x}{\sqrt{x+2}-2}$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{x}{\sqrt{x+2}-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{8}$$

Ví dụ 2: Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $x^3 + 2x^2 - 1$ là VCL có cấp cao hơn $x^2 + 1$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Ví dụ 3: Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $3x^3$ là VCL tương đương với $3x^3 + 2x + 1$

$$\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x + 1}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

1.4.3 Ứng dụng của VCB và VCL trong việc tìm giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$.

1.4.3.1 Quy tắc thay thế VCB (VCL) tương đương

Giả sử $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$ là hai VCB (VCL) tương đương khi $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$)

$\beta(x), \bar{\beta}(x)$ là hai VCB(VCL) tương đương khi $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$)

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x)\beta(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \bar{\alpha}(x)\bar{\beta}(x)$$

Ví dụ 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\tan 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$

Ví dụ 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^3)}{(1-\cos 5x)\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{\frac{1}{2}(5x)^2 x} = \frac{6}{25}$

Ví dụ 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\arcsin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Ví dụ 4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+x^2} - 1}{\tan(\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{5}x^2}{x^2} = \frac{1}{5}$

Chú ý:

- Chỉ được thay thế các VCB tương đương trong các dạng tích và thương. Không được thay thế trong các dạng tổng và hiệu.
- Khi tìm giới hạn với quá trình $x \rightarrow a, a \neq 0$, ta có thể đổi biến $t = x - a$, để chuyển quá trình $x \rightarrow a$ bằng quá trình $t \rightarrow 0$ vì trong quá trình này ta có nhiều dạng VCB tương đương.

Ví dụ 5: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (\frac{1}{2}x^2)}{x^3} = \frac{1}{2}$

Như vậy, rõ ràng trong ví dụ này ta không thể thay thế $\tan x - \sin x$ bởi $x - x = 0$.

Ví dụ 6: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$. Trong bài này, ta không thể thay $\sin mx$ bằng mx vì $mx \rightarrow m\pi$, $m\pi \neq 0$. Để tiếp tục ta có thể đổi biến: Đặt $x = t + \pi$, khi $x \rightarrow \pi$, $t \rightarrow 0$. Khi đó:

$$I = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin m(t + \pi)}{\sin n(t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin(mt)}{(-1)^n \sin(nt)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-n} mt}{nt} = \frac{(-1)^{m-n} m}{n}.$$

1.4.3.2 Quy tắc ngắt bỏ các VCB cấp cao

Giả sử trong cùng một quá trình nào đó có các đại lượng VCB $\alpha_1(x); \alpha_2(x); \dots; \alpha_m(x)$ và $\beta_1(x); \beta_2(x); \dots; \beta_n(x)$. Khi đó:

$$\lim \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_m(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x) + \dots + \beta_n(x)} = \lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$$

trong đó $\bar{\alpha}(x); \bar{\beta}(x)$ là các VCB cấp thấp nhất ở tử thức, mẫu thức

(**chú ý:** so sánh với toàn bộ tử thức, toàn bộ mẫu thức).

Áp dụng: Tính các giới hạn sau:

Ví dụ 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x + tg^3 x}{2x + 3x^5 + 5x^7}$

Giải: Trong quá trình $x \rightarrow 0$, ta có:

- $\sin^2 x \approx x^2$; $tg^3 x \approx x^3$. Vậy x là VCB có bậc thấp nhất trên tử thức.
- $2x$ là VCB có bậc thấp nhất dưới mẫu thức.

Theo qui tắc ngắt bỏ VCB bậc cao, ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^2 x + tg^3 x}{2x + 3x^5 + 5x^7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

Ví dụ 2: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x + \sin^2 7x}{tg^2 x + \ln(1 + 7x)}$.

Giải: Trong quá trình $x \rightarrow 0$, ta có:

- $\arcsin 5x \approx 5x$, $\sin^2 7x \approx (7x)^2$

- $\operatorname{tg}^2 x \approx x^2$, $\ln(1 + 7x) \approx 7x$

Vậy $\arcsin 5x$ là VCB có bậc thấp nhất trên tử thức và $\ln(1 + 7x)$ là VCB có bậc thấp nhất dưới mẫu thức nên theo qui tắc ngắt bỏ VCB bậc cao ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x + \sin^2 7x}{\operatorname{tg}^2 x + \ln(1 + 7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\ln(1 + 7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}.$$

Ví dụ 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + (e^x - 1)^2 + (\cos 2x - 1)^2}{3\arctg^3 x + \ln(1 + 7x \sin x)}$

Giải: Trong quá trình $x \rightarrow 0$, ta có:

- $(e^x - 1)^2 \approx x^2$; $(\cos 2x - 1)^2 \approx \left(\frac{1}{2}(2x)^2\right)^2 = 4x^4$
- $3\arctg^3 x \approx 3x^3$; $\ln(1 + 7x \sin x) \approx 7x \sin x \approx 7x^2$

Vậy $(e^x - 1)^2, \ln(1 + 7x \sin x)$ lần lượt là các VCB bậc thấp nhất trên tử thức và dưới mẫu thức. Vậy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + (e^x - 1)^2 + (\cos 2x - 1)^2}{3\arctg^3 x + \ln(1 + 7x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{\ln(1 + 7x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{7x^2} = \frac{1}{7}.$$

Ví dụ 4: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin^2 x) + x \ln(1 + 2x) + x^3}{(\sqrt{1 + 4x^2} - 1) + (x - \sin x)}$.

Giải: Trong quá trình $x \rightarrow 0$, ta có:

- $\operatorname{tg}(\sin^2 x) \approx \sin^2 x \approx x^2$; $x \ln(1 + 2x) \approx x \cdot 2x = 2x^2$
- $\sqrt{1 + 4x^2} - 1 = (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx \frac{1}{2} 4x^2 = 2x^2$; $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$

Vậy $\operatorname{tg}(\sin^2 x)$ và $x \ln(1 + 2x)$ là hai VCB cùng bậc và có bậc thấp nhất trên tử thức.

$\sqrt{1 + 4x^2} - 1$ là VCB có bậc thấp nhất dưới mẫu thức. Do vậy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin^2 x) + x \ln(1+2x) + x^3}{(\sqrt{1+4x^2} - 1) + (x - \sin x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin^2 x) + x \ln(1+2x)}{(\sqrt{1+4x^2} - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin^2 x)}{(\sqrt{1+4x^2} - 1)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+2x)}{(\sqrt{1+4x^2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}(4x^2)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x)}{\frac{1}{2}(4x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

1.4.3.3 Quy tắc ngắt bỏ VCL bậc thấp.

Giả sử $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_m(x)$ và $\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)$ là các VCL trong cùng một quá trình. Khi đó: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_m(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x) + \dots + \beta_n(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$

trong đó $\bar{\alpha}(x)$; $\bar{\beta}(x)$ là các VCL cấp cao nhất ở tử thức và mẫu thức.

Chú ý:

- Đa thức $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ở đây k, n nguyên dương, a_i hằng số, a_n khác 0. Trong quá trình $x \rightarrow +\infty$ thì: $P_n(x) \approx a_n x^n$.
- Khi $x \rightarrow +\infty$, ta có thể sắp xếp các VCL sau theo thứ tự bậc cao dần như sau:

$\ln x, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, a_1^x, a_2^x$. trong đó $(\alpha_2 > \alpha_1 > 0; a_2 > a_1 > 1)$

Áp dụng: Tính các giới hạn sau:

Ví dụ 1: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x - 5}{x^3 + 6x^2 - 8x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2.$

Ví dụ 2: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^4 + 2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4}{3n^4} = \frac{1}{3}.$

Ví dụ 3: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 1} - \sqrt[3]{n^2 + 2}}{\sqrt[5]{n^4 + 1} + \sqrt{n^3 + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 1}}{\sqrt{n^3 + 2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5}}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} = 0$

Ví dụ 4: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x}{2^x + 5 \cdot 4^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{5 \cdot 4^x} = \frac{1}{5}.$

Ví dụ 5: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + x^3 - \ln x}{x^2 + 2 \ln x - 5 \cdot 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{5 \cdot 3^x} = \frac{1}{5}.$

1.5 Hàm số liên tục

1.5.1 Hàm số liên tục

1.5.1.1. Liên tục tại một điểm.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và trong lân cận của x_0 .

Hàm số $f(x)$ gọi là **liên tục tại x_0** nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Khi đó điểm x_0 gọi là **điểm liên tục** của hàm số $f(x)$.

Ví dụ: $f(x) = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ không liên tục tại $x = 2$ (vì $f(x)$ không xác định tại $x = 2$)

Kết quả cần nhớ: Hàm số sơ cấp liên tục tại mọi điểm mà nó xác định

1.5.1.2 Liên tục một phía.

+ **Liên tục phải**: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì $f(x)$ gọi là liên tục phải tại x_0 .

+ **Liên tục trái**: Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì $f(x)$ gọi là liên tục trái tại x_0 .

Định lý: Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Ví dụ 1: Xác định a để hàm số liên tục trên miền xác định của nó:

1) $f(x) = \begin{cases} 2e^x & \text{khi } x < 0 \\ a + 2x & \text{khi } 0 \leq x \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Giải:

1) - $f(x)$ liên tục tại mọi $x \neq 0$ vì các biểu thức xác định $f(x)$ là các hàm số sơ cấp xác định tại mọi $x \neq 0$.

- Tại $x = 0$: $f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2e^x = 2$; $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + 2x) = a = f(0)$.

Vậy để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ thì: $f(0+0) = f(0-0) = f(0) \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy với $a = 2$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) - Với $x \neq 0$, $f(x)$ là hàm số sơ cấp nên liên tục.

- Xét tại $x = 0$ có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} = \frac{9}{2}$; $f(0) = a$. $\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $a = \frac{9}{2}$. Vậy với $a = \frac{9}{2}$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Xác định các hằng số a, b để các hàm số sau đây liên tục:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2+x}-1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \\ ax^2 + b & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{e^{3x}-1}{x} & \text{khi } 0 < x \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ \frac{4}{x} & \text{khi } 2 < x \end{cases}$$

Giải:

1) $f(x)$ là các hàm số sơ cấp xác định tại mọi $x < -1$; $-1 < x < 0$; và $x > 0$ nên liên tục tại các điểm này.

- **Tại $x = -1$:**

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2 + b) = a + b = f(-1)$$

$$\begin{aligned} f(-1-0) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt[3]{2+x}-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2+x-1}{(x+1) \left[(\sqrt[3]{2+x})^2 + \sqrt[3]{2+x} + 1 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{\left[(\sqrt[3]{2+x})^2 + \sqrt[3]{2+x} + 1 \right]} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Để } f(x) \text{ liên tục tại } x = -1 \text{ thì } f(-1+0) = f(-1-0) = f(-1) \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{3} \quad (1)$$

- **Tại $x = 0$:**

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = b = f(0)$$

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x}-1}{3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x} = 3.$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $b = 3$ (2).

Kết hợp (1) và (2) suy ra $a = -\frac{8}{3}$.

Vậy với $a = -\frac{8}{3}$ và $b = 3$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định tại mọi $x < 1$, $1 < x < 2$, và $x > 2$ nên liên tục tại các điểm này.

- Tại $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 5 = f(1) \quad f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

$\Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $a + b = 5$ (1).

- Tại $x = 2$:

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b = f(2). \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

Vậy để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì $2a + b = 2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $a = -3$; $b = 8$.

Kết luận: với $a = -3$; $b = 8$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

1.5.1.3 Liên tục trên một khoảng, đoạn.

- Hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng (a, b) nếu $f(x)$ liên tục tại mọi $x \in (a, b)$.

Ký hiệu $f(x) \in C_{(a, b)}$

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu $f(x)$ liên tục trong (a, b) và liên tục phải tại a , liên tục trái tại b .

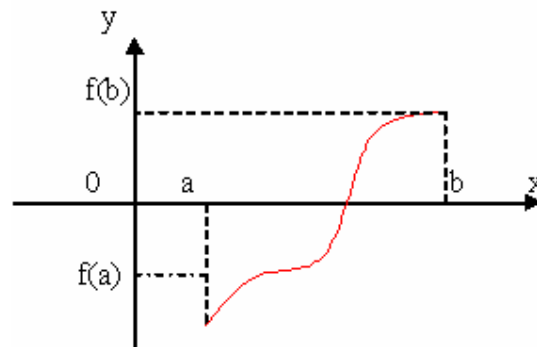
Ký hiệu $f(x) \in C_{[a, b]}$

Ý nghĩa hình học: Nếu hàm

$f(x) \in C_{[a, b]}$ thì đồ thị $y = f(x)$ là một

đường liền nét đi từ

$A(a, f(a))$ đến $B(b, f(b))$.



1.5.2 Tính chất của hàm liên tục trên một đoạn

1.5.2.1 Tính chất 1: (Tính bị chặn)

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $f(x)$ bị chặn trên $[a, b]$.

Tức là: $\exists M > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| < M$

1.5.2.2 Tính chất 2:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên $[a, b]$.

Tức là: $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = \min_{[a, b]} f(x); f(x_2) = \max_{[a, b]} f(x)$

1.5.2.3 Tính chất 3:

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì $f(x)$ đạt mọi giá trị trung gian giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của nó trên $[a, b]$.

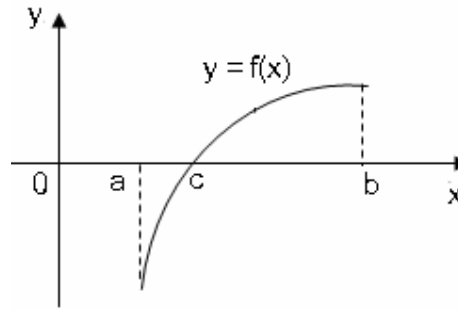
Tức là: nếu $m = \min_{[a, b]} f(x); M = \max_{[a, b]} f(x);$ Thì

$$\forall \mu : m \leq \mu \leq M \quad \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = \mu$$

Hệ quả: Nếu $f(x) \in C_{[\alpha, \beta]}$ cho

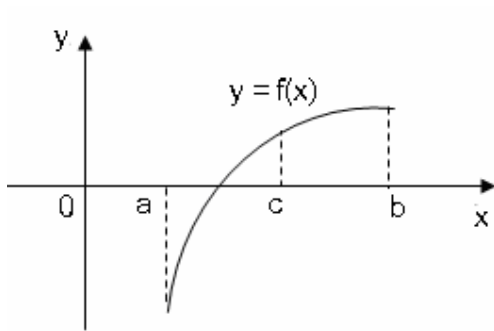
$a, b \in (\alpha, \beta)$ sao cho $a < b$ và

$f(a) \cdot f(b) < 0$ khi đó tồn tại 1 điểm $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = 0$.

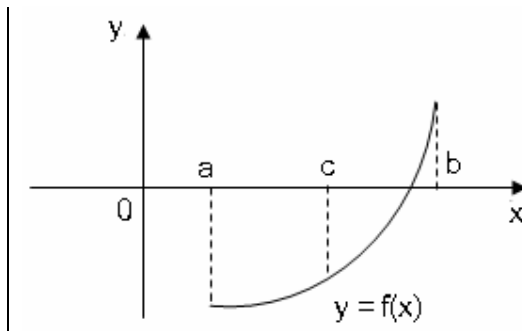


Áp dụng : *Phương pháp chia đôi liên tiếp* : Giải bằng gần đúng phương trình $f(x) = 0$

Để giải gần đúng phương trình $f(x) = 0$ theo phương pháp chia đôi liên tiếp thì hàm $f(x)$ cần thỏa mãn điều kiện : $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$



a)



b)

Quy ước :

- các ký hiệu a, b, c là **địa chỉ** chứa các giá trị a, b, c
- ký hiệu " $a := b$ " là gán **giá trị** ở địa chỉ b vào địa chỉ a

Cần tìm nghiệm gần đúng $f(x) = 0$ với sai số là ε

Thuật giải:

Bước 1. $c := \frac{a + b}{2}$

Bước 2. Nếu $f(c) \cdot f(a) < 0$ thì $b := c$ - trường hợp a) tức là thay $[a, b]$ bởi $[a, c]$
 Nếu $f(c) \cdot f(a) > 0$ thì $a := c$ - trường hợp b) tức là thay $[a, b]$ bởi $[c, b]$

Bước 3.

- Nếu $\left| \frac{a+b}{2} - c \right| \leq \varepsilon$ thì dừng tính và nghiệm gần đúng $x_0 = \frac{a+b}{2}$
- Nếu $\left| \frac{a+b}{2} - c \right| > \varepsilon$ thì **quay về bước 1**

1.5.3 Điểm gián đoạn của hàm số

1.5.3.1. Định nghĩa: Hàm số $f(x)$ gọi là gián đoạn tại điểm x_0 nếu $f(x)$ không liên tục tại x_0 . Khi đó điểm x_0 gọi là điểm gián đoạn của hàm số.

1.5.3.2. Các trường hợp gián đoạn.

Điểm x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$ nếu thuộc một trong các trường hợp sau:

- Hàm số $f(x)$ không xác định tại x_0

Ví dụ: $f(x) = \frac{1}{x}$ có điểm gián đoạn $x = 0$ do không xác định tại $x = 0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Ví dụ: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có điểm gián đoạn là $x = 1$ vì

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0 ; f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty \Rightarrow f(1-0) \neq f(1+0)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Ví dụ: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

có điểm gián đoạn $x = 0$ vì $f(0+0) = f(0-0) = 1 \neq f(0) = 3$

1.5.3.3 Phân loại điểm gián đoạn.

Giả sử điểm x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

- Điểm x_0 gọi là **điểm gián đoạn loại 1** của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại giới hạn trái và giới hạn phải hữu hạn của hàm số $f(x)$ tại x_0 .

Khi đó: $h = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ gọi là bước nhảy của $f(x)$ tại $x = x_0$.

Khi $h = 0$ thì x_0 là điểm gián đoạn có thể khử được bằng cách bổ sung giá trị của hàm số tại điểm x_0 chính bằng giá trị giới hạn đó.

Ví dụ: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ gián đoạn tại $x = 0$

do đó đặt $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

- Các điểm gián đoạn của hàm số khác loại 1 thì gọi là **điểm gián đoạn loại 2**.

Ví dụ 1

Xét tính liên tục và phân loại điểm gián đoạn của hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

Giải

- Nhận thấy hàm $f(x)$ liên tục với mọi $x \neq 0$.

- Xét tại $x = 0$ có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$

vậy $f(0-0) = f(0+0) = \frac{1}{2} \neq f(0) = 1$, do đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại 1 với bước nhảy $h = 0$.

Ví dụ 2 Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + x + b}{(x-1)} & \text{khi } x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Tìm các giá trị a và b để hàm số $f(x)$ có $x = 1$ là điểm gián đoạn:

a) loại 1, **b)** loại 2

Giải Với $x \neq 1$, hàm $f(x)$ liên tục và

$$f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{(x-1)} = \frac{ax(x-1) + a(x-1) + a + b}{(x-1)} = ax + a + \frac{a+b}{x-1}$$

- Nếu $a + b \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2a + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+b}{x-1} = \infty$
 $\Rightarrow x = 1$ là gián đoạn loại 2

- Nếu $a + b = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2a \Rightarrow f(1-0) = f(1+0) = 2a$
 $\Rightarrow$ để $x = 1$ là điểm gián đoạn loại 1 thì $2a \neq f(1) = 4 \Leftrightarrow a \neq 2$

Kết luận: Điều kiện để $x = 1$ là điểm :

- * gián đoạn loại 1 là : $a = -b \neq 2$
- * gián đoạn loại 2 là : $a + b \neq 0$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

Bài 1 Tìm các hàm ngược của các hàm số :

1) $y = x^3$ với miền xác định $x < 0$;

2) $y = \frac{4x+1}{x-2}$ với miền xác định $x > 2$

3) $y = \ln(x^2 - 1)$ với miền xác định $x < -1$

Bài 2 Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{x}$ b) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^\alpha)}{\alpha}$, c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$ ($\alpha \neq \beta$).

Bài 3 Xét tính liên tục và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{khi } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$

Bài 4. Tìm các giá trị a và b để hàm số sau là hàm liên tục với mọi x

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

CHƯƠNG 2

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

2.1. Đạo hàm cấp 1

2.1.1. Định nghĩa đạo hàm

2.1.1.1. Đạo hàm tại một điểm.

- **Định nghĩa** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định tại điểm x_0 và lân cận của x_0 . Cho x_0 số gia Δx , khi đó nhận được số gia tương ứng của hàm số: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Nếu tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$ (hữu hạn) thì A được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 .

Ký hiệu: $f'(x_0) = A$, tức là $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ví dụ 1: Cho $f(x) = x^2 + 1$. Tính $f'(1)$.

Cho $x_0 = 1$ số gia Δx .

Số gia tương ứng của hàm số: $\Delta y = (1 + \Delta x)^2 + 1 - (1 + 1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2$

Ta có: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$, Vậy: $f'(1) = 2$

Ví dụ 2: Cho $f(x) = \sin x$, tính $f'(x) = ?$

Do $f(x) = \sin x$ xác định tại mọi giá trị x nên thỏa mãn giả thiết để có thể tính được $f'(x)$.

Cho x số gia $\Delta x \Rightarrow \Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$

do đó

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

$$\text{Vậy } (\sin x)' = \cos x$$

- **Ý nghĩa của đạo hàm:**

- Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì đường cong $y = f(x)$ sẽ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ và đường cong được gọi là trơn tại x_0 . Phương trình tiếp tuyến tại điểm M_0 sẽ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Nếu hàm $f(x)$ có $f'(x) > 0$ trên (a, b) thì hàm số đồng biến (đơn điệu tăng) trên (a, b) , còn nếu $f'(x) < 0$ trên (a, b) thì hàm số nghịch biến (đơn điệu giảm) trên (a, b) . Như vậy dựa vào dấu hiệu của đạo hàm ta có thể khảo sát được chiều biến thiên của hàm số.

2.1.1.2. Đạo hàm trái, phải.

- **Định nghĩa** Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định tại điểm x_0 và lân cận trái của x_0 (tức là với $x < x_0$). Cho x_0 số gia $\Delta x < 0$, khi đó nhận được số gia tương ứng của hàm số: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Nếu tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm trái của hàm số $f(x)$

tại x_0 . Ký hiệu: $f'(x_0 - 0)$. Vậy $f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Tương tự ta định nghĩa đạo hàm phải: $f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

- **Định lý:**

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi tồn tại $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0 . Điều ngược lại chưa đúng.

Ví dụ $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 0$

- Nếu tồn tại $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$ mà $f(x)$ liên tục tại x_0 thì tại điểm $M(x_0, f(x_0))$ đường cong $y = f(x)$ có hai tiếp tuyến với $f'(x_0 + 0)$ là hệ số góc tiếp tuyến bên phải và $f'(x_0 - 0)$ là hệ số góc tiếp tuyến bên trái.

Ví dụ: $y = |x|$ có $f'(0 - 0) = -1$ và $f'(0 + 0) = 1$.

2.1.1.3. Đạo hàm trên một khoảng, một đoạn

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên (a, b) nếu $f(x)$ có đạo hàm tại mọi $x \in (a, b)$.
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[a, b]$ nếu $f(x)$ có đạo hàm trong (a, b) và có đạo hàm phải tại a , có đạo hàm trái tại b .
- Đạo hàm của hàm số $f(x)$ trên một khoảng, một đoạn nếu tồn tại là một hàm số ký hiệu là $f'(x)$ hoặc y' .

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 1$ có $f'(x) = 2x$ với $x \in \mathbb{R}$.

2.1.2. Các phương pháp tính đạo hàm

2.1.2.1. Tính đạo hàm theo định nghĩa.

Bảng các đạo hàm cơ bản

$y = C$ (C là hằng số)	$\implies y' = 0$
$y = x^m$ ($m \in \mathbb{R}$)	$\implies y' = m x^{m-1}$
$y = \sin x$	$\implies y' = \cos x$
$y = \cos x$	$\implies y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$\implies y' = \frac{1}{\cos^2 x}; (= 1 + \tan^2 x)$
$y = \cot x$	$\implies y' = \frac{-1}{\sin^2 x}; (= -1 - \cot^2 x)$
$y = e^x$	$\implies y' = e^x$
$y = a^x$	$\implies y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$\implies y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$\implies y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \arcsin x$	$\implies y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$\implies y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctan x$	$\implies y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$\implies y' = -\frac{1}{1+x^2}$

2.1.2.2. Tính đạo hàm theo quy tắc.

- **Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương.**

Giả sử $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên (a, b) . Khi đó:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[K \cdot f(x)]' = K \cdot f'(x) \quad \text{với } K \text{ là hằng số}$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$$

- **Đạo hàm của hàm hợp.**

Xét hàm hợp: $y = f(u(x))$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại x_0 .

Hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = u(x_0)$.

Khi đó hàm hợp $y = f(u(x))$ có đạo hàm tại x_0 với:

$$y'(x_0) = f'_u(u_0) \cdot u'_{x_0}(x_0)$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số:

Cho hàm số $y = f(u(x)) = 2\sin(\sqrt{x^2 - 2})$; gọi $u(x) = (\sqrt{x^2 - 2})$

$$y' = f'_u \cdot u'_x = 2 \cdot \cos u \cdot u'_x = 2 \cdot \cos(\sqrt{x^2 - 2}) \cdot (u)'_x$$

$$y' = 2 \cdot \cos(\sqrt{x^2 - 2}) \cdot \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{x^2 - 2})} \cdot (2x) = 2 \cdot \cos(\sqrt{x^2 - 2}) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau

$$y = \sin(2x+1) \rightarrow y' = (2x+1)' \cdot \cos(2x+1) = 2 \cdot \cos(2x+1)$$

$$y = \cos(\ln x) \rightarrow y' = -\sin(\ln x) \cdot (\ln x)' = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)$$

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \rightarrow y' =$$

$$y = \arctg\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) \rightarrow y' =$$

Tổng quát ta có: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$

• Đạo hàm của hàm ngược

Giả sử hàm $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $f'(x_0) \neq 0$. Nếu $f(x)$ có hàm ngược $x = g(y)$

thì $g(y)$ cũng có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ với: $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

$$\text{Tổng quát: } g'(y)|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x)|_{x=x_0}}$$

2.2. Vi phân

2.2.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận của x_0 .

Cho x_0 số gia Δx , khi đó nhận được số gia tương ứng của hàm số: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Nếu Δf biểu diễn được dưới dạng $\Delta f = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)$

trong đó A là hằng số chỉ phụ thuộc x_0 và $\alpha(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn Δx khi $\Delta x \rightarrow 0$.

thì biểu thức $A \cdot \Delta x$ gọi là vi phân của $f(x)$ tại x_0 và ký hiệu: $df = A \cdot \Delta x$

Khi đó ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0

Nhận xét :

- Nếu hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 với $df = A \cdot \Delta x$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và $f'(x_0) = A$.

Ngược lại nếu $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì khả vi tại x_0 và $df = f'(x_0) \Delta x$. Như vậy tính có

đạo hàm và tính **khả vi** của hàm số **luôn đi cùng nhau**.

- Xét hàm số $f(x) = x$ có $f'(x) = 1$ với $\forall x$ nên $df = dx = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow \Delta x = dx$

Do đó ta có biểu thức vi phân của hàm số $f(x)$:

$$df = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

2.2.2. Ứng dụng vi phân tính gần đúng

Giả sử hàm số $f(x)$ khả vi tại x_0 và $f'(x_0) \neq 0$.

Ta có: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)$

Với Δx rất nhỏ thì $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ (do bỏ qua VCB cấp cao $\alpha(\Delta x)$)

Suy ra:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Ví dụ:

➤ Tính $\sqrt[3]{1,02}$, đặt $f(x) = \sqrt[3]{x}$, lấy $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$, có $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{1,02} = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} \cdot 0,02 = 1 + \frac{2}{300} = \frac{302}{300}$$

$$\text{Vậy } \sqrt[3]{1,02} \approx \frac{302}{300}$$

➤ Tính $\sin 29^\circ$, đặt $f(x) = \sin x$, $29^\circ = 30^\circ - 1^\circ$; có $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ và $1^\circ = \frac{\pi}{180}$;

lấy $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$; $f'(x) = \cos x$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{180 - \pi\sqrt{3}}{360}$$

2.3. Ứng dụng đạo hàm để tìm giới hạn ở các dạng vô định

2.3.1. Quy tắc L'opital 1 (xét cho quá trình $x \rightarrow x_0$ hữu hạn)

Định lý 1:

Giả sử các hàm $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại x_0 , khả vi ở lân cận x_0 , thỏa mãn các điều kiện:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ và } g'(x) \neq 0 \text{ ở lân cận } x_0.$$

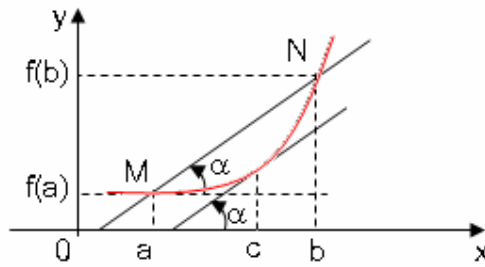
$$\text{khi đó nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Chứng minh định lý:

Để chứng minh định lý ở đây ta áp dụng định lý Lagrange:

- Định lý Lagrange:

Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ khả vi trên khoảng (a, b) . Khi đó có ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.



Hình 2.1

Bằng cách mô tả trên hình 2.1 ta có $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

- Do $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}$ mà $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[x, x_0]$ (hoặc trên $[x_0, x]$), khả vi trên (x, x_0) (hoặc trên (x_0, x)), áp dụng Lagrange ta được $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ với $c \in (x, x_0)$, do đó nếu $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$ và vì vậy $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Ví dụ:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ có dạng $\frac{0}{0}$, xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{1} = 3$, vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$ có dạng $\frac{0}{0}$,

xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+2x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1+2x} = 2$, vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3}$ có dạng $\frac{0}{0}$, xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - \operatorname{tg}^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}$

vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{3}$

Định lý 2:

Giả sử các hàm $f(x)$, $g(x)$ khả vi ở lân cận x_0 (trừ điểm x_0), thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \quad \text{và} \quad g'(x) \neq 0 \text{ ở lân cận } x_0.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

Ví dụ:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot \ln x ; (\beta > 0) . \text{ Có } \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\beta}}, \text{ có dạng } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^\beta}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\beta x \cdot x^{-1-\beta}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^\beta}{\beta} = 0,$$

$$\text{vậy } \lim_{x \rightarrow 0} x^\beta \cdot \ln x = 0 ; (\beta > 0)$$

2.3.2. Quy tắc L'opital 2 (xét cho quá trình $x \rightarrow \infty$)

Định lý 1:

Giả sử các hàm $f(x)$, $g(x)$ khả vi $\forall x > a$ ($\forall x < a$), thỏa mãn các điều kiện :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} g(x) = 0 \text{ và } g'(x) \neq 0 \quad \forall x > a \quad (\forall x < a)$$

$$\text{khi đó nếu } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ thì } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Ví dụ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg x}{\frac{1}{x}} \text{ có dạng } \frac{0}{0}, \text{ xét :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1 + x^2} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = 1 \text{ Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctg x \right) = 1$$

Định lý 2:

Giả sử các hàm $f(x)$, $g(x)$ khả vi $\forall x > a$ ($\forall x < a$), thỏa mãn các điều kiện :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} f(x) = \infty ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} g(x) = \infty \text{ và } g'(x) \neq 0 \quad \forall x > a \quad (\forall x < a)$$

$$\text{khi đó nếu } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ thì } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Ví dụ

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \text{ có dạng } \frac{\infty}{\infty}, \text{ xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty, \text{ vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ (với $\forall \alpha > 0$) có dạng $\frac{\infty}{\infty}$,

xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0$, vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, (với $\forall \alpha > 0$)

Chú ý

- Trong các phát biểu trên A có thể là giá trị hữu hạn hoặc vô cực
- Quy tắc L'opital có thể được áp dụng liên tiếp nhiều lần

Ví dụ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ có dạng $\frac{0}{0}$ nên ta áp dụng L'opital :

xét $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$, đến đây lại có dạng $\frac{0}{0}$, tiếp tục áp dụng

L'opital ta được kết quả giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

- Quy tắc L'opital chỉ là **điều kiện đủ** để kết luận sự tồn tại của $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$

khi giới hạn này ở dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

(Tức là khi $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)'}{g(x)'}$ nhưng vẫn có thể $\exists \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$)

Chính vì vậy trong khi trình bày ta **phải xét** giới hạn $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)'}{g(x)'}$ nếu tồn tại thì

mới có kết luận sự tồn tại của $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)}$

Ví dụ:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$, nhưng nếu áp dụng L'opital $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$ không tồn tại.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$, nhưng nếu áp dụng L'opital sẽ có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \frac{-1}{x^2} \cos \frac{1}{x}}{\cos x} = 0 - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}, \text{ không tồn tại}$$

2.3.3. Các giới hạn dạng vô định : $0 \cdot \infty$; ∞^0 ; 1^∞ ...

- **Dạng $0 \cdot \infty$** : Biến đổi về một trong hai dạng $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ rồi áp dụng Lô-pi-tal

Ví dụ

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} \quad (\text{đưa về dạng } \frac{\infty}{\infty})$$

- **Dạng ∞^0 ; 1^∞ **

Để tính giới hạn các dạng này người ta áp dụng phương pháp loga hóa để đưa về dạng $0 \cdot \infty$ rồi tiếp tục đưa về một trong hai dạng $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$

Ví dụ :

$$\rightarrow \text{Tìm giới hạn sau : } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}. \text{ Đặt } A(x) = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x$$

khi đó giới hạn có dạng $\frac{\infty}{\infty}$, áp dụng quy tắc Lô-pi-tal : xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$$\text{vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x = 0 \Rightarrow \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0 \Rightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = e^0 = 1$$

- **Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$** - Giới hạn có dạng vô định 1^∞

Chú ý :

Dạng vô định 1^∞ ngoài phương pháp loga hóa ta có thể sử dụng giới hạn dạng

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = e \quad \text{hoặc} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Ví dụ :

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right\}^{\frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x} - 1 \right) \right]^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2x - 1}{x^2 + x} \right]^{\frac{x^2 + x}{2x - 1} \cdot \frac{(2x - 1) \cdot x}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1) \cdot x}{x^2}} = e^2$$

Chú ý :

Nên kết hợp việc thay thế các VCB tương đương với việc sử dụng quy tắc Lô-pi-tal để tìm giới hạn dạng vô định :

Ví dụ :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} ; \left(\frac{0}{0} \right) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{2^6 x^6} \frac{(2x)^6}{\sin^6 2x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{2^6 x^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - t}{2^6 t^2} \\ & \Rightarrow I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t - 1 - t)'}{2^6 (t^2)'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{2^6 \cdot 2t} = \frac{1}{2^7} \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Tính các đạo hàm sau :

$$\begin{aligned} 1) y &= \log_3(x^2 - \sin x) & 2) y &= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) & 3) y &= \ln(\ln x) \\ 4) y &= \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x} & 5) y &= ae^{\sqrt{x}} & 6) y &= e^x \ln \sin x \\ 7) y &= e^{\cos x} \sin x & 8) y &= \arccos(x^2) & 9) y &= \arcsin \sqrt{\sin x} \\ 10) y &= e^{\arctg x} & 11) y &= \frac{\arccos x}{x} & 12) y &= (\arccos x)^x \end{aligned}$$

2. Chứng minh hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

có đạo hàm tại mọi điểm và đạo hàm gián đoạn tại $x = 0$

3. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

Với giá trị nào của n thì hàm số $f(x)$

- a) Liên tục tại $x = 0$
- b) Có đạo hàm tại $x = 0$
- c) Có đạo hàm liên tục tại $x = 0$

4. Tính các giới hạn sau theo quy tắc Lô-pi-tal

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \tg x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2\arctg x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tg x} - e^x}{\tg x - x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x) + \tg \frac{\pi x}{2}}{\cot g(\pi x)}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\pi - 2\arctg x) \ln x]$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot gx - \frac{1}{x} \right)$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \ln(1-x)}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} [x(e^{1/x} - 1)]$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tg x)^{2x-\pi}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tg x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\tg \frac{\pi x}{2a}}$$

5. Hãy chứng minh giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos x}{x + \sin x}$ tồn tại nhưng không áp dụng được quy

tắc Lô-pi-tal (mặc dù giới hạn có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$)

CHƯƠNG 3

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

3.1. Tích phân bất định

3.1.1. Nguyên hàm.

3.1.1.1. Định nghĩa.

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên (a,b) . **Hàm số** $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Ví dụ:

$\sin x$ là nguyên hàm của $\cos x$ trên $\mathbb{R}$ vì $(\sin x)' = \cos x$.

$\sin x + 1$ là nguyên hàm của $\cos x$ trên $\mathbb{R}$.

$\sin x + c_0$ là nguyên hàm của $\cos x$ trên $\mathbb{R}$ (với c_0 là hằng số xác định)

$\frac{x^3}{3}$ là nguyên hàm của x^2 trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét :

- Nguyên hàm của một hàm số là một **hàm số xác định**
- Một hàm số có thể có nhiều các nguyên hàm khác nhau

3.1.1.2. Điều kiện tồn tại nguyên hàm.

Định lí : Nếu hàm $f(x)$ **liên tục** trên (a,b) thì $f(x)$ có nguyên hàm trong khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm $f(x)$ có nguyên hàm nhưng chưa chắc đã liên tục :

Ví dụ: Hàm $F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$ là nguyên hàm của $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} + 2x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0. \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

vì $F'(x) = f(x)$ tại mọi x nhưng $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

- Mọi hàm số sơ cấp đều tồn tại nguyên hàm trên tập xác định của nó.

Ví dụ: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ xác định trên $(-1, 1)$ và có một nguyên hàm là $F(x) = \arcsin x$.

3.1.1.3. Định lí tổng quát về nguyên hàm.

Định lí : Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên (a,b) . Khi đó trên (a,b) ta có:

- Với mọi hằng số C_0 xác định thì $F(x) + C_0$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$
- Mọi nguyên hàm khác của $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C_0$ với C_0 là hằng số nào đó.

Nhận xét:

- Nếu hàm số $f(x)$ có một nguyên hàm trong khoảng (a, b) thì nó sẽ có vô số nguyên hàm khác và các nguyên hàm này chỉ sai khác nhau 1 hằng số cộng
- Nếu $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm khác nhau của cùng một hàm $f(x)$ thì luôn tồn tại một hằng số C_0 để $F(x) = G(x) + C_0$
- Ta gọi $F(x) + C$ là biểu thức nguyên hàm tổng quát của $f(x)$

3.1.2. Tích phân bất định

3.1.2.1. Định nghĩa.

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng (a, b) thì **biểu thức** $F(x) + C$ (với C là hằng số tùy ý) được gọi là tích phân bất định của $f(x)$ trên khoảng (a, b) .

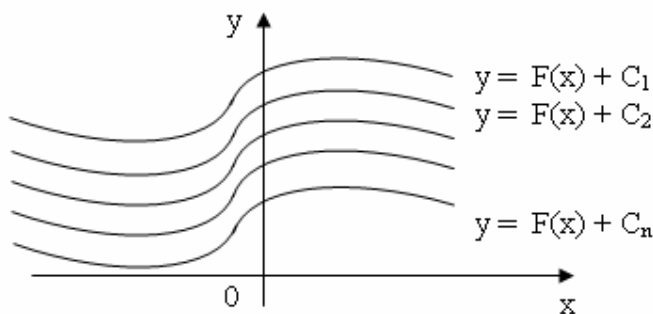
Kí hiệu: $F(x) + C = \int f(x)dx$.

Trong đó:	$\int$	dấu tích phân
	x	biến lấy tích phân
	$f(x)$	hàm dưới dấu tích phân
	$f(x)dx$	biểu thức dưới dấu tích phân

Ví dụ: $2x dx = x^2 + C$; $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin x + C$

Nhận xét :

- Khác với **nguyên hàm** (là một **hàm số xác định**) , tích phân bất định là một **biểu thức** , nó biểu thị một họ các hàm số là các nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân.
- Ứng với một giá trị xác định của hằng số C , ta được một hàm số xác định – là nguyên hàm của hàm dưới dấu tích phân. Đồ thị của các hàm số này trên hệ tọa độ Oxy là các đường cong “ đồng dạng ” – tịnh tiến theo trục oy như hình 3.1 . Do đó mỗi điểm $M(x,y)$ trên Oxy (mà $x \in (a, b)$) sẽ chỉ có một đường cong $y = F(x) + C_0$ đi qua .



Hình 3.1

3.1.2.2. Các tính chất của tích phân bất định

- $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$
- $\int d(F(x)) = F(x) + C$
- Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ đều có nguyên hàm. Khi đó với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$
- Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(u)du = F(u) + C$ với $u = u(x)$.

Ví dụ

*) Tính $I = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \int \cos(5x) d(5x) = \frac{1}{5} \sin 5x + C$ do có $\int \cos u du = \sin u + C$

*) Tính $\int \frac{2x}{x^2 + 3} dx = \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 1} = \ln|x^2 + 1| + C$ do có $\int \frac{du}{u+1} = \ln|u+1| + C$

3.1.2.3. Bảng các tích phân bất định cơ bản.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1).$	$\left \begin{array}{l} 6. \int \cos x dx = \sin x + C \\ 7. \int \sin x dx = -\cos x + C \\ 8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \\ 9. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \\ 10. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C \end{array} \right $
2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	
4. $\int e^x dx = e^x + C$	
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1).$	
11. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$	$\left \begin{array}{l} 16. \int \sqrt{x^2+b} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+b} + \frac{b}{2}\ln x+\sqrt{x^2+b} + C \\ 17. \int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C \\ 18. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left \frac{x-a}{x+a}\right + C \end{array} \right $
12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b}} dx = \ln x+\sqrt{x^2+b} + C$	
13. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$	
14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	

Ví dụ minh họa.

Áp dụng công thức cơ bản tính các tích phân sau:

$$\begin{aligned}
 1. \int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{\frac{7}{6}} - x^{\frac{1}{6}} \right) dx = \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} + C \\
 2. \int \frac{dx}{(x-a)^k} &= \int (x-a)^{-k} dx = \frac{1}{(1-k)} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \\
 3. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C \\
 4. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C
 \end{aligned}$$

3.1.3. Các phương pháp tính tích phân bất định.

3.1.3.1. Phương pháp đổi biến số.

- **Đổi biến** $t = \varphi(x)$ với $\varphi(x)$ là hàm khả vi liên tục.

Phương pháp : Giả sử ta cần tính $\int f(x) dx$

- Đổi biến $t = \varphi(x)$.
- Lấy vi phân $dt = \varphi'(x)dx$ và biểu diễn $f(x)dx$ theo t và dt . Giả sử $f(x)dx = g(t)dt$.
- Khi đó : $\int f(x) dx = \int g(t) dt$

Ví dụ 1:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad I &= \int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx \quad \text{đặt } x^3 + 1 = t \Rightarrow dt = 3x^2 dx \\
 I &= \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{9} t \sqrt{t} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 1)^3} + C \\
 (2) \quad I &= \int e^{x^2 - 1} x dx \quad \text{đặt } x^2 - 1 = t \Rightarrow 2x dx = dt \\
 I &= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2 - 1} + C \\
 (3) \quad I &= \int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + 1} \quad \text{đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cos x dx = -\sin 2x dx \\
 I &= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg t + C \\
 (4) \quad I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{đặt } t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \\
 I &= \int dt = t + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C
 \end{aligned}$$

Công thức áp dụng

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + b} \right| + C$$

$$(5). \text{ Tính } I = \int (1 - 5x^2)^{10} x^3 dx \quad (\text{HD: Đặt } t = 1 - 5x^2)$$

(6) Tính $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx$ (HD: Đặt $t = \sqrt[4]{1+e^x}$)

• **Đổi biến $x = \psi(t)$**

Phương pháp:

- Đặt $x = \psi(t)$ trong đó $\psi(t)$ là hàm đơn điệu, khả vi liên tục đối với t trên một khoảng (a, b) nào đó. Khi đó ta có hàm ngược $t = \omega(x)$
- Lấy vi phân hai vế $dx = \psi'(t)dt$.
- Khi đó $\int f(x)dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt = G(t) + C$
- Thay $t = \omega(x)$ ta được $\int f(x)dx = G(\omega(x)) + C$

Ví dụ:

(1) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$ ($a > 0$) Đặt $x = a.t$

(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$) Đặt $x = a.\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(3) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ Đặt $x = a.\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ Đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

hoặc $x = \frac{a}{\sin t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(5) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ Đặt $x = a.\tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(6) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ Đặt $x = a.\cos 2t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Nhận xét:

- Sau khi đổi biến ta phải quay trở lại biến ban đầu.
- Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa các căn thức $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì sử dụng các phép đổi biến tương ứng:

$$x = a.\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{hay } x = a.\cos t);$$

$$x = \frac{a}{\cos t}, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{a}{\sin t}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

- Nếu biểu thức dưới dấu tích phân chứa căn thức dạng $\sqrt{a^2 + x^2}$ thì có thể đổi biến dạng $x = a.\text{tgt}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ hoặc $x = a.\text{sh}(t)$; (hàm $\text{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$; $\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$; và luôn có $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$, $(\text{sh} t)' = \text{cht}$, $(\text{ch} t)' = \text{sht}$)
- Nếu hàm dưới dấu tích phân là $f(x) = R(e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx})$ thì có thể đổi biến $t = e^x$. (ở đây R là hàm hữu tỉ)

3.1.3.2. Phương pháp tích phân từng phần.

Nội dung: Giả sử $u(x)$, $v(x)$ là các hàm có đạo hàm liên tục thì ta có:

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

Phương pháp:

- Giả sử cần tính $\int f(x) dx$
- Chọn $u = u(x)$ và từ đó suy ra v . Tính du và biểu diễn $f(x)dx = u dv$.
- Áp dụng công thức tích phân từng phần

Một số trường hợp sử dụng phương pháp tích phân từng phần:

Nhóm 1: gồm những tích phân mà hàm dưới dấu tích phân có chứa thừa số là một trong các hàm sau: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $(\arctg x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln(\varphi(x))$

Khi đó ta chọn u là một trong các hàm số đã chỉ ra còn dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân.

Nhóm 2: gồm những tích phân mà hàm dưới dấu tích phân có dạng $P_n(x)\cos bx$ hoặc $P_n(x)\sin bx$, hoặc $P_n(x)e^{ax}$ trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n , a , b là hằng số.

Khi đó ta đặt $u = P_n(x)$ và dv là phần còn lại của biểu thức dưới dấu tích phân. Sau mỗi lần tích phân từng phần bậc đa thức sẽ giảm đi một đơn vị.

Nhóm 3: gồm những tích phân mà hàm số dưới dấu tích phân có dạng: $e^{ax}\sin bx$, $e^{ax}\cos bx$, $\sin(\ln x)$, $\cos(\ln x)$

Có thể chọn $u = e^{ax}$ hoặc $u = \sin ax$, $u = \cos bx$, $u = \sin(\ln x)$... Sau hai lần tích phân từng phần ta lại thu được tích phân ban đầu với hệ số nào đó. Đó là phương trình tuyến tính với ẩn là tích phân cần tìm.

Ví dụ 1: Tính $\int \sqrt{x} \cdot \arctg(\sqrt{x}) dx$

Giải: Tích phân đã cho thuộc nhóm 1.

Đặt $u = \arctg \sqrt{x}$, $dv = \sqrt{x} dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x+1} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$.

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int 1 - \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \arctg \sqrt{x} - \frac{1}{3} (x - \ln|1+x|) + C \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int \arccos^2 x dx$

Giải: Đặt $u = \arccos^2 x$, $dv = dx$. Khi đó: $du = -\frac{2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = x$. Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$I = x \cdot \arccos^2 x + 2 \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arccos^2 x + 2J$$

Để tính tích phân J ta đặt $u = \arccos x$, $dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. Khi đó:

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C \text{ và ta chỉ cần lấy } v = -\sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{Vậy } J = -\sqrt{1-x^2} \arccos x - \int dx = -\sqrt{1-x^2} \arccos x - x + C'$$

$$\text{Vậy } I = x \cdot \arccos^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arccos x - 2x + C'$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int x^2 \sin 3x dx$.

Giải: Tích phân đã cho thuộc nhóm 2.

Đặt $u = x^2$, $dv = \sin 3x dx$. Khi đó: $du = 2x dx$, $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$. Áp dụng công thức:

$$I = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} J.$$

Tính J . Đặt $u = x$, $dv = \cos 3x$. Khi đó: $du = dx$, $v = \frac{1}{3} \sin 3x$. Vậy

$$I = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx \right] = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int e^{2x} \cos 3x dx$

HD: Đây là tích phân thuộc nhóm 3. Đặt $u = e^{3x}$ hoặc $u = \cos 3x$

Ví dụ 5: Tính $I = \int \sin(\ln x) dx$ *HD: Đặt $u = \sin(\ln x)$ và $dv = dx$*

Ví dụ 6: a) Tính $I = \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$

b) Tính $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$; $n \in \mathbb{N}^*, a > 0$

c) Tính $\int \sqrt{x^2 + b} dx$

Hướng dẫn giải ví dụ 6

a) Tích phân này không thuộc bất cứ nhóm nào trong ba nhóm đã nêu. Tuy nhiên ta có thể tính bằng cách đặt $u = x$ và $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. Khi đó $du = dx$ và $v = -\cot x$.

b) Đặt $u(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}$, $dv = dx$. Khi đó:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \frac{1-2n}{2na^2} I_n$$

Áp dụng công thức truy hồi ta có thể tính I_3 qua I_2 , I_2 qua $I_1, \dots$ với $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

c) Đặt $u = \sqrt{x^2 + b}$ và $dv = dx$

Chú ý: Đối với các tích phân dạng: $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$, $\int e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x) dx$, ngoài phương pháp tích phân từng phần, ta có thể tính dựa theo nhận xét sau:

+) $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$ có dạng $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} + C$ trong đó $Q_n(x)$ là đa thức bậc n .

+) $\int e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x) dx$ có dạng

$$\int e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x) dx = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + C.$$

Để xác định các hệ số của đa thức $Q_n(x)$ và các hệ số A, B ta lấy **đạo hàm hai vế** của từng đẳng thức và cân bằng hệ số của đa thức, $\cos 3x$, và $\sin 3x$ ở cả hai vế.

Ví dụ 1: Tính $I = \int e^{-2x} \cos 3x dx$.

Giải: Ta có $I = \int e^{-2x} \cos 3x dx = e^{-2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) + C$

Đạo hàm hai vế theo x :

$$e^{-2x} \cos 3x = -2e^{-2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) + e^{-2x} (-3 \sin 3x + 3B \cos 3x) + C'$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = -2(A \cos 3x + B \sin 3x) + (-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)$$

$$\text{Cân bằng hệ số của } \cos 3x, \sin 3x \text{ ở hai vế, ta có hệ: } \begin{cases} -2A + 3B = 1 \\ -3A - 2B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-2}{13} \\ B = \frac{3}{13} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I = e^{-2x} \left(\frac{-2}{13} \cos 3x + \frac{3}{13} \sin 3x \right) + C$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int x^2 \cdot e^{3x} dx$

Giải: Ta có $I = \int x^2 \cdot e^{3x} dx = (ax^2 + bx + c)e^{3x} + C$. Đạo hàm hai vế, ta có:

$$\begin{aligned} I = x^2 e^{3x} &= [(ax^2 + bx + c) \cdot e^{3x}] + C' \\ &= e^{3x} [3ax^2 + (3b + 2a)x + (b + 3c)] \end{aligned}$$

Cân bằng hệ số hai vế ta có $a = 1/3$, $b = -2/9$, $c = 2/27$. Vậy

$$I = \int x^2 \cdot e^{3x} dx = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) e^{3x} + C$$

3.1.4. Tích phân một số hàm số sơ cấp.

3.1.4.1. Tích phân các hàm phân thức hữu tỉ.

- Định nghĩa 1:** Các phân thức hữu tỉ cơ bản là các phân thức có dạng

$$(1) \quad \frac{A}{(x+a)^k} \quad A, a : \text{const}, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Khi đó } \int \frac{A}{(x+a)^k} dx = \begin{cases} A \ln|x+a| + C & \text{khi } k=1 \\ \frac{A}{1-k} (x+a)^{1-k} + C & \text{khi } k \neq 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{A}{x^2 + px + q} \quad \text{với } p^2 - 4q < 0$$

$$\text{Khi đó ta viết } x^2 + px + q = (x + \alpha)^2 + \beta^2 \text{ với } \alpha = \frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$$

$$\text{Vậy } \int \frac{A}{x^2 + px + q} dx = A \int \frac{dx}{(x + \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{A}{\beta} \arctg \frac{x + \alpha}{\beta} + C$$

$$(3) \quad \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \text{ với } p^2 - 4q < 0$$

$$\text{Ta có : } \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{(2N - Mp)}{\sqrt{4q - p^2}} \arctg \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

$$(4) \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \text{ với } p^2 - 4q < 0, \quad k \in \mathbb{N}, (k > 1)$$

$$\text{Đối với } I_k = \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx \text{ thì ta đổi biến } t = x + \frac{p}{2}, \quad a = q - \frac{p^2}{4} \text{ khi đó tích}$$

$$\text{phân được đưa về dạng } I_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

$$\text{Sử dụng công thức truy hồi : } I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}$$

$$\text{Với } I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{t}{a} + C$$

Thông thường ta chỉ xét đối với $k = 2$.

• **Định nghĩa 2: Phân thức hữu tỉ chính quy (tối giản)**

Phân thức hữu tỉ $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ gọi là chính quy (tối giản) nếu $n < m$ trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n , $Q_m(x)$ là đa thức bậc m .

$$\text{Ví dụ: } \frac{x^2 + 3x + 7}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$$

Định lý: Mọi đa thức $Q_m(x)$ đều có thể phân tích ra tích các thừa số là các đa thức bậc nhất và bậc hai. (tức là các đa thức có dạng $x + a$ và $x^2 + px + q$; $p^2 - 4q < 0$)

Ví dụ:

$$\text{➤ } x^2 + 4x - 5 = (x - 1)(x + 5)$$

$$\text{➤ } x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x^2 + x - 4)$$

$$\text{➤ } 2x^3 - 3x^2 + x + 6 = 2(x + 1)\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right)$$

Định lý: Mọi phân thức hữu tỉ chính quy đều phân tích được thành tổng hữu hạn các phân thức hữu tỉ cơ bản

Do đó việc tính tích phân các phân thức chính quy trở về tính tích phân các phân thức đơn giản dạng (1), (2), (3), (4)

Ví dụ:

$$\begin{aligned} &\text{➤ } \int \frac{2x+5}{(x+1)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx \\ &\text{➤ } \int \frac{(2x^2+x+1)}{(x-1)^2(x-2)} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{B}{(x-1)^2} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx \\ &\text{➤ } \int \frac{(2x+1)}{(x-1)(x^2+1)} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1} dx \\ &\text{➤ } \int \frac{(2x-3)}{(x-1)(x^2+1)^2} dx = \int \frac{A}{(x-1)} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1} dx + \int \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

Các hệ số A,B,C.... được xác định bằng phương pháp cân bằng hệ số các lũy thừa hai vế.

• Phân thức hữu tỷ

Là phân thức có dạng $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ Trong đó: $P_n(x)$ là đa thức bậc n, $Q_n(x)$ đa thức bậc m

+ Nếu $n < m \Rightarrow$ là phân thức chính quy

+ Nếu $n > m \Rightarrow$ Thực hiện phép chia đa thức ta có : $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = E(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$, với $k < m$

Như vậy việc tính tích phân các phân thức hữu tỷ trở về việc tính tích phân các phân thức đơn giản.

3.1.4.2. Tích phân một số hàm vô tỉ.

• **Tích phân dạng** $\int R(x, \sqrt[k_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \sqrt[k_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}}, \dots, \sqrt[k_p]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_p}}) dx,$

trong đó $k_i \in \mathbb{N}^*, m_i \in \mathbb{Z}$.

Phương pháp: Gọi $k = \text{BCNN}(k_1, k_2, \dots, k_p)$ đặt $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Ví dụ:

(1) $\int x^3 \sqrt{1-x} dx$ đặt $t = \sqrt{1-x}$

(2) $\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x} dx$ đặt $t = \sqrt{x-1}$

$$(3) \quad \int \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt[3]{x-1}} dx \quad \text{đặt } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$(4) \quad \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x} + 1)x} dx \quad \text{đặt } t = \sqrt[6]{x}$$

• **Tích phân dạng** $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ hoặc $\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$

Phương pháp: Hàm $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ có thể đưa về 1 trong 2 dạng sau:

$$(1) \quad \sqrt{u^2 + \beta} \text{ khi } a > 0.$$

$$(2) \quad \sqrt{\alpha^2 - u^2} \text{ khi } a < 0$$

Khi đó hai tích phân trên trở về một trong 4 dạng tích phân sau

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \beta}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \beta} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\alpha} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 + \beta} = \frac{x\sqrt{x^2 + \beta}}{2} + \frac{\beta}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + \beta}) + C$$

$$\int \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \arcsin \frac{x}{\alpha} + C$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 12x + 5}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{[(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2] + 5 - 3^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+3)}{\sqrt{[2x+3]^2 - 4}} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| 2x+3 + \sqrt{4x^2 + 12x + 5} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{8 - 4x^2 - 4x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1} + 8} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{\sqrt{3^2 - [2x+1]^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x+1}{3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \int \sqrt{9x^2 + 12x + 5} dx &= \int \sqrt{[(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2] - 2^2 + 5} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{[3x+2]^2 + 1} d(3x+2) \\ &= \\ &= \frac{1}{3} \frac{3x+2}{2} \sqrt{[3x+2]^2 + 1} + \frac{1}{3} \frac{1}{2} \ln \left| 3x+2 + \sqrt{[3x+2]^2 + 1} \right| + C = \\ &= \frac{3x+2}{6} \sqrt{9x^2 + 12x + 5} + \frac{1}{6} \ln \left| 3x+2 + \sqrt{9x^2 + 12x + 5} \right| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \int \sqrt{7-4x^2-6x} dx &= \int \sqrt{-\left[(2x)^2 + 2.2x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right] + \frac{9}{4} + 7} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{37}{4} - \left[2x + \frac{3}{2}\right]^2} d\left(2x + \frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left[2x + \frac{3}{2}\right] \sqrt{\frac{37}{4} - \left[2x + \frac{3}{2}\right]^2} + \frac{37}{2} \arcsin \frac{\left[2x + \frac{3}{2}\right]}{\frac{\sqrt{37}}{2}} + C \\
 &= \frac{4x+3}{8} \sqrt{7-4x^2-6x} + \frac{37}{8} \arcsin \frac{4x+3}{\sqrt{37}} + C
 \end{aligned}$$

- **Tích phân dạng** $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $P_n(x)$ là đa thức bậc $n \geq 1$.

Phương pháp: Để tính tích phân trên ta có thể sử dụng công thức:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (*)$$

Trong đó Q_{n-1} là đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $P_n(x)$ một bậc và λ là hằng số chưa biết.

Để xác định các hệ số của Q_{n-1} , và λ ta thực hiện như sau:

➤ Lấy đạo hàm hai vế của (*), ta có:

$$\frac{P_n'(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}'(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x) \cdot \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$\text{Hay } P_n(x) = Q_{n-1}'(x) \cdot (ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x) \cdot \left(ax + \frac{b}{2}\right) + \lambda \quad (**)$$

➤ Cân bằng các hệ số của x ở hai vế ta tìm được các hệ số của đa thức Q_{n-1} và λ . Bài toán trở về tính tích phân **dạng 2.2**

Ví dụ:

$$1) \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx = a \cdot \sqrt{x^2+2x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$2) \int \frac{12x^3+16x^2+9x+2}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx = (ax^2+bx+c) \sqrt{4x^2+4x+2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+2}}$$

- **Tích phân dạng** $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$

Phương pháp: Đặt $x - \alpha = \frac{1}{t}$ ta đưa tích phân trên về **dạng 2.3**.

Ví dụ: Tính 1) $\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{5x^2+2x+1}}$
 2) $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$

• **Tích phân dạng I** $= \int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c} dx$

Phương pháp:

+ **Ta có** $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

+ **Biến đổi:** $Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b-b)+B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)$

+ **Khi đó I** $= \frac{A}{2a} \int \sqrt{ax^2+bx+c} \cdot (2ax+b) dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$
 $= \frac{A}{2a} \cdot \frac{2}{3} \cdot (ax^2+bx+c)^{3/2} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$

Ví dụ: Tính các tích phân sau

1) $\int (5x+1)\sqrt{4x^2+4x+5} dx$

2) $\int (3x-2)\sqrt{-4x^2+4x} dx$

3.1.4.3. Tích phân các hàm lượng giác dạng: $\int R(\sin x, \cos x) dx$

• **Phương pháp chung**

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2+1}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ví dụ:

(1) $\int \frac{dx}{\sin x}$ đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2+1}$

(2) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$ đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2+1}$

(3) $\int \frac{\sin x + \cos x + 2}{2\sin x + \cos x + 1} dx$

HD: Biến đổi theo dạng: $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$

$$\text{Đặt } \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} = A + \frac{B(a_2 \cos x - b_2 \sin x)}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} + \frac{C}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$$

Trong đó A, B, C xác định theo phương pháp cân bằng hệ số hai vế.

• **Một số trường hợp đặc biệt**

➤ $R(\sin x, \cos x)$ là hàm lẻ đối với $\sin x$. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Đặt $t = \cos x$

Ví dụ:

$$(1) \quad \int \sin x \cdot \cos^2 x dx = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$$(2) \quad \int \frac{\cos^2 x + 1}{\sin x} dx$$

➤ $R(\sin x, \cos x)$ là hàm lẻ đối với $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

Đặt $t = \sin x$

Ví dụ:

$$1) \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$$

$$2) \quad \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + 4} dx \quad \text{đặt } t = \sin^2 x + 4 > 0 \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx$$

➤ $R(\sin x, \cos x)$ là hàm chẵn đối với $\sin x$ và $\cos x$ tức $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Đặt $t = \tan x$ (hoặc $t = \cot x$)

Ví dụ:

$$1) \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

$$2) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$$

➤ $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cdot \cos^n x$ trong đó m, n chẵn và $m, n > 0$

Ta dùng công thức hạ bậc

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \quad \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Ví dụ:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

➤ **Dạng** $\int \sin ax \cdot \cos b x dx = \frac{1}{2} \int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] dx$

$$\int \sin ax \cdot \sin b x dx = \frac{1}{2} \int [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] dx$$

$$\int \cos ax \cdot \cos b x dx = \frac{1}{2} \int [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x] dx$$

Ta dùng công thức biến đổi tích thành tổng

BÀI TẬP : PHÂN TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Bài 1. Dùng bảng tích phân bất định cơ bản tính các tích phân sau:

$$1. \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$$

$$2. \int (a^x + b^x)^2 dx$$

$$3. \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx$$

$$4. \int \frac{mdx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$$

$$5. \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (x > 0)$$

$$7. \int \frac{dx}{x^4-1} \quad (\text{ĐS: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C).$$

$$8. \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx \quad (\text{ĐS: } \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C).$$

$$9. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(\text{ĐS: } \operatorname{arcsin} x + \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C)$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^4-1}} dx$$

$$(\text{ĐS: } \ln |x + \sqrt{x^2-1}| - \ln |x + \sqrt{x^2+1}| + C)$$

$$11. \int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx \quad (\text{ĐS: } \ln |x| - \frac{1}{4x^4} + C)$$

$$12. \int \frac{2^{3x}-1}{e^x-1} dx \quad (\text{ĐS: } \frac{e^{2x}}{2} + e^x + 1 + C)$$

$$13. \int \frac{2^{2x}-1}{\sqrt{2^x}} dx \quad (\text{ĐS: } \frac{2}{\ln 2} \left[\frac{2^{\frac{3x}{2}}}{3} + 2^{\frac{-x}{2}} \right] + C)$$

$$14. \int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)} \quad (\text{ĐS: } \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{\sqrt{2}} + C)$$

$$15. \int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx \quad (\text{ĐS: } \frac{3}{5} \ln^{\frac{5}{3}} x)$$

$$16. \int \frac{e^x + e^{2x}}{1-e^x} dx \quad (\text{ĐS: } -e^x - 2 \ln |e^x - 1| + C)$$

$$17. \int \frac{e^x dx}{1+e^x} \quad (\text{ĐS: } \ln(1+e^x) + C).$$

$$24. \int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(\text{ĐS: } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C)$$

$$18. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \quad (\text{ĐS: } \frac{1}{2} x - \frac{\sin x}{2} + C)$$

$$19. \int \cot g^2 x dx \quad (\text{ĐS: } -x - \cot g x + C).$$

$$25. \int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3} dx \quad (\text{ĐS: } -\frac{1}{2(x+\sin x)^2} + C)$$

$$20. \int \sqrt{1+\sin 2x} dx, x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(\text{ĐS: } -\cos x + \sin x + C)$$

$$26. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}} dx \quad (\text{ĐS: } -\frac{1}{2} \sqrt{1-4\sin^2 x} + C)$$

$$21. \int e^{\cos x} \sin x dx \quad (\text{ĐS: } -e^{\cos x} + C)$$

$$27. \int \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\sin^2 x}} dx$$

$$22. \int e^x \cdot \cos e^x dx \quad (\text{ĐS: } \sin e^x + C)$$

$$(\text{ĐS: } -\ln |\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}| + C)$$

$$23. \int \frac{1}{1+\cos x} dx \quad (\text{ĐS: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C)$$

Bài 2. Sử dụng phương pháp đổi biến số hãy tính các tích phân sau

1. $\int \sin(2-3x)dx$	15. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}} dx \quad (I = \frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3} + C),$
2. $\int x^3(1-2x^4)^3 dx$	Chỉ dẫn: Đặt $e^x + 1 = t^4$.
3. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$	16. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x \ln x} dx \quad (I = 2\sqrt{1+\ln x} - \ln \ln x + 2\ln \sqrt{1+\ln x}-1 + C)$
4. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}$	17. $\int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x} \quad (I = (\arctg \sqrt{x})^2 + C).$
5. $\int \frac{\sin 4x dx}{\cos^2 2x + 4}$	18. $\int \sqrt{e^{3x} + e^{2x}} dx \quad (I = \frac{2}{3}(e^x + 1)^{3/2} + C)$
6. $\int \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx$	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} \quad (I = 2\arctg \sqrt{e^x-1} + C)$
7. $\int tg^3 x dx$	20. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx \quad (I = \frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C)$
8. $\int x^3 \sqrt{a-x^2} dx$	
9. $\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3} dx$	22. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} \quad (I = \frac{1}{a^2} \sin\left(\arctg \frac{x}{a}\right) + C)$
10. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \frac{dx}{x^2}$	HD: Đặt $x = atgt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}; (x = \sin^2 t)$	23. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} \quad (I = -\frac{1}{\cos t} + C, t = \arcsin \frac{1}{x})$
12. $\int \frac{(x+1)dx}{x(1+xe^x)}; (t = 1+xe^x)$	Đặt $x = \frac{1}{\sin t}, -\frac{\pi}{2} < t < 0, 0 < t < \frac{\pi}{2}$
13. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$	24. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C)$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$	HD: Đặt $x = a \sin t$
15. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}, (\text{Đặt } x = a \cdot tgt)$	25. $\int x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx \quad \text{HD: Đặt } x = a \sin t$
21. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}, (I = tg(\arcsin x) + C)$	26. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx,$
HD: Đặt $x = \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	HD: Đặt $x = a \cdot \cos 2t$ hoặc $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$
	27. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}, \text{ HD: Đặt } t = \sqrt{2-x^2}.$

Bài 3. Dùng phương pháp tích phân từng phần tính các tích phân sau:

$$\begin{array}{llll}
 1) \int x^2 \arctg x dx & 2) \int (x^2 + 2x + 3) \cos 3x dx & 3) \int x^3 \ln^2 x dx & 4) \int (x^3 + 2x^2 + 1) e^{-2x} dx \\
 5) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx & 6) \int e^{-2x} (\cos 3x - \sin 4x) dx & 7) \int \sin \sqrt[3]{x} dx & 8) \int \frac{\arctg x}{x^2(1+x^2)} dx \\
 9) \int \frac{x e^{\arctg x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx & 10) \int x^2 \sin(\ln x) dx & 11) \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx & 12) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx
 \end{array}$$

Bài 4. Tính tích phân các hàm hữu tỉ sau:

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{2x^2 + x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} dx & 2) \int \frac{5x^3 - 17x^2 + 18x - 5}{(x-1)^3(x-2)} dx & 3) \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx \\
 4) \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)^2} & 5) \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2} & 6) \int \frac{(3x+1) dx}{x(x^2+1)^2} \\
 7) \int \frac{3x^2 + 5x + 12}{(x^2+3)(x^2+1)} dx & 8) \int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} dx &
 \end{array}$$

Bài 5. Tính tích phân các hàm lượng giác sau

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{dx}{3 + 5 \sin x + 3 \cos x} & 2) \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 4 \sin x \cos x} & 3) \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1} dx \\
 4) \int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx & 5) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5} & 6) \int \frac{dx}{(3 + \cos 5x) \sin 5x}
 \end{array}$$

Bài 6. Tính tích phân các hàm vô tỷ

$$\begin{array}{lll}
 1) \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx & 2) \int \frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx & 3) \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} \\
 4) \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x} & 5) \int \frac{dx}{(1-x^2)} & 6) \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}} \\
 7) \int \frac{5x+1}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx & 8) \int \frac{-4x+2}{\sqrt{-9x^2+12x-3}} dx & 9) \int (-3x+7) \sqrt{x^2+4x+5} dx \\
 10) \int (3x+4) \sqrt{-4x^2+4x} dx & 11) \int \frac{3x^3+2x+1}{\sqrt{x^2+4x+13}} dx & 12) \int \frac{-4x^3+5x^2+3x+1}{\sqrt{-4x^2+4x}} dx \\
 13) \int \frac{dx}{(x-2) \sqrt{-x^2+4x-3}} & 14) \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+x+1}} &
 \end{array}$$

3.2 Tích phân xác định

3.2.1. Định nghĩa tích phân xác định

3.2.1.1. Bài toán diện tích hình thang cong

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[a, b]$. Giả sử $y = f(x)$ không âm trên $[a, b]$. Xét hình thang cong $AabB$ là hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[a, b]$, các đường thẳng $x = a$, $x = b$ và trục ox .

Ta xây dựng công thức tính diện tích hình thang cong đó.

Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm chia:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ lấy điểm tùy ý $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $i = \overline{1, n}$

Diện tích của hình chữ nhật có hai cạnh: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ và $f(\xi_i)$ với $i = \overline{1, n}$ là $S_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

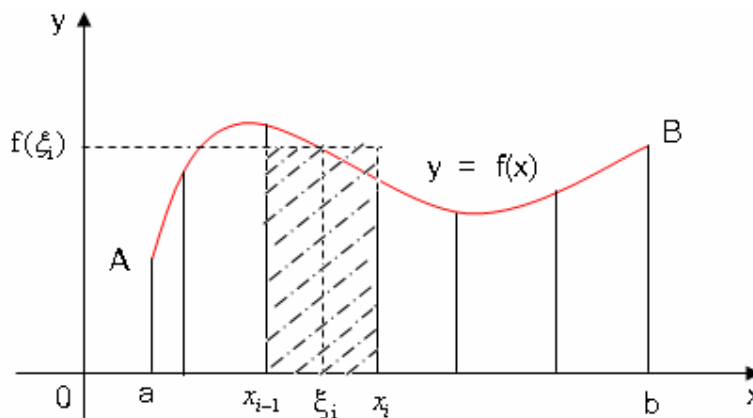
Khi đó diện tích S của hình thang cong xấp xỉ bằng tổng diện tích các hình chữ nhật S_i .

$$S \approx \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Nếu số điểm chia $n \rightarrow +\infty$ sao cho $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ thì tổng $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ dần tới diện tích

S - diện tích hình thang cong.

$$\text{Vậy } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$



3.2.1.2. Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a, b]$.

❖ Chia $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ tùy ý bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

❖ Gọi tên và độ dài đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ là Δx_i

❖ Trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{i-1}, x_i]$ lấy điểm tùy ý $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = \overline{1, n}$

Mỗi phép chia đoạn $[a, b]$ và cách lấy điểm ξ_i như vậy được gọi là phép phân hoạch đoạn $[a, b]$

❖ Lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ - I_n được gọi là tổng tích phân thứ n của $f(x)$

Nếu $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max \Delta x_i \rightarrow 0)}} I_n = I$ và không phụ thuộc phép phân hoạch $[a, b]$ thì I được gọi là **tích**

phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a, b]$, ký hiệu là: $\int_a^b f(x) dx = I$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max \Delta x_i \rightarrow 0)}} I_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\max \Delta x_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Khi đó hàm $f(x)$ là hàm **khả tích** trên $[a, b]$.

$[a, b]$: Khoảng lấy tích phân.

a : cận dưới.

b : cận trên.

x : biến lấy tích phân.

Định lý: (Điều kiện khả tích)

Mọi hàm số **liên tục trên đoạn $[a, b]$** đều khả tích trên đó

Ví dụ: Dùng định nghĩa tích phân tính $\int_1^2 x dx$.

Giải:

Có $f(x) = x$ liên tục $[1, 2] \Rightarrow f(x) = x$ khả tích trên $[1, 2]$. Vậy tồn tại $\int_1^2 x dx$

Chia đều $[1, 2]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia:

$$x_i = 1 + \frac{i}{n} \quad i = \overline{0, n} \Rightarrow \Delta x_i = x_{i-1} - x_i = \frac{1}{n}$$

Chọn $\xi_i \equiv x_i$

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)\right] = 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2}$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n-1}{2n}\right) = \frac{3}{2} \quad \text{Vậy } \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}$$

Ví dụ Tính $I = \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

Giải : do hàm $\frac{1}{x^2}$ liên tục trên $[1, 3] \Rightarrow$ khả tích trên $[1, 3] \Rightarrow$ tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \Rightarrow$ chọn một cách chia đoạn $[1, 3]$ và cách lấy các điểm ξ_i thuận lợi :

- Chia đều $[1, 3]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm $x_i = 1 + \frac{2i}{n} \Rightarrow \Delta x_i = \frac{2}{n}$
- Chọn các điểm $\xi_i = \sqrt{x_{i-1} \cdot x_i} \Rightarrow \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
- Lập tổng $I_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\xi_i^2} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i-1} x_i} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right] \frac{1}{x_i - x_{i-1}}$

$$I_n = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right] = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}$$

$$I_n = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{2}{3} \quad \text{vậy} \quad \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{3}$$

Chú ý:

- Nếu hàm $f(x)$ xác định trên $[a, b]$ và có một số hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trong $[a, b]$ thì $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$.
- Các hàm số sơ cấp đều khả tích trên mọi đoạn con thuộc miền xác định của nó.

3.2.1.3. Tính chất của tích phân xác định.

$$1. \int_a^b f(x) dx = 0,$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$$

$$3. \text{ Với bất kì } c \in (a, b) \text{ ta có: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$4. \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$5. \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \text{ với } \alpha, \beta \text{ là các hằng số, } f(x), g(x) \text{ là các}$$

hàm khả tích trên $[a, b]$.

6. Giả sử $f(x), g(x)$ là những hàm khả tích trên $[a, b]$. Nếu $f(x) \leq g(x)$ với $\forall x \in [a, b]$

$$\text{thì } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

7. Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. $\min_{[a, b]} f(x) = m, \quad \max_{[a, b]} f(x) = M$. Khi đó:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

8. (Định lý giá trị trung bình).

Giả sử $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó tồn tại ít nhất 1 điểm $\xi \in [a, b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

3.2.2. Các phương pháp tính tích phân xác định

3.2.2.1. Tích phân xác định với cận trên thay đổi

Định lý: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì hàm $\phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ sẽ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$ (tức là $\phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$)

3.2.2.2. Công thức Newton- Leibnit.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên

$$[a, b] \text{ thì: } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x) \Big|_a^b$$

Chú ý Điều kiện về tính liên tục của $f(x)$ không thể thiếu trong khi áp dụng công thức Newton- Leibnit

Ví dụ:

$$1. \text{ Tính } \int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2. \text{ Tính } \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$3. \text{ Tính } \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx = -\frac{1}{26}(2-x^2)^{13} \Big|_0^1 = -\frac{1}{26} + \frac{2}{26} = \frac{1}{26}$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1} = \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{2} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\ln 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

$$5. \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 1) \cdot e^{-3x} dx$$

Nhận xét:

+ Nếu $f(x)$ có hữu hạn điểm gián đoạn loại 1 trong đoạn lấy tích phân, khi đó áp dụng tính chất thứ 3 ta dẫn về tổng của các tích phân trên các đoạn nhỏ mà trên các đoạn đó hàm dưới dấu tích phân liên tục, nên áp dụng công thức Newton – Leibnitz cho từng tích phân.

+ Cần *phân biệt hai khái niệm*: tích phân bất định là một *họ hàm số*, còn tích phân xác định là một *giá trị xác định*.

3.2.2.3. Phương pháp tích phân từng phần.

Công thức: Giả sử hàm $u = u(x)$, $v = v(x)$ là hai hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

$$1. \int_{1/e}^e |\ln x| dx; \quad 2. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx; \quad 3. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx; \quad 4. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$$

3.2.2.4 Phương pháp đổi biến số.

- **Phương pháp đổi biến $t = \varphi(x)$**

trong đó $\varphi(x)$ thoả mãn là hàm *khả vi liên tục*, **đơn điệu** trên $[a, b]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$$

Ví dụ.

$$1. \text{ Tính: } \int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx. \quad \text{Đặt } t = \sqrt[3]{1-x}$$

$$2. \text{ Tính } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3 + \cos x} dx. \quad \text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}$$

$$3. \text{ Tính } \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$4. \text{ Tính } \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx \quad \text{Đặt } t = \sqrt{1+3x^8}$$

$$5. \text{ Tính } \int_0^{3/4} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \quad \text{Đặt } t = \frac{1}{x+1}.$$

Chú ý :

Điều kiện **đơn điệu** của hàm $f(x)$ là không thể thiếu trong phương pháp đổi biến $t = \varphi(x)$

Ví dụ : Tính $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx$

Nếu đặt $t = \cos x$ (không thỏa mãn tính đơn điệu trên $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ và khi đó

$$I = - \int_{1/\sqrt{2}}^0 t \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{3} \sqrt{(1-t^2)^3} \Big|_{1/\sqrt{2}}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad (\text{kết quả không đúng})$$

Nếu đặt $t = \sin x$ - thỏa mãn tính đơn điệu trên $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ khi đó

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx = \int_{-1/\sqrt{2}}^1 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{-1/\sqrt{2}}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad (\text{kết quả đúng})$$

• **Phương pháp đổi biến $x = \psi(t)$**

Xét phép đổi biến $x = \psi(t)$ trong đó $\psi(t)$ là hàm thỏa mãn các điều kiện

+ $\psi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ với $\begin{cases} \psi(\alpha) = a \\ \psi(\beta) = b \end{cases}$

+ Khi t biến thiên trên $[\alpha, \beta]$ thì x biến thiên trên $[a, b]$.

$$\text{Khi đó: } \int_a^b f(x) dx = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(\psi(t)) \psi'(t) dt$$

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau :

$$1) \int_0^4 \sqrt{4-x^2} dx \quad . \text{ Đổi biến } x = 2\sin t \quad \quad 2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^{3/2}}} \quad . \text{ Đặt } x = \tan t$$

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng :

a) Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và nếu :

- $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

- $f(x)$ là hàm số lẻ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

b) Nếu $f(x)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ $T > 0$ thì $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

3.2.3. Ứng dụng của tích phân xác định.

3.2.3.1. Tính diện tích hình phẳng.

*) Diện tích hình thang cong.

Hình thang cong giới hạn bởi các đường

$$x = a, x = b, (a < b)$$

$$y = 0, y = f(x) \text{ với } f(x) \text{ là hàm liên tục trên } [a, b]$$

khi đó hình thang cong có diện tích tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

* Diện tích hình phẳng:

- Hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$x = a, x = b \text{ với } a < b$$

$$y = f_1(x); y = f_2(x) \text{ với } f_1(x), f_2(x) \text{ là những hàm liên tục trên } [a, b]$$

khi đó hình phẳng sẽ có diện tích S được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx$$

Ví dụ: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$1) \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 4 \\ y = 3x \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 0 \\ y = 2x - x^2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y^2 = 8x & (1) \\ x^2 = 4y & (2) \end{cases}$$

$$4) y = |\ln x|, y = 0, x = \frac{1}{e}, x = e$$

$$5) y = -3x^2 + 12x - 9, y = 2x^2 - 8x + 6$$

Giải 1):

Xác định hoành độ giao điểm hai đường cong trên chính là các giá trị cận trên, dưới trong công thức tính diện tích hình phẳng.

$$\text{Có } 2x^2 - 3x + 4 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ và } x_2 = 2 \Rightarrow \text{diện tích hình phẳng là}$$

$$S = \int_1^2 |2x^2 - 6x + 4| dx = - \int_1^2 (2x^2 - 6x + 4) dx$$

$$= - \left[\frac{2}{3} x^3 - 3x^2 + 4x \right]_1^2$$

Giải 3)

Xác định tọa độ giao điểm hai đường cong trên qua việc giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^2 = 8x & (1) \\ x^2 = 4y & (2) \end{cases} \Rightarrow \text{lấy p.t (2) thay vào p.t. (1)} \Rightarrow$$

$$x^4 = 16 \cdot 8x \Rightarrow \text{các hoành độ giao điểm } x_1 = 0 \text{ và } x_2 = 4\sqrt[3]{2}$$

$$\Rightarrow \text{có các giao điểm } M_1(0, 0) \text{ và } M_2(4\sqrt[3]{2}, 4\sqrt[3]{4})$$

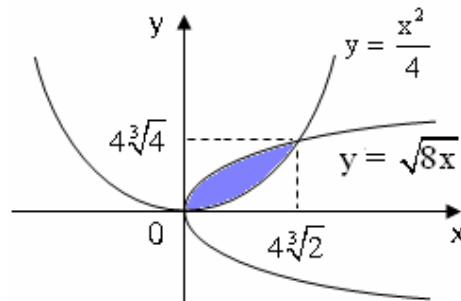
$$\text{Từ hệ } \begin{cases} y^2 = 8x & (1) \\ x^2 = 4y & (2) \end{cases}$$

mà biến x trong khoảng $[0, 4\sqrt[3]{2}]$, và biến y trong khoảng $[0, 4\sqrt[3]{4}]$

$$\text{do đó từ } y^2 = 8x \Rightarrow y = \sqrt{8x} \text{ và } x^2 = 4y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

áp dụng công thức tính diện tích của hình phẳng :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{4\sqrt[3]{2}} \left| \sqrt{8x} - \frac{x^2}{4} \right| dx = \int_0^{4\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt{8x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[\frac{2\sqrt{8}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12} x^3 \right]_0^{4\sqrt[3]{2}} = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{(4\sqrt[3]{2})^3} - \frac{1}{12} (4\sqrt[3]{2})^3 = \frac{32\sqrt{2}}{3} \left(2^{\frac{3}{4}} - 1 \right) \text{ (đvdt)} \end{aligned}$$



Chú ý:

Có thể tính diện tích hình phẳng lấy tích phân theo biến y :

p.t đường cong (1) $x = y^2 / 8$, do x trong khoảng $[0, 4\sqrt[3]{2}]$ nên p. t đường cong

(2) là $x = 2\sqrt{y}$

$$\Rightarrow \text{công thức tính d.t hình phẳng : } S = \int_0^{4\sqrt[3]{4}} \left| \frac{y^2}{8} - 2\sqrt{y} \right| dy$$

3.2.3.2. Thể tích vật thể tròn xoay

- Một vật thể tròn xoay tạo ra khi quay xung quanh trục ox hình thang cong được giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$; ($a < b$); $y = f(x)$, $y = 0$
- Khi đó thể tích của nó được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- Tương tự:

Một vật thể tròn xoay tạo ra khi quay xung quanh trục oy một hình thang cong được giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = 0$, $y = a$, $y = b$ ($a < b$)

Khi đó thể tích của nó được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b g^2(y) dy.$$

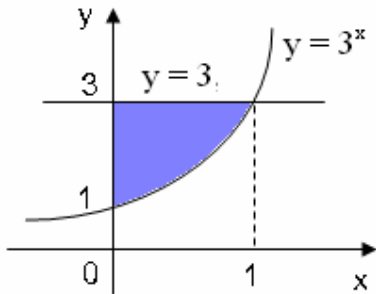
- Vật thể tròn xoay được tạo bởi khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ($0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$), $x = a$, $x = b$ được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$$

Ví dụ 1:

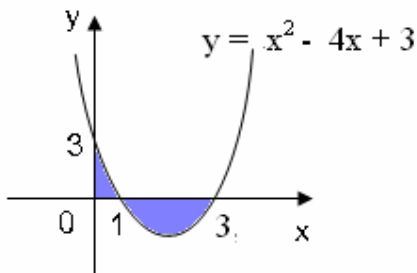
Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay quanh Ox hình phẳng giới hạn bởi:

- $y = 3^x$, $y = 3$, $x = 0$



Có thể tích của vật tròn xoay : $V = \pi \int_0^1 (3^2 - 3^{2x}) dx$

- $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 0$, $x = 0$.



Có thể tích của vật tròn xoay :

$$V = \pi \int_0^3 (x^2 - 4x + 3)^2 dx$$

- $y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 0.$
- $y = 2x - x^2, \quad y = 0$
- $y = x^2; \quad y = 12 - 4x; \quad y = 0; \quad x \geq 0$
- $y = 9 - x^2; \quad 9x + 2y - 18 = 0$

3.2.3.3. Độ dài đường cong

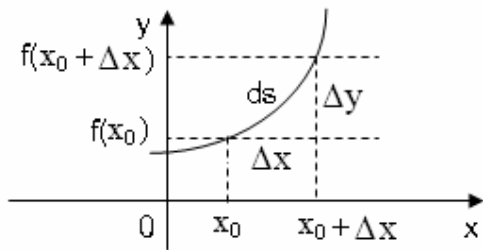
- Giả sử cung đường cong AB có phương trình $y = f(x)$ với $f(x)$ liên tục và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$. Khi đó độ dài cung AB là:

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

- Giả sử cung đường cong AB có phương trình dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta].$

Khi đó độ dài đường cong AB là: $L_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$

Chú ý: Có vi phân cung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$



$$\begin{aligned} \text{Có } \Delta s &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Rightarrow \\ ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

do vậy

➤ Nếu đường cong cho bởi phương trình tham số $\Rightarrow$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

➤ Nếu đường cong cho bởi phương trình: $y = f(x)$ - (khi đó coi như dạng tham số :

$$x = t; y = f(t)) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Do đó độ dài của cung AB là $L_{AB} = \int_{AB} ds \Rightarrow L_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$

Ví dụ: Tính độ dài dây cung cong của đường cong sinh bởi các đường:

a) $y = e^x; \quad 0 \leq x \leq 1.$

b) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$

c) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y, \quad 1 \leq y \leq e$

d) $x = a \cos^3 t; \quad y = \sin^3 t, \quad a > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

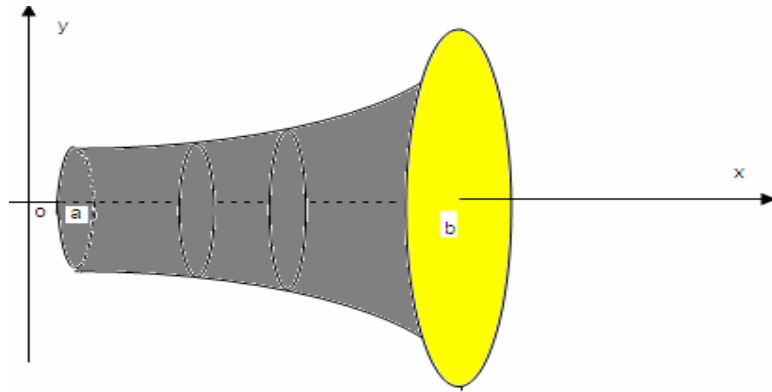
3.2.3.4. Diện tích xung quanh của mặt tròn xoay.

- Xét mặt tròn xoay sinh ra do cung đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ quay xung quanh trục Ox trong đó $f(x)$ là h/s liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó diện tích xung quanh của mặt tròn xoay là:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

- Tương tự, diện tích mặt tròn xoay sinh ra do cung đồ thị hàm số $x = \varphi(y)$, $y \in [c, d]$ quay quanh trục Oy là:

$$S = 2\pi \int_a^b |\varphi(y)| \sqrt{1 + \varphi'^2(y)} dy$$



Ví dụ 1: Tính diện tích xung quanh của vật thể tròn xoay sinh bởi đường

$y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ khi quay quanh trục Ox .

Giải

$$\text{Có } V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2} \quad (\text{đvtt})$$

Ví dụ 2

Tính diện tích xung quanh của vật thể tròn xoay sinh bởi đường $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $1 \leq y \leq e$

khi quay quanh Oy

Giải

$$\begin{aligned} \text{Có } V &= \pi \int_1^e \left[\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y \right]^2 dy = \pi \int_1^e \left[\frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{4}\ln^2 y - \frac{1}{4}y^2 \ln y \right] dy = \\ &= \pi \left[\frac{y^5}{80} + \frac{y \ln^2 y}{4} - \left(\frac{y \ln y}{2} - \frac{y}{2} \right) - \left(\frac{y^3 \ln y}{12} - \frac{y^3}{36} \right) \right] \Bigg|_1^e = \pi \left[\frac{e^5 - 1}{80} + \frac{e}{4} - \frac{e^3}{18} - \frac{19}{36} \right] \quad (\text{đvtt}) \end{aligned}$$

3.3. Tích phân suy rộng với cận vô hạn. (Tích phân suy rộng loại 1)

3.3.1. Định nghĩa.

a. Khoảng lấy tích phân là $[a, +\infty)$

Giả sử hàm số $f(x)$ khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b], (a < b)$

- Nếu tồn tại $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ **hữu hạn** thì giới hạn đó gọi là tích phân suy rộng loại

1 của hàm số $f(x)$ trong khoảng $[a, +\infty)$ và ký hiệu là $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **hội tụ** và $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$.

- Nếu không tồn tại $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ hữu hạn thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là **phân kỳ**.

b. Khoảng lấy tích phân là $(-\infty, a]$

Tương tự: $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x)dx$

c. Khoảng lấy tích phân là $(-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi cả 2 tích phân suy rộng ở vế phải đều hội tụ.

Chú ý:

- Tích phân suy rộng là giới hạn của tích phân xác định hiểu theo nghĩa thông thường khi cho cận lấy tích phân dần tới vô cùng. Do vậy muốn tính tích phân suy rộng ta có thể dùng công thức Newton – Leibnitz để tính, sau đó cho cận lấy tích phân dần tới vô cùng.

Công thức Newton – Leibnitz cho tích phân suy rộng:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) := F(x) \Big|_a^{+\infty}$$

Tương tự:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a) - \lim_{b \rightarrow -\infty} F(b) := F(x) \Big|_{-\infty}^a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) := F(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

- Đối với tích phân suy rộng ta cũng có thể thực hiện phép đổi biến số và qui tắc tích phân từng phần.

Ví dụ 1:

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = -e^{-\infty} + 1 = 1 \Rightarrow \text{Hội tụ}$$

$$2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = +\infty \Rightarrow \text{Phân kỳ.}$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) \Big|_1^{+\infty} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha};$$

$$+) \text{ Nếu } \alpha < 1 \text{ thì } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty \Rightarrow \text{Phân kỳ.}$$

$$+) \text{ Nếu } \alpha > 1 \text{ thì } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \Rightarrow \text{Hội tụ.}$$

Vậy $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **hội tụ nếu** $\alpha > 1$ **và phân kỳ nếu** $\alpha < 1$.

Ví dụ 2: Tính : $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$

Giải:

$$\text{Ta có } I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(4 \cdot \frac{b-1}{b+2}) \Rightarrow I = \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_1^{+\infty} (3x^2 + 1)e^{-3x} dx$. (HD: Tích phân từng phần hai lần)

Ví dụ 4: Tính $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}} dx$ (HD: Đặt $t = \sqrt{x^2+3}$)

Chú ý: Một số tích phân suy rộng sau khi đổi biến số trở thành tích phân xác định

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

Giải: Đặt $\arctg x = z$ ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos z dz = (z \sin z - \cos z) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$

Ví dụ 6: Tính: $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

Giải: Đặt $t = \frac{1}{x^5}$. Khi $x = 1$ thì $t = 1$, khi $x \rightarrow +\infty$ thì $t \rightarrow 0$. Vậy ta có

$$I = -\frac{1}{5} \int_1^0 \frac{d\left(\frac{1}{x^5}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^5}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^5}\right) + 1}} = -\frac{1}{5} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} = -\frac{1}{5} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right| \Big|_1^0 =$$

$$= \frac{1}{5} \left(\ln \frac{2}{3} - \ln \frac{2}{3+2\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

3.3.2. Tính chất của tích phân suy rộng loại 1

TC 1: Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Nhận xét: Nếu không thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ:

- $\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{3x+2} dx$ phân kỳ vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{2}{3} \neq 0$
- $\int_1^{+\infty} \sin x dx$ phân kỳ vì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

TC 2: Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a, a']$ thì sự hội tụ hay phân kì của các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{a'}^{+\infty} f(x)dx$ (với $a' > a$) là như nhau.

TC3:

➤ Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} (m.f(x) + n.g(x))dx$ hội tụ

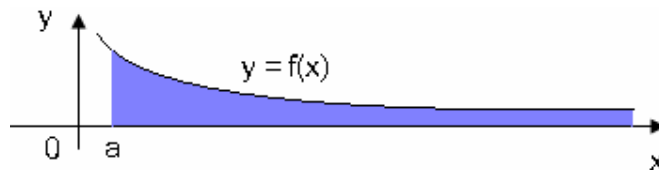
$$\text{và } \int_a^{+\infty} (m.f(x) + n.g(x))dx = m. \int_a^{+\infty} f(x)dx + n. \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

➤ Nếu trong hai tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ có một tích phân hội tụ, một tích phân phân kì thì $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$ phân kì.

3.3.3. Ý nghĩa hình học của tích phân suy rộng

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì trị số của nó là diện tích của hình thang cong vô hạn được giới

hạn bởi $y = f(x), y = 0, x = a$



3.3.4. Các tiêu chuẩn so sánh.

3.3.4.1. Tiêu chuẩn 1:

Giả sử hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$, khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$ và thỏa mãn: $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \geq a$. Khi đó:

+) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

+) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Ví dụ.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + \ln x}$ hội tụ vì $\frac{1}{x^3 + \ln x} < \frac{1}{x^3}, \forall x > 1$ và $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ hội tụ.

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$ phân kỳ vì $\ln x > 1 \forall x \geq 3$ nên $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ là phân kì.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$ hội tụ.

HD: Sử dụng bất đẳng thức $\forall \alpha > 0$ cho trước ta luôn có $\ln x < x^\alpha$ với x có giá trị đủ lớn.

Chọn $\alpha = \frac{1}{2}$, ta có $\ln x < x^{1/2}$ nên $\frac{\ln x}{x^2} < \frac{1}{x^{3/2}}, \frac{3}{2} > 1$. Vậy tích phân hội tụ.

3.3.4.2. Tiêu chuẩn 2:

Giả sử $f(x)$, $g(x)$ xác định trên $[a, +\infty)$, khả tích trên mọi đoạn hữu hạn $[a, b]$ và thỏa mãn $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \forall x \geq a$. Nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k (0 < k < \infty)$ thì sự hội tụ phân kỳ của

các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ là như nhau.

Hệ quả: khi $k = 1$ thì $f(x) \sim g(x)$ trong quá trình $x \rightarrow +\infty$ thì sự hội tụ, phân kỳ của các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx, \int_a^{+\infty} g(x)dx$ là như nhau.

Qui tắc thực hành:

Nếu $f(x)$ và $\frac{1}{x^\alpha} (\alpha > 0)$ là hai VCB cùng bậc trong quá trình $x \rightarrow +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

với $\alpha > 1$ và phân kì với $\alpha \leq 1$.

Ví dụ:

➤ Xét tính hội tụ của tích phân suy rộng sau $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \sqrt[3]{1+x^2}}$

Giải: Khi $x \rightarrow +\infty$, ta có $\frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[6]{x^7}} = \frac{1}{x^{7/6}}$

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/6}}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh 1 tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}$ hội tụ.

➤ Xét sự hội tụ hay phân kì của tích phân sau: $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$

Giải: Ta có $\frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ (khi $x \rightarrow +\infty$)

Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ phân kì nên $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$ phân kì

Chú ý: Thường dùng $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ để so sánh với các tích phân cần xét

3.3.5. Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ.

Định lý:

- Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ và ta nói $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ tuyệt đối.
- Nếu $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ hội tụ mà $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ phân kỳ thì ta nói $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ bán hội tụ.

Ví dụ: $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$ hội tụ tuyệt đối vì $\left| \frac{\cos x}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \forall x$ nên $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2+1} \right| dx$ hội tụ.

BÀI TẬP: TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Bài 1: Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến:

$$1. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$$

$$2. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$$

$$3. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3 + 1)}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$$

$$5. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}$$

$$6. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$7. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

$$8. \int_1^e \frac{\sqrt[4]{1 + \ln x}}{x} dx$$

$$9. \int_{-3}^{\sqrt{3}} x^2 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$10. \int_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}} dx$$

$$11. \int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx$$

$$12. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx.$$

$$13. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$$

$$14. \int_0^{\sqrt{5}} x^5 \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$15. \int_1^3 \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 5x + 1}}$$

Đáp số và chỉ dẫn:

$$I_1 = 4; \quad I_2 = \frac{\ln \frac{3}{2}}{2}; \quad I_3 = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1, (x = 2 \sin t); \quad I_4 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}; \quad I_5 = \frac{1}{24};$$

$$I_6 = \frac{4 - \pi}{2}; \quad I_7 = 3, (t = x^2 + 1); \quad I_8 = 0, 8(2\sqrt{2} - 1), t = 1 + \ln x; \quad I_9 = \frac{81\pi}{8} (x = 3 \cos t);$$

$$I_{10} = \frac{3(\pi - 2)}{2}, (x = 6 \sin^2 t); \quad I_{11} = \frac{5\pi}{16}, (x = 2t); \quad I_{12} = \frac{8}{35};$$

Bài 2: Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần:

$$1) \int_0^1 (2x+1)e^{-x} dx \quad 2) \int_1^2 (x^2 + 3x) \log_2 x dx \quad 3) \int_{-1}^1 x^3 \cdot \arctg x dx \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$5) \int_0^1 (2x^3 + x + 3)e^{-3x} dx \quad 6) \int_0^{\pi} e^x \sin x dx \quad 7) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx \quad 8) \int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x} dx$$

$$9) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x} \sin 2x dx \quad 10) \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx \quad 11) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx \quad 12) \int_0^{\sqrt{5}} x^5 \sqrt{1 + x^2} dx$$

Bài 3: Tính các tích phân suy rộng sau

$$1. \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

$$7. \int_3^{+\infty} \frac{2x+5}{x^2 + 3x - 10} dx$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 8)^2}$$

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$$

$$8. \int_0^{+\infty} (2x^3 + 4x^2 + 6x) e^{-3x} dx$$

$$3. \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-5x+7}$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

$$10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1).(x^2+4)}$$

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(1+x)^2} dx$$

$$12. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Bài 4: Khảo sát sự hội tụ hay phân kì của các tích phân suy rộng sau:

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$$

$$2. \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{4}{x^2}} \right) dx$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{x^9+\ln x}} dx$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \arctg \frac{x}{2+x^2} dx$$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+\sin x}$$

$$8. \int_0^{+\infty} \left(\cos \frac{5}{x} - \cos \frac{7}{x} \right) dx$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt{3x^3+5x^2+1}} dx$$

$$10. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[5]{3x^{15}+2x+1}}$$

$$11. \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left(e^{\frac{1}{3x}} - 1 \right) dx$$

$$12. \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{\ln x}}{x^3+3} dx$$

$$13. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{x}+5x^2} dx$$

$$14. \int_1^{+\infty} \frac{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2+1} dx$$

$$15. \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+e^x}} dx$$

$$16. \int_1^{+\infty} \ln \left(1 + tg^2 \frac{1}{x} \right) dx$$

$$17. \int_1^{+\infty} \ln \left(\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2-x} \right) . tg \frac{1}{x^2} dx$$

$$18. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x(x+2)}}{x^2+3\ln x} dx$$

$$19. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3-1}}$$

$$20. \int_0^{+\infty} \frac{\arctg^2 4x}{\sqrt{5x^{10}+2x^9}} dx$$

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^8+7x^3+x}} dx$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 2x}{\sqrt{x^3+3x}} dx$$

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(2+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}} dx$$

CHƯƠNG 4

MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

4.1. Ma trận và các khái niệm

4.1.1 Định nghĩa ma trận:

- Ma trận là một bảng hình chữ nhật, trên đó sắp xếp các phần tử (là các số thực) theo các hàng và các cột. Ma trận thường được ký hiệu bằng các chữ cái: $A, B, \dots, X, Y, \dots$; còn các phần tử thường được ký hiệu bằng các chữ thường: $a, b, \dots, x, y, \dots$.
- Giả sử ma trận có m hàng, n cột, khi đó để chỉ phần tử hàng i (từ trên xuống), cột j (từ trái qua phải) ta ký hiệu: a_{ij} – chỉ số hàng trước, chỉ số hàng sau. Các phần tử của ma trận được nằm trong dấu $[]$, hoặc $()$, hoặc $\| \quad \|$, nó có dạng:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}; \quad A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|_{m \times n}$$

- Ma trận có m hàng và n cột thì **cỡ** của ma trận là $m \times n$,
- a_{ij} là phần tử của ma trận A nằm ở giao điểm của hàng i cột j ,

$$\text{Ký hiệu: } A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

- Khi $m = n$ (số hàng bằng số cột) thì A gọi là **ma trận vuông cấp n** .

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ là ma trận cỡ } 3 \times 4, \quad a_{11} = 1, \quad a_{24} = 2 \dots$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \text{ là ma trận cỡ } 3 \times 3 \text{ (ma trận vuông cấp 3).}$$

4.1.2 Các khái niệm liên quan đến ma trận

1) Đường chéo chính.

Cho ma trận A vuông cấp n . Khi đó các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ nằm trên một đường thẳng gọi là **đường chéo chính** của A , các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là các **phần tử chéo**.

(chú ý: khái niệm về đường chéo chính **chỉ có trong ma trận vuông**)

2) Ma trận tam giác. Cho ma trận A vuông cấp n .

+) *Ma trận tam giác trên:* Nếu A có các phần tử phía dưới đường chéo chính đều bằng 0 (Tức là: $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

+) *Ma trận tam giác dưới:* Nếu A có các phần tử phía trên đường chéo chính đều bằng 0 (tức là: $a_{ij} = 0$ với mọi $i < j$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

3) Ma trận chéo.

Ma trận vuông A có các phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0 gọi là ma trận chéo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Ma trận chéo vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới.

4) Ma trận đơn vị.

Ma trận đơn vị là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ký hiệu là I_n (hoặc E_n) là ma trận đơn vị cấp n .

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Ví dụ. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ ma trận đơn vị cấp 2 ; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ ma trận đơn vị cấp 3

5) Ma trận đối xứng.

Ma trận A vuông cấp n gọi là ma trận đối xứng nếu $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1, n}$ (các cặp phần tử đối xứng qua đường chéo chính thì bằng nhau).

Ví dụ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ là ma trận đối xứng}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & -6 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ không đối xứng vì } a_{12} = 1 \neq a_{21} = 4, a_{14} = -6 \neq a_{41} = 6.$$

6. Ma trận không.

Là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0, ký hiệu: O hoặc θ .

Như vậy, cỡ hay cấp của ma trận không tùy thuộc vào các phép toán cụ thể.

Ví dụ. Các ma trận sau đều là ma trận không:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} ; \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

7. Ma trận con.

Cho A là ma trận cỡ $m \times n$. Ma trận B gọi là ma trận con của A nếu B có được từ A bằng cách bỏ đi một số hàng, một số cột.

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$

- Bỏ đi dòng 3, cột 3 và 4, ta được ma trận

$$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ - là ma trận con cấp 2.}$$

- Bỏ dòng 1, ta được ma trận

$$M_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \text{ - ma trận con cỡ } 2 \times 4.$$

8. Ma trận chuyển vị.

Cho A là ma trận cỡ $m \times n$. Ma trận chuyển vị của A là ma trận cỡ $n \times m$ có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột, chuyển cột thành hàng, ký hiệu A^T .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

Nhận xét. A là ma trận đối xứng khi và chỉ khi $A = A^T$.

Ví dụ.

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

9) **Ma trận hàng.** Là ma trận chỉ có một hàng $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]_{1 \times n}$

10) **Ma trận cột.** Là ma trận chỉ có một cột.

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

4.2. Các phép toán trên ma trận.

4.2.1. **Phép bằng nhau.** Hai ma trận gọi là bằng nhau nếu chúng **cùng cỡ** và các phần tử tương ứng ở cùng vị trí thì bằng nhau.

4.2.2. **Phép cộng hai ma trận cùng cỡ.**

4.2.2.1 **Định nghĩa.**

Cho A và B là hai ma trận **cùng cỡ** $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Tổng của hai ma trận A và B là ma trận cùng cỡ $C = (c_{ij})_{m \times n}$ trong đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Ký hiệu: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$.

Như vậy, nếu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Khi đó ta có

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Cộng hai ma trận cùng cỡ : ta cộng các phần tử ở vị trí tương ứng với nhau

Ma trận đối: Nếu $A + B = [0]$ thì B gọi là ma trận đối của A và ngược lại.

Ký hiệu ma trận đối của A là $-A$

Ví dụ 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 3} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Ví dụ 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

Suy ra: $C = A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$D = A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2.2.2 Tính chất.

Giả sử A, B, C là các ma trận cùng cỡ. Khi đó:

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- 3) $A + \theta = \theta + A = A$
- 4) $A + (-A) = (-A) + A = \theta$

4.2.3. Phép nhân ma trận với số thực.

4.2.3.1 Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ và số thực k . Khi đó, tích của số thực k với ma trận A là một ma trận cùng cỡ được xác định bởi:

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

(Tức là: muốn thực hiện phép nhân ma trận với một số k , ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với k .)

Ví dụ:

$$\Rightarrow 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{4 \times 2} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 8 & -15 \\ 15 & 8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

4.2.3.2 Tính chất

Giả sử A, B là các ma trận cùng cỡ và k, l là các số thực bất kì. Khi đó:

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + l)A = kA + lA$
- $k(lA) = kl(A)$
- $1A = A$
- $0A = \theta$

4.2.4. Phép nhân hai ma trận.

4.2.4.1 Định nghĩa

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m \times p}$, $B = (b_{ij})_{p \times n}$ (số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B). Khi đó, tích của hai ma trận A và B là ma trận $C = (c_{ij})_{m \times n}$ trong đó:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

Ví dụ 1. $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -1.2 + 3.3 + 1.9 \end{bmatrix}_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}_{1 \times 1} = 13$

Ví dụ 2.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} c_{11} = -1.2 + 3.3 + 1.9 = 13 \\ c_{21} = -2.2 + 2.3 + 0.9 = 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Ví dụ 3. Tính AB với $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$

Giả sử $AB = (c_{ij})_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$, ta có

$$c_{11} = 1.2 + 3.1 = 5,$$

$$c_{12} = 1.0 + 3.(-1) = -3,$$

$$c_{13} = 1.(-3) + 3.4 = 9,$$

$$c_{21} = 2.2 + (-1).1 = 3,$$

$$c_{22} = 2.0 + (-1)(-1) = 1,$$

$$c_{23} = 2.(-3) + (-1).4 = -10$$

Vậy $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & -10 \end{bmatrix}$

Ví dụ 4. Tính $AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

Giải.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1.2 + (-2)(-4) + 1.1 = 11 & 1.0 + (-2).1 + 1.0 = -2 & 1.2 + (-2)(-3) + 1.0 = 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \\ &= \begin{bmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Tính

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ -11 & 9 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Ví dụ 6.

Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}X - \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & -9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

Giải.

a) Ta có

$$2X = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2X = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 23 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -14 & -38 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -14 & -38 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -7 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & -9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & -9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 7. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính $f(A)$

Giải.

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5I = 3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$$

Nhận xét.

- Phép nhân AB thực hiện được khi và chỉ khi số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.
- Phép nhân AB và BA thực hiện được khi và chỉ khi nếu A là ma trận cỡ $m \times n$ thì B là ma trận cỡ $n \times m$.

Ví dụ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Phép nhân hai ma trận nói chung không có tính chất giao hoán.

4.2.4.2. Tính chất.

- $A (B + C) = AB + AC$
- $(A + B) C = AC + BC$
- $(AB) C = A (BC)$
- $(kA) B = k (AB) = A (kB)$
- $AI = IA = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

4.2.5. Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận.

1. Đổi chỗ hai hàng(hai cột) cho nhau.
2. Nhân một hàng(một cột) với một số khác không.
3. Nhân một hàng(một cột) với một số rồi đem cộng vào một hàng khác (cột khác).

Chú ý: Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận đóng vai trò rất qua trọng khi để tính định thức, khi để giải hệ phương trình đại số tuyến tính...

4.3. Định thức

4.3.1. Định nghĩa định thức.

4.3.1.1 Định nghĩa 1.

Cho ma trận vuông cấp n : $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

Kí hiệu M_{ij} là ma trận con cấp $(n-1)$ có được từ ma trận A khi bỏ đi hàng i , cột j .

Khi đó M_{ij} được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij} .

Ví dụ.

$$\text{Với } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ thì } M_{11} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \dots$$

4.3.1.2 Định nghĩa 2.

Giả sử A là ma trận vuông cấp n . Khi đó, định thức cấp n của ma trận A , kí hiệu là: $\det(A)$ hay $|A|$, là một số thực được định nghĩa một cách qui nạp sau:

a) Định thức cấp 1. Giả sử $A = [a_{11}] \Rightarrow \det(A) = a_{11}$ (1)

b) Định thức cấp 2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2)$$

c) Định thức cấp 3: Giả sử: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Khi đó, ta có: (3)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det(M_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(M_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(M_{13})$$

$$\text{hoặc } \det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) + (-1)^{3+j} a_{3j} \det(M_{3j}) \quad (4)$$

Trong đó M_{ij} là ma trận vuông con cấp 2 có được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i cột thứ j .

Công thức (3) gọi là công thức khai triển định thức theo hàng thứ i với $i = 1, 2, 3$.

Công thức (4) gọi là công thức khai triển định thức theo cột thứ j với $j = 1, 2, 3$.

Ví dụ 1. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Giải

- Khai triển định thức theo hàng 1, ta được:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 = -8 - 3(-2) = -2$$

- Khai triển định thức theo cột 3, ta được:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + (-1)^{2+3} 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 33 - 35 = -2$$

d) Định thức cấp n.

Giả sử ta đã định nghĩa được định thức cấp $(n - 1)$. Khi đó, định thức cấp n của ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ được xác định như sau:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(M_{in}) \quad (5)$$

hoặc

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) + \dots + (-1)^{m+j} a_{mj} \det(M_{mj}) \quad (6)$$

Trong đó M_{ij} là ma trận vuông con cấp $(n - 1)$ có được từ A bằng cách bỏ đi hàng thứ i cột thứ j .

Công thức (5) gọi là công thức khai triển định thức theo hàng thứ i với $i = 1, 2, \dots, n$.

Công thức (6) gọi là công thức khai triển định thức theo cột thứ j với $j = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ 2. Tính định thức: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Giải.

Ta có thể khai triển định thức theo hàng 2 hoặc cột 3 vì có 2 phần tử bằng 0.

- Xét khai triển theo hàng 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

với

$$\begin{aligned} & \bullet \quad (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ khai triển cột 3: } 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ & \bullet \quad \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ khai triển } h_3 \quad 3 \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 9 = 36 \end{aligned}$$

Vậy $\det(A) = 0 - 36 = -36$.

➤ Xét khai triển theo cột 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -36$$

Bài tập tương tự: Tính các định thức sau:

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Gợi ý: a) Khai triển theo hàng 3

b) Khai triển theo cột 2 hoặc hàng 3.

4.3.2. Các tính chất cơ bản của định thức.

4.3.2.1 (T/C 1) Giả sử A vuông, khi đó $\det(A) = \det(A^T)$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

Hệ quả. Mọi tính chất nếu đúng cho hàng thì cũng đúng cho cột và ngược lại.

4.3.2.2 (T/C2) Đổi chỗ hai hàng (hai cột) của định thức cho nhau thì định thức đổi dấu.

Ví dụ. cũng với ví dụ trên

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ đổi chỗ hàng 2 với hàng 3 : } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

4.3.2.3 (T/C 3) Khi nhân các phần tử của một hàng (một cột) với cùng một số k thì định thức được nhân lên k lần.

Hệ quả. Nếu các phần tử của một hàng (một cột) có thừa số chung thì có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

Ví dụ : Chứng minh D chia hết cho 13, với $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 156 \\ 2 & 8 & 286 \\ 4 & 1 & 416 \end{vmatrix}$

Giải

nhận xét rằng $156 = 12.13$, $286 = 22.13$, $416 = 32.13$ nên ta rút thừa số chung 13 ra ngoài được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12.13 \\ 2 & 8 & 22.13 \\ 4 & 1 & 32.13 \end{vmatrix} = 13. \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 8 & 22 \\ 4 & 1 & 32 \end{vmatrix} \text{ chú ý rằng } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 8 & 22 \\ 4 & 1 & 32 \end{vmatrix} = M, \Rightarrow D = 13.M$$

do các phần tử ma trận chỉ toàn các số nguyên nên M phải là số nguyên $\Rightarrow D$ chia hết cho 13 $\Rightarrow D \text{pcm}$

4.3.2.4 (T/C 4) Khi tất cả các phần tử của một hàng (một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức như sau:

ví dụ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} + a'_{22} & a_{23} + a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

4.3.2.5 (T/C 5) Định thức của ma trận sẽ bằng không nếu thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- Có một hàng (một cột) gồm toàn là số không.
- Có hai hàng (hai cột) giống nhau.

- Có một hàng (một cột) là **tổ hợp tuyến tính** của các hàng khác (cột khác).

(Đại lượng α là tổ hợp tuyến tính của các đại lượng $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, nếu tồn tại n số thực $k_1, k_2, \dots, k_n$ để cho $\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_n\beta_n$)

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + 2b_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + 2b_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + 2b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Vì cột 3} = \text{cột 1} + 2\text{cột 2})$$

4.3.2.6 (T/C 6) Định thức của ma trận sẽ không thay đổi nếu nhân k vào một hàng (một cột) rồi đem cộng vào một hàng khác (cột khác).

Ví dụ.

Trong ví dụ trên, ta biến đổi

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{2h_2 + h_1 \rightarrow h_1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{khai triển theo h2}} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

Như vậy, ta thấy việc khai triển định thức trở nên đơn giản hơn nhiều.

4.3.2.7 (T/C 7) Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

4.3.2.8 (T/C 8) Nếu A, B là hai ma trận vuông cấp n thì $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

4.3.3. Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp

Biến đổi sơ cấp	Tác dụng	Lý do
1. Nhân 1 hàng với 1 số $k \neq 0$	Định thức nhân k	T.C 4.3.2.3
2. Đổi chỗ 2 hàng	Định thức đổi dấu	T.C 4.3.2.2
3. Nhân k với hàng r rồi đem cộng vào hàng s	Định thức không đổi	T.C 4.3.2.6

Nhận xét: Nếu tính định thức bằng việc sử dụng công thức khai triển theo hàng (hay cột) thì khối lượng tính sẽ rất lớn (khi $n \geq 4$). Vì các phép biến đổi sơ cấp của ma trận không làm thay đổi các tính khác không hay bằng không của định thức nên ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận để đưa ma trận về dạng tam giác, khi đó định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên chéo chính. Các bước tính định thức như sau:

Bước 1: Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức về dạng định thức ma trận tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của các phép biến đổi sơ cấp được sử dụng.

Bước 2: Tính giá trị định thức dạng tam giác và kể cả tác dụng tổng hợp của các phép biến đổi sơ cấp để sử dụng.

Hàng thứ 1	1	3	5	-2
Hàng thứ 2	2	5	8	2
Hàng thứ 3	-4	2	0	-1
Hàng thứ 4	3	-4	3	2

Hàng thứ 1	1	3	5	-2
$(-2) \cdot \text{hàng 1} + \text{hàng 2}$	0	-1	-2	6
$(4) \cdot \text{hàng 1} + \text{hàng 3}$	0	14	20	-9
$(-3) \cdot \text{hàng 1} + \text{hàng 4}$	0	-13	-12	8

Hàng thứ 1	1	3	5	-2
hàng 2	0	-1	-2	6
$(14) \cdot \text{hàng 2} + \text{hàng 3}$	0	0	-8	75
$(-13) \cdot \text{hàng 2} + \text{hàng 4}$	0	0	14	70

Hàng thứ 1	1	3	5	-2
hàng 2	0	-1	-2	6
hàng 3	0	0	-8	75
$(7/4) \cdot \text{hàng 3} + \text{hàng 4}$	0	0	0	$\frac{245}{4}$

$\Rightarrow$ định thức = 490

4.4. Ma trận nghịch đảo .

4.4.1. Phần phụ đại số của một phần tử, ma trận phụ hợp.

Cho ma trận A vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ký hiệu

- M_{ij} là ma trận có được từ ma trận A khi bỏ đi hàng i, cột j

$$- A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = \begin{cases} \det(M_{ij}) & \text{nếu } (i+j) \text{ chẵn} \\ -\det(M_{ij}) & \text{nếu } (i+j) \text{ lẻ} \end{cases}$$

A_{ij} gọi là **phần phụ đại số** của phần tử a_{ij} .

4.4.1.1. Ma trận phụ hợp của ma trận A là ma trận được ký hiệu $\tilde{A} = (\tilde{A}_{ij})$

$$\tilde{A} = [\tilde{A}_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \dots & \tilde{A}_{2n} \\ \dots & & & \\ \tilde{A}_{n1} & \tilde{A}_{n2} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

với $\tilde{A}_{ij} = A_{ji} \Rightarrow \tilde{A}_{ij}$ là phần phụ đại số của phần tử a_{ji} trong ma trận A

4.4.1.2. Phương pháp tính ma trận phụ hợp :

Để tìm ma trận phụ hợp của ma trận $A = (a_{ij})$ ta thực hiện các bước sau:

- Tìm $(\tilde{A}_{ij})^T = (A_{ij})$
- Từ $(\tilde{A}_{ij})^T$ ta chuyển vị sẽ được $\tilde{A} = (A_{ij})^T$

Ví dụ 1: Tìm ma trận phụ hợp của các ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Giải:

Tìm các phần phụ đại số: $A_{11} = 4, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -2, \quad A_{22} = 1$

Suy ra ma trận phụ hợp của A là: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ghi nhớ Nếu A là ma trận vuông **cấp 2** thì ma trận phụ hợp của A là $\tilde{A}$ sẽ có được từ A khi các phần tử **chéo chính đổi chỗ**, các phần tử “**chéo phụ**” **đổi dấu**.

Ví dụ 2: Tìm ma trận phụ hợp của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải:

- Tìm các phần phụ đại số:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Suy ra ma trận phụ hợp của A là:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 3: Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Giải: Các phần phụ đại số:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -15; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Ma trận phụ hợp của A là:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -3 & -15 & 7 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -3 & -15 & 7 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Nếu A là ma trận đối xứng thì A^T cũng đối xứng.

4.4.2. Ma trận nghịch đảo.

4.4.2.1 Định nghĩa:

Cho A là ma trận vuông cấp n . Nghịch đảo của ma trận A (nếu tồn tại) là một ma trận vuông cấp n được ký hiệu là A^{-1} , sao cho $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ (trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n), khi đó nói rằng ma trận A là **khả đảo**

4.4.2.2 Tính chất:

- Nếu A có ma trận nghịch đảo là A^{-1} thì A^{-1} cũng khả đảo và nghịch đảo của A^{-1} là $(A^{-1})^{-1} = A$
- Nghịch đảo của một ma trận vuông nếu có là duy nhất.
- Nếu A và B đều có nghịch đảo thì:

$$+) \quad (A^{-1})^{-1} = A$$

$$+) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$+) \quad (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$+) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4.4.2.3 Điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông

Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông khả đảo là định thức của nó khác không.

Nếu ma trận A có $\det(A) \neq 0$ thì ta còn gọi A là ma trận không suy biến, ngược lại ta gọi A là ma trận suy biến.

4.4.2.4 Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo.

- **Phương pháp ma trận phụ hợp.**

Định lý 2: Nếu ma trận A vuông có $\det A \neq 0$ thì A có ma trận nghịch đảo A^{-1} được tính bởi công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

Nhận xét: Từ định lý trên, để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận không suy biến A ta tiến hành theo 3 bước:

- Tính $\det(A)$. Nếu $\det(A) = 0$ thì kết luận ma trận A không tồn tại ma trận nghịch đảo. Nếu $\det A \neq 0$, chuyển sang bước 2.
- Tìm tất cả các phần phụ đại số của các phần tử a_{ij} có mặt trong ma trận A rồi thiết lập ma trận $\tilde{A}^T$ và suy ra phụ hợp $\tilde{A}$

➤ Nhân ma trận $\tilde{A}$ với $\frac{1}{\det A}$ ta được: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

Ví dụ : Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải: Có $\det(A) = 4 - 6 = -2$

Áp dụng kết quả ở **ví dụ 1**, ma trận phụ hợp của A là $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ví dụ : Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải:

$$\begin{aligned} -\det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{khai triển theo } h_1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2 - 190 - 189 = -381 \neq 0 \end{aligned}$$

Vậy tồn tại ma trận A^{-1} .

- Theo kết quả ở **ví dụ 2** thì ma trận phụ hợp của A là:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

- Vậy ma trận nghịch đảo cần tìm là:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} = -\frac{1}{381} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

Chú ý: Phương pháp này được áp dụng để tìm ma trận nghịch đảo của những ma trận cấp nhỏ (cấp $n \leq 3$).

• **Phương pháp Gauss-Jordan**

Để tìm ma trận nghịch đảo của A ta làm như sau:

- Bước 1: Viết ma trận đơn vị I cùng cấp với A bên cạnh ma trận A như sau: $(A | I)$
- Bước 2: Áp dụng các phép **biến đổi sơ cấp trên hàng** đưa dần phần ma trận A về ma trận tam giác trên $\rightarrow$ ma trận chéo $\rightarrow$ ma trận đơn vị. Tác động đồng thời các phép biến đổi đó vào phần ma trận I.
- Bước 3: Khi ở phần ma trận A (ban đầu) xuất hiện dạng ma trận đơn vị I thì ở phần ma trận I (ban đầu) xuất hiện ma trận A^{-1} (tức là: $(A | I) \rightarrow \dots \rightarrow (I | A^{-1})$)

Ví dụ 9: Tìm ma trận nghịch đảo của $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ theo phương pháp Gauss – Jordan.

Hàng thứ 1	1	2	3	1	0	0
Hàng thứ 2	2	5	3	0	1	0
Hàng thứ 3	1	0	8	0	0	1

Hàng thứ 1	1	2	3	1	0	0
(-2) * hàng 1 + hàng 2	0	1	-3	-2	1	0
(-1) * hàng 1 + hàng 3	0	-2	5	-1	0	1

Hàng thứ 1	1	2	3	1	0	0
Hàng thứ 2	0	1	-3	-2	1	0
(2) * hàng 2 + hàng 3	0	0	-1	-5	2	1

Hàng thứ 1	1	2	3	1	0	0
Hàng thứ 2	0	1	-3	-2	1	0
Hàng thứ 3	0	0	-1	-5	2	1

(-3) * hàng 3 + hàng 1	1	2	0	-14	6	3
(3) * hàng 3 + hàng 2	0	1	0	13	-5	-3
(1/-1) * hàng 3	0	0	1	5	-2	-1

(-2) * hàng 2 + hàng 1	1	0	0	-40	16	9
(1) * hàng 2	0	1	0	13	-5	-3
(1/-1) * hàng 3	0	0	1	5	-2	-1

(1) * hàng 1	1	0	0	-40	16	9
(1) * hàng 2	0	1	0	13	-5	-3
(1/-1) * hàng 3	0	0	1	5	-2	-1

$$\text{Vậy } A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Chú ý: Phương pháp này đặc biệt hiệu quả đối với ma trận cấp ≥ 4 .

4.4.2.5. Ứng dụng ma trận nghịch đảo giải phương trình ma trận

Bài toán 1: Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B$ biết $\det(A) \neq 0$

Phương pháp: Do $\det(A) \neq 0$ nên tồn tại A^{-1} . Nhân vào bên trái cả hai vế của phương trình với A^{-1} , ta được:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow I X = X = A^{-1}B \quad \text{do đó} \quad X = A^{-1}B.$$

Bài toán 2: Tìm ma trận X thỏa mãn $XA = B$ biết $\det(A) \neq 0$

Tương tự như trên, nhân vào bên phải cả hai vế với ma trận A^{-1} , do đó $X = BA^{-1}$.

Ví dụ Giải phương trình ma trận: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Giải:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ví dụ Giải phương trình ma trận: $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

Giải:

$$\text{Vì } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0 \quad \text{nên } X = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

4.4.3. Hạng của ma trận

4.4.3.1 Định nghĩa:

Cho ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hạng của ma trận A là **cấp cao nhất của định thức con khác không** có mặt trong A.

Ký hiệu hạng của A là $\rho(A)$.

Nhận xét :

Nếu A có cỡ $m \times n$ thì

- $\rho(A) \leq \min(m, n)$
- Sẽ có $C_m^k C_n^k$ định thức con cấp k

Ví dụ : cho ma trận A, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Như vậy A có cỡ 3×4 , do đó $\rho(A) \leq \min(3, 4) = 3$

Xét các ma trận vuông con cấp 3 của A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

➤ Do định thức của chúng đều bằng không nên hạng của A không thể bằng 3 được, do đó ta xét đến các ma trận vuông con cấp 2. Sẽ có $C_3^2 C_4^2 = 18$ ma trận vuông con cấp 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4, \dots$$

➤ Thấy rằng có một định thức của ma trận vuông con cấp 2 bằng -8 (khác không), do đó $\rho(A) = 2$.

Nhưng thấy rằng không thể tìm hạng của một ma trận theo cách thức như trên được, vì như vậy ta có thể phải đi tính một số lượng định thức khá lớn. Chính vì vậy người ta phải đi tìm một phương pháp khác để tính hạng của ma trận.

4.4.3.2 Ma trận hình thang

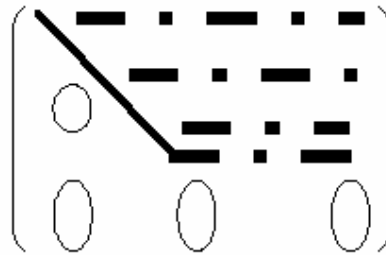
Trước hết ta có khái niệm về hàng không và hàng khác không :

- Hàng không là hàng có tất cả các phần tử đều bằng 0
- Hàng khác không là hàng có ít nhất một phần tử khác 0

• **Định nghĩa:** Ma trận hình thang là ma trận thoả mãn 2 tính chất sau:

- Các hàng khác không luôn ở phía trên các hàng không
- Phần tử khác không đầu tiên ở hàng thứ i (kể từ trái sang phải) phải là ở cột thứ i

Ma trận hình thang có dạng :



Ví dụ:

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ là các ma trận hình thang}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ không là ma trận hình thang}$$

• Hạng của ma trận hình thang

Hạng của ma trận hình thang bằng số hàng khác không của nó.

4.4.3.3 Phương pháp tìm hạng của ma trận.

Nhận xét: Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi tính bằng không hay khác không của định thức do đó không làm thay đổi hạng của ma trận. Vì vậy để tìm hạng của ma trận A ta làm như sau:

- Dùng các phép biến đổi sơ cấp, đưa ma trận A về dạng ma trận hình thang.
- Khi đó hạng của ma trận A sẽ bằng hạng ma trận hình thang và bằng số hàng khác không của ma trận hình thang.

Ví dụ : Tìm hạng của ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5
Hàng thứ 1	1	2	5	-1	3
Hàng thứ 2	2	3	-1	4	2
Hàng thứ 3	4	7	9	2	1
Hàng thứ 4	-1	0	3	2	1

	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5
Hàng thứ 1	1	2	5	-1	3
(-2) * hàng 1 + hàng 2	0	-1	-11	6	-4
(-4) * hàng 1 + hàng 3	0	-1	-11	6	-11
(1) * hàng 1 + hàng 4	0	2	8	1	4

	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5
Hàng thứ 1	1	2	5	-1	3
hàng 2	0	-1	-11	6	-4
(-1) * hàng 2 + hàng 3	0	0	0	0	-7
(2) * hàng 2 + hàng 4	0	0	-14	13	-4

	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 4	Cột 5
Hàng thứ 1	1	2	5	-1	3
hàng 2	0	-1	-11	6	-4
hàng 4	0	0	-14	13	-4
hàng 3	0	0	0	0	-7

	Cột 1	Cột 2	Cột 3	Cột 5	Cột 4
Hàng thứ 1	1	2	5	3	-1
hàng 2	0	-1	-11	-4	6
hàng 3	0	0	-14	-4	13
hàng 4	0	0	0	-7	0

Kết luận: Hạng của ma trận A bằng 4

- *Nghiệm* của hệ (I) là một **bộ gồm n số thực** $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho thỏa mãn tất cả các phương trình của hệ.

Nhận xét:

- Hệ thuần nhất $AX = 0$ luôn có nghiệm không: $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$.
Nghiệm này gọi là *nghiệm tầm thường*. Các nghiệm khác nghiệm tầm thường gọi là *nghiệm không tầm thường*.
- *Hệ dạng hình thang*: Hệ $AX = B$ gọi là hệ hình thang nếu A là ma trận hình thang.

4.5.1.2 Định lý (Kronecker - Capelli):

Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình $AX = B$ có nghiệm là $\rho(A) = \rho(\bar{A})$

Ví dụ 1: Xét hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$$

Ma trận bổ sung của hệ là:

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 3 \end{array} \right)$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp ma trận **trên hàng** đưa phần ma trận A về dạng hình thang

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2h_1 + h_2 \rightarrow h_2 \\ -h_1 + h_3 \rightarrow h_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-2h_2 + h_3 \rightarrow h_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = (A'|B') \end{aligned}$$

Suy ra: $\rho(A) = 2$ và $\rho(\bar{A}) = 3$. Theo định lý trên, hệ đã cho vô nghiệm.

4.5.1.3 Biện luận hệ phương trình đại số tuyến tính $AX = B$

- Nếu $\rho(A) \neq \rho(\bar{A})$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $\rho(A) = \rho(\bar{A})$ thì hệ $\exists$ nghiệm:
 - Nếu $\rho(A) = \rho(\bar{A}) = n$ (số ẩn) thì hệ có *nghiệm duy nhất*.
 - Nếu $\rho(A) = \rho(\bar{A}) < n$ (số ẩn) thì hệ có *vô số nghiệm*.

chú ý:

- Trường hợp nếu $\rho(A) = \rho(\bar{A}) = n$ (số ẩn) thì hệ đưa được về dạng hệ vuông $AX = B$ với A là ma trận vuông cấp n và $\det(A) \neq 0$. Hệ có tên là hệ Cramer, có duy nhất nghiệm.
- Hệ vuông thuần nhất $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi **định thức ma trận hệ số bằng không**.

Ví dụ : Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = b \end{cases}$$

- 1) Hãy xác định a, b để hệ có nghiệm duy nhất
- 2) Hãy xác định a, b để hệ có vô số nghiệm
- 3) Hãy xác định a, b để hệ vô nghiệm

Giải

Dùng các phép biến đổi trên hàng đối với $\bar{A}$

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & b \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -5 & 1-2a & -3 \\ 0 & -5 & 2-3a & b-6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 2 \\ 0 & -5 & 1-2a & -3 \\ 0 & 0 & 1-a & b-3 \end{array} \right]$$

Thấy rằng hạng A bằng 3 hoặc bằng 2 :

- Nếu hạng $A = 3$ thì hạng $\bar{A} = 3 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 1$
- Nếu hạng $A = 2 \Leftrightarrow a = 1$
 - ❖ khi đó nếu $b = 3$ thì hạng $A =$ hạng $\bar{A} = 2 < 3$ là số ẩn $\Rightarrow$ hệ vô số nghiệm
 - ❖ Nếu $b \neq 3$ thì hạng $A \neq$ hạng $\bar{A} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Do đó:

- 1) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(\bar{A}) = 3 \Leftrightarrow a \neq 1$
- 2) Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(\bar{A}) < 3$
 $\Leftrightarrow \rho(A) = \rho(\bar{A}) = 2 \Leftrightarrow a = 1$ và $b = 3$
- 3) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \rho(A) \neq \rho(\bar{A}) \Leftrightarrow \rho(A) = 2$ và $\rho(\bar{A}) = 3 \Leftrightarrow a = 1, b \neq 3$

4.5.2 Hệ Cramer.

4.5.2.1 Định nghĩa:

Hệ phương trình đại số tuyến tính $AX = B$ là một hệ vuông, thỏa mãn điều kiện $\det(A) \neq 0$ thì được gọi là hệ Cramer.

4.5.2.2 Tính chất:

Hệ Cramer $AX = B$ luôn có nghiệm duy nhất xác định bởi công thức $X = A^{-1} B$.

4.5.2.3 Phương pháp giải hệ Cramer (có 3 phương pháp)

• Phương pháp Cramer:

Định lí: (Cramer)

Hệ Cramer $AX = B$ (A là ma trận vuông cấp n) có nghiệm: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ với các thành

phần x_i được xác định bởi công thức: $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, $i = \overline{1, n}$

Với A_i là ma trận có được từ A bằng cách thay cột thứ i của A bởi cột ma trận vế phải B .

chú ý : Phương pháp thường sử dụng để giải cho hệ 2 hoặc 3 phương trình

Ví dụ : Giải phương trình
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Cả } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -13 \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -13$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -26 \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -39$$

Do đó nghiệm của hệ đã cho là

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = 1, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = 2, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = 3.$$

Kết luận: Nghiệm của phương trình là $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

Ví dụ : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -1, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 1.$$

• Phương pháp dùng ma trận nghịch đảo.

- Xét hệ Cramer $AX = B$. Vì $\det A \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1} .

$$\text{Do vậy từ } AX = B \rightarrow A^{-1}A X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

- Tìm ma trận nghịch đảo A^{-1}
- Thực hiện phép nhân: $X = A^{-1}B$.

Ví dụ : Giải hệ sau theo phương pháp ma trận nghịch đảo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_3 = 19 \end{cases}$$

Giải:

$$\text{Ma trận hệ số: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ta có } \det(A) = A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 40 - 26 - 15 = -1$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0$$

Vậy hệ đã cho là hệ Cramer.

-Ta có

$$A_{11} = 40; \quad A_{21} = -16; \quad A_{31} = -9 \quad A_{12} = -13; \quad A_{22} = 5$$

$$A_{32} = 3 \quad A_{13} = -5; \quad A_{23} = 2; \quad A_{33} = 1$$

$$\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{ma trận phụ hợp } \tilde{A} = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

• **Giải hệ Cramer $AX = B$ bằng phương pháp Gauss.**

Thực hiện các bước sau

Bước 1: Viết ma trận bổ sung $\overline{A} = [A|B]$.

Bước 2: Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp **trên hàng** để đưa phần ma trận A về dạng tam giác. Đến đây ta dễ dàng biết được $\rho(A)$ và $\rho(\overline{A})$.

Khi đó xảy ra các trường hợp:

- Nếu $\rho(A) \neq \rho(\overline{A})$ thì kết luận hệ $AX = B$ vô nghiệm.
- Nếu $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = n$ (Số ẩn) thì hệ đã cho tương đương với hệ tam giác:

$A'X = B'$, tiếp tục dùng các phép biến đổi sơ cấp **trên hàng** đưa phần A' về dạng chéo ---> dạng đơn vị, lúc này phần B' sẽ là nghiệm X.

Ví dụ 2: Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

KẾT QUẢ TÍNH TOÁN

Giải hệ phương trình (Theo Phương pháp GAUSS)

	X 1	X 2	X 3	Vế phải
Hàng thứ 1	2	4	3	4
Hàng thứ 2	3	1	-2	-2
Hàng thứ 3	4	11	7	7

	X 1	X 2	X 3	Vế Phải
Hàng thứ 1	2	4	3	4
$(-3/2) * \text{hàng 1} + \text{hàng 2}$	0	-5	$-13/2$	-8
$(-2) * \text{hàng 1} + \text{hàng 3}$	0	3	1	-1

	X 1	X 2	X 3	Vế Phải
Hàng thứ 1	2	4	3	4
Hàng thứ 2	0	-5	$-13/2$	-8
$(3/5) * \text{hàng 2} + \text{hàng 3}$	0	0	$-29/10$	$-29/5$

	X 1	X 2	X 3	Vế Phải
Hàng thứ 1	2	4	3	4
Hàng thứ 2	0	-5	$-13/2$	-8
Hàng thứ 3	0	0	$-29/10$	$-29/5$

	X 1	X 2	X 3	Vế Phải
$(-3) * \text{hàng 3} + \text{hàng 1}$	2	4	0	-2
$(13/2) * \text{hàng 3} + \text{hàng 2}$	0	-5	0	5
$(10/-29) * \text{hàng 3}$	0	0	1	2

	X 1	X 2	X 3	Vế Phải
$(-4) * \text{hàng 2} + \text{hàng 1}$	2	0	0	2
$(1/-5) * \text{hàng 2}$	0	1	0	-1
$(10/-29) * \text{hàng 3}$	0	0	1	2

	X 1	X 2	X 3	Vế Phải
$(1/2) * \text{hàng 1}$	1	0	0	1
$(1/-5) * \text{hàng 2}$	0	1	0	-1
$(10/-29) * \text{hàng 3}$	0	0	1	2

Vậy nghiệm của hệ là $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1) Tính các định thức sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -324 & 721 & 621 \end{vmatrix} & \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} & \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

2) Tìm ma trận X thỏa mãn $AX = B$, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau bằng phương pháp Gauss - Jordan:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{d) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \text{e) } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{f) } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$$

5) Tìm hạng của các ma trận sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} & \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6) Giải các hệ phương trình đại số tuyến tính sau :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 19 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 = -14 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -13 \end{cases} \end{array}$$

CHƯƠNG 5 : HÀM HAI BIẾN

5.1 Hàm hai biến

5.1.1 Tập hợp phẳng

5.1.1.1 Tích Đề-Các R^2 :

Tích Đề - các R^2 (hay $R \times R$) là tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một cặp có thứ tự hai giá trị số thực x và y . Kí hiệu: $R^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$.

Nếu trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy ta có thể đồng nhất mỗi điểm $M(x, y)$ với một phần tử (x, y) trong R^2 . Khi đó R^2 còn gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy.

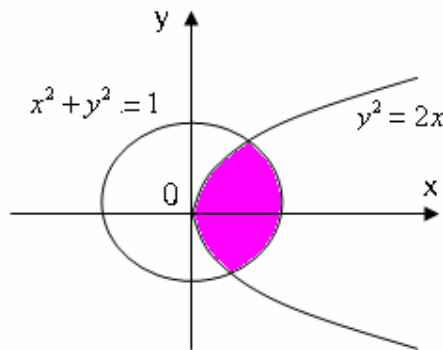
5.1.1.2 Khái niệm tập hợp phẳng: Mỗi tập hợp con D trong R^2 được gọi là một tập hợp phẳng (hay miền phẳng). Tập hợp phẳng D thường được biểu diễn qua hệ thức:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : \varphi_i(x, y) \leq 0 (< 0), i = 1, n\}$$

tức là mỗi điểm $M(x, y) \in D$ sẽ thỏa mãn các bất đẳng thức dạng $\varphi_i(x, y) \leq 0 (< 0)$

Ví dụ: 1) $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ - là miền trong đường tròn $x^2 + y^2 = 1$

2) $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1 ; y^2 < 2x\}$ (hình 5.1)



Hình 5.1

5.1.1.3 Các khái niệm liên quan.

- **Khoảng cách giữa hai điểm:** Cho điểm $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) \in R^2$

Khoảng cách giữa hai điểm M, N ký hiệu là $d(M, N)$ được xác định bởi công thức:

$$d(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- **δ - lân cận điểm:** Giả sử δ là một số dương. Ta gọi δ - lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$ là tập tất cả các điểm $M(x, y)$ của R^2 thỏa mãn khoảng cách từ M đến điểm M_0 nhỏ hơn δ .

$$U_\delta(M_0) = \{M \in R^2 : d(M(x, y), M_0) < \delta\}$$

- **Điểm trong:** Điểm $M_0 \in D$ gọi là điểm trong của D nếu tồn tại một δ - lân cận của M_0 nằm hoàn toàn trong D .

- **Tập mở:** Tập $D \in \mathbb{R}^2$ gọi là tập mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của nó.

Ví dụ: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$;

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y < 3, x^2 + y^2 < 1\}$

Nhận xét : Tập mở sẽ là tập thỏa mãn một hay nhiều bất đẳng thức dạng: $\varphi(x, y) < 0$

(tức là không có dấu “ = ” .)

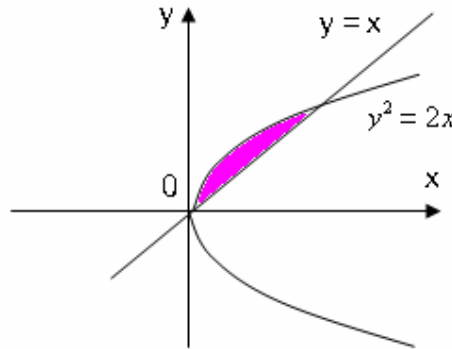
- **Điểm biên:** Điểm M_0 gọi là điểm biên của D nếu mọi lân cận của M_0 đều chứa những điểm thuộc D và những điểm không thuộc D .

Nhận xét : Nếu tập hợp phẳng $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) < 0\}$ thì điểm biên trên D là những điểm thỏa mãn $\varphi(x, y) = 0$.

Ví dụ:

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x < 0, x - y \leq 0\}$ có các điểm biên $M(x, y)$ thỏa mãn:

$y^2 - x = 0, 0 \leq x \leq 1$ và $x - y = 0, 0 \leq x \leq 1$.



Hình 5.2

- **Tập đóng:** Tập D chứa mọi điểm biên của nó gọi là tập đóng.
- **Tập bị chặn:** Tập D gọi là bị chặn nếu tồn tại một hình tròn chứa nó.

5.1.2 Khái niệm hàm hai biến

5.1.2.1. Định nghĩa: Cho miền D trong $\mathbb{R}^2$. Nếu tương ứng mỗi điểm $M(x, y) \in D$ với một giá trị duy nhất $z \in \mathbb{R}$ theo một quy luật f , thì f được gọi là hàm số thực của hai biến x và y xác định trên D . Kí hiệu: $z = f(x, y)$, D gọi là tập xác định.

+) Nếu hàm $f(x, y)$ không nói đến miền xác định thì ta phải hiểu tập xác định của $f(x, y)$ là tập tất cả các cặp $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa.

+) Tập giá trị của hàm $z = f(x, y)$ là tập tất cả các $z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $z = f(x, y)$ với (x, y) thuộc tập xác định.

Ví dụ: $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ có tập xác định là $D = \{(x, y): x^2 + y^2 > 1\}$

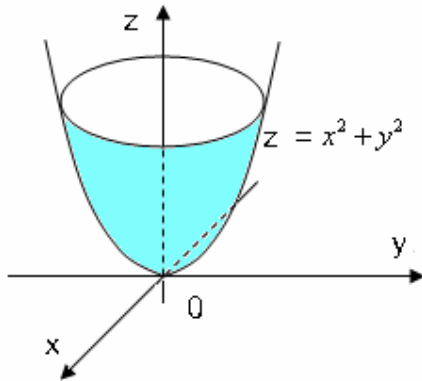
$Z = (x+y)\ln(x^2 - y^2)$ có tập xác định : (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^2 > 0$.

5.1.2.2. Biểu diễn hình học của hàm hai biến

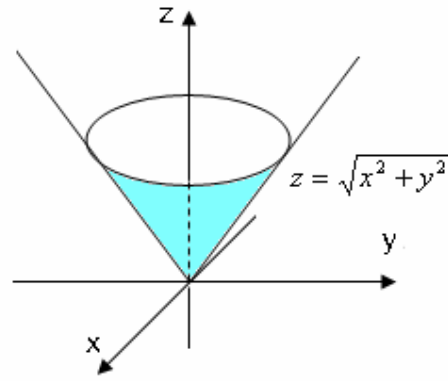
Trong hệ tọa độ Đề-các Oxyz, hàm $z = f(x, y)$ xác định trên miền D . Như vậy với mỗi điểm $M(x, y) \in D$ sẽ cho tương ứng duy nhất một điểm $P(x, y, z)$ với $z = f(x, y)$. Khi M chạy trong D thì điểm P di chuyển trong không gian sẽ vạch nên một mặt (S) (thông thường là mặt cong). Mặt (S) được gọi là **đồ thị** của hàm hai biến $z = f(x, y)$.

Ví dụ: 1) $z = x^2 + y^2$ là mặt Paraboloid (hình 5.3)

2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ là nửa mặt nón. (hình 5.4)



Hình 5.3



Hình 5.4

5.2 Giới hạn và sự liên tục của hàm hai biến

5.2.1. Giới hạn hàm hai biến

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$ (có thể không xác định tại M_0). Giá trị L gọi là giới hạn của $f(x, y)$ khi $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ nếu:

$\varepsilon > 0$ cho trước $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho: $\forall (x, y) \in U_\delta(M_0) : |f(x, y) - L| < \varepsilon$

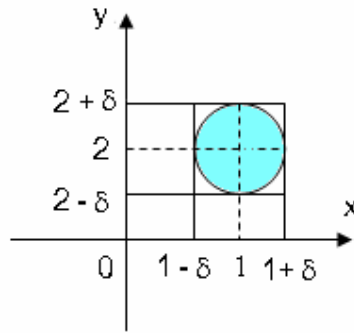
Ký hiệu: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = L$

Ví dụ 1: Chứng minh: $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (2x + 3y) = 8$.

Chứng minh: Với ví dụ trên sẽ có $M_0 = (1, 2)$, $L = 8$.

$\forall \varepsilon > 0$ cho trước tùy ý. Ta có đánh giá sau:

$$|2x + 3y - 8| = |2(x - 1) + 3(y - 2)| \leq 2|x - 1| + 3|y - 2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{5} + 3 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon \text{ nếu } |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}, |y - 2| < \frac{\varepsilon}{5}.$$



Hình 5.5

Chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Khi đó $\forall M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ ta có: $d_{MM_0} < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 < \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^2$. Suy

ra: $|x-1| < \frac{\varepsilon}{5}, |y-2| < \frac{\varepsilon}{5}$. Do vậy: $|2x+3y-8| < \varepsilon, \forall M(x, y) \in U_\delta(M_0)$.

Vậy $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (2x+3y) = 8$ (đpcm).

Ví dụ 2: Chứng minh: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ Có $M_0 = (0, 0), L = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ cho trước tùy ý. Ta có đánh giá sau:

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| < \varepsilon \text{ nếu } |x| < \varepsilon.$$

Chọn $\delta = \varepsilon$. Khi đó $\forall M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ ta có: $d_{MM_0} < \delta = \varepsilon \Leftrightarrow x^2 + y^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |x| < \varepsilon$. Do

$$\text{vậy: } \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq |x| < \varepsilon.$$

Vậy $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. (đpcm)

Ví dụ 3: Chứng minh rằng không tồn tại giới hạn $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+3y}{2x-y}$.

Chứng minh:

Chú ý rằng: quá trình điểm $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$ thì $x \rightarrow x_0$ và $y \rightarrow y_0$ độc lập với nhau.

Vì vậy nếu cho $M(x, y) \rightarrow M_0(x_0, y_0)$ theo hai hướng khác nhau mà $z = f(x, y)$ tiến tới hai giá trị khác nhau thì không tồn tại giới hạn: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$

Cho $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ theo hướng đường thẳng $y = x$ thì $\lim_{y=x \rightarrow 0} \frac{x+3x}{2x-x} = 3$

Cho $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ theo hướng đường thẳng $y = 3x$ thì $\lim_{y=3x \rightarrow 0} \frac{x+9x}{2x-3x} = -10$

Vậy giới hạn của hàm theo hai hướng khác nhau nên không tồn tại giới hạn $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+3y}{2x-y}$.

Chú ý:

- Khái niệm giới hạn vô cực cũng được định nghĩa tương tự như đối với hàm số một biến.
- Các tính chất về giới hạn của hàm hai biến được phát biểu tương tự các tính chất về giới hạn hàm một biến.
- Nếu hàm $f(x,y)$ là hàm sơ cấp của hai biến x và y thì hàm số có giới hạn tại mọi điểm mà nó xác định và giới hạn này bằng đúng giá trị của hàm tại điểm đó.

5.2.2 Sự liên tục của hàm hai biến

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và lân cận điểm $M_0(x_0, y_0)$. Ta nói hàm $f(x, y)$ liên tục tại M_0 nếu $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Khi đó điểm M_0 gọi là điểm liên tục của hàm số. Ngược lại hàm số không liên tục tại điểm M_0 thì M_0 là điểm gián đoạn của hàm số.

Chú ý: Nếu $f(x, y)$ là hàm số sơ cấp của hai biến x, y thì $f(x, y)$ sẽ liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của nó.

5.3 Đạo hàm và vi phân hàm hai biến

5.3.1 Đạo hàm riêng cấp 1.

5.3.1.1 Định nghĩa:

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D . Điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.

- Cho x_0 số gia Δx khi đó nhận được số gia tương ứng:

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Nếu tồn tại $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = L$ hữu hạn thì giới hạn L được gọi là đạo hàm riêng theo biến x của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

Ký hiệu: $L = z'_x(x_0, y_0)$, hay $L = f'_x(x_0, y_0)$, hoặc $L = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

$$\text{Vậy } z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

- Tương tự ta có định nghĩa đạo hàm riêng theo biến y của hàm $z = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$.

$$\text{Ký hiệu: } z'_y(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

$$\text{Vậy } z'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

- Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng theo biến x và y tại mọi $(x, y) \in D$. Khi đó các hàm số $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ cũng là các hàm 2 biến xác định trên D và được gọi là các đạo hàm riêng cấp một của hàm số $z = f(x, y)$.

5.3.1.2 Quy tắc tính đạo hàm riêng cấp một :

Khi tính đạo hàm riêng cấp một của hàm hai biến (hay hàm nhiều biến) theo một biến nào đó thì ta xem các biến còn lại là hằng số và sử dụng các công thức, các quy tắc tính đạo hàm như của hàm một biến đối với biến đã chọn.

• Ví dụ:

Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau theo các biến:

$$\begin{array}{lll} 1) z = x^{3y + \sin 2y} & 2) z = \ln \sin \frac{3x + 2y}{\sqrt{y}} & 3) z = \frac{x}{2x + 3y} - e^{3x + y} \arctg(xy) \\ 4) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) & 5) z = (3\sin 2x + 5y)^{(4x + 3y)} & 6) z = x^2 + y^3 + 3x^2y^3 \\ 7) z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

Giải:

$$1) z = x^{3y + \sin 2y}$$

$$\text{Tính } z'_x: \text{ Xem } y \text{ là hằng số, } x \text{ là biến, ta có: } z'_x = (3y + \sin 2y) \cdot x^{3y + \sin 2y - 1}$$

$$\text{Tính } z'_y: \text{ Xem } x \text{ là hằng số, } y \text{ là biến, ta có: } z'_y = (3 + 2\cos 2y) \cdot x^{3y + \sin 2y} \cdot \ln x$$

$$2) z = \ln \sin \frac{3x + 2y}{\sqrt{y}}.$$

$$\text{- Tính } z'_x: \text{ Xem } y \text{ là hằng số, } x \text{ là biến, ta có:}$$

$$z'_x = \frac{\left(\sin \frac{3x+2y}{\sqrt{y}} \right)'_x}{\sin \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}} = \frac{\frac{3}{\sqrt{y}} \cos \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}}{\sin \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}} = \frac{3}{\sqrt{y}} \cot g \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}$$

- Tính z'_y : Xem x là hằng số, y là biến, ta có:

$$z'_y = \frac{\left(\sin \frac{3x+2y}{\sqrt{y}} \right)'_y}{\sin \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}} = \frac{\left(\frac{-3x}{2\sqrt{y^3}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cos \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}}{\sin \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}} = \left(\frac{-3x}{2\sqrt{y^3}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cot g \frac{3x+2y}{\sqrt{y}}$$

Hoàn toàn tương tự cho các ví dụ còn lại

5.3.2 Đạo hàm riêng cấp 2

5.3.2.1 Định nghĩa :

Cho hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền $D \in \mathbb{R}^2$.

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1: f'_x, f'_y trên D .

Khi đó nếu f'_x, f'_y lại có các đạo hàm riêng theo biến x và y thì các đạo hàm riêng này được gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $z = f(x, y)$.

Có 4 đạo hàm riêng cấp 2 (được định nghĩa và có các ký hiệu sau):

$$\frac{\partial}{\partial x} (f'_x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = f''_{x^2} : \text{đạo hàm vuông}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (f'_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} : \text{đạo hàm chữ nhật}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (f'_x) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} : \text{đạo hàm chữ nhật}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (f'_y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = f''_{y^2} : \text{đạo hàm vuông}$$

5.3.2.2 Định lý Schwarz: (điều kiện để $f''_{xy} = f''_{yx}$ hay kết quả đạo hàm không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm.)

Xét hàm $z = f(x, y)$. Nếu tồn tại một lân cận của điểm $M_0 (x_0, y_0)$ để hàm số $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 : f''_{xy}, f''_{yx} và nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục tại $M_0 (x_0, y_0)$ thì $f''_{xy} = f''_{yx}$.

- **Chú ý :** Tất cả các hàm số xét trong chương trình học đều thỏa mãn định lý trên.

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng đến cấp 2 của các hàm số:

$$1) z = (x^2 + y^2)^2 \quad 2) z = \ln(x^2 + y^2) \quad 3) z = x^y \quad 4) z = e^{x-y^2} + \cos x \quad 5) z = \arctg \frac{x}{y}$$

Giải:

1) Các đạo hàm riêng cấp 1:

$$f'_x = 2.2x.(x^2 + y^2) = 4x^3 + 4xy^2 \quad ; \quad f'_y = 2.2y.(x^2 + y^2) = 4y^3 + 4x^2y$$

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= (f'_x)'_x = (4x^3 + 4xy^2)'_x = 12x^2 + 4y^2 & f''_{yx} &= (f'_y)'_x = (4y^3 + 4x^2y)'_x = 8xy \\ f''_{xy} &= (f'_x)'_y = (4x^3 + 4xy^2)'_y = 8xy & f''_{yy} &= (f'_y)'_y = (4y^3 + 4x^2y)'_y = 12y^2 + 4x^2 \end{aligned}$$

Nhận xét: $f''_{xy} = f''_{yx}$.

2) Ta có:

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{(x^2 + y^2)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2} & f'_y &= \frac{(x^2 + y^2)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ f''_{xx} &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_x = 2 \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & f''_{xy} &= \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ f''_{yx} &= \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} & f''_{yy} &= \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

Nhận xét: $f''_{xy} = f''_{yx}$.

- Hoàn toàn tương tự cho các ví dụ còn lại.

Như vậy : nếu $f(x, y)$ là hàm sơ cấp của các biến ta luôn có kết quả $f''_{xy} = f''_{yx}$ tức là đạo hàm riêng các cấp của $f(x, y)$ sẽ không phụ thuộc vào thứ tự lấy đạo hàm.

5.3.3 Vi phân toàn phần và ứng dụng.

5.3.3.1 Định nghĩa:

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ xác định trên miền D. Điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Cho x_0 số gia Δx , y_0 số gia Δy . Khi đó nhận được số gia của hàm số:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Nếu Δf có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\rho) \quad \text{với } \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

trong đó A, B là hằng số chỉ phụ thuộc x_0, y_0 và $\alpha(\rho)$ là VCB cấp cao hơn ρ khi $\rho \rightarrow 0$ thì biểu thức $A\Delta x + B\Delta y$ gọi là **vi phân toàn phần** của $z = f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và hàm $z = f(x, y)$ được gọi là **khả vi** tại $M_0(x_0, y_0)$

$$\text{Ký hiệu: } df = A\Delta x + B\Delta y$$

Ví dụ :

Xét tính khả vi của hàm số $z = xy$ tại điểm $M(1, 2)$

$$\begin{aligned} \text{Giải : } \Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= (1 + \Delta x)(2 + \Delta y) - 2 \\ &= 2\Delta x + \Delta y + \Delta x\Delta y \end{aligned}$$

$$\text{Chọn } A = 2, B = 1, \alpha(\rho) = \Delta x\Delta y \text{ có } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0 \Rightarrow \alpha(\rho) \text{ là VCB cấp cao}$$

hơn ρ khi $\rho \rightarrow 0$

Vậy $z = xy$ khả vi tại $M(1, 2)$ và $df = 2\Delta x + \Delta y$

5.3.3.2 Định lý

- Nếu $z = f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì tại đó tồn tại các đạo hàm riêng $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ và $df = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$.
- Ngược lại nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng $f'_x(x, y)$ và $f'_y(x, y)$ **liên tục** tại $M_0(x_0, y_0)$ thì $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$

Xét $z = x$ và $z = y$ ta có : $dx = \Delta x, dy = \Delta y$. Vậy $df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$

$$df = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

được gọi là **biểu thức vi phân toàn phần của $z = f(x, y)$**

Ví dụ : Tìm biểu thức vi phân toàn phần của :

$$z = xy \Rightarrow dz = ydx + xdy$$

$$z = 3\cos xy \Rightarrow dz = -3y \sin xy dx - 3x \sin xy dy$$

$$z = 2x^2 \cos y + e^{xy^2}$$

$$z = (x + \cos y)^{3x}$$

5.3.3.3 Ứng dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) và $f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0)$ không đồng thời bằng 0.

Ta có: $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha(\rho)$

với $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Nếu $\Delta x, \Delta y$ khá bé thì

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = df$$

Suy ra:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Công thức trên gọi là công thức tính gần đúng nhờ vi phân toàn phần.

Như vậy, với $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$ thì giá trị của hàm $f(x, y)$ tại điểm $M(x, y)$ - khá gần $M_0(x_0, y_0)$ - sẽ được tính thông qua các giá trị của hàm số và các đạo hàm riêng f'_x và f'_y tại M_0

Ví dụ: Tính gần đúng: $A = (1,05)^{2,96}$

Giải:

- Chọn $f(x, y) = x^y, x_0 = 1, y_0 = 3$ suy ra $\Delta x = 0,05; \Delta y = -0,04$

Vậy $A = f(1 + 0,05, 3 - 0,04)$.

- $f(1, 3) = 1, f'_x = yx^{y-1}, f'_y = x^y \ln x \Rightarrow f'_x(1, 3) = 3, f'_y(1, 3) = 0$

- Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$\begin{aligned} A &\approx f(1, 3) + f'_x(1, 3)\Delta x + f'_y(1, 3)\Delta y \\ &\approx 1 + 3 \cdot 0,05 - 0 \cdot 0,04 \\ &\approx 1,15 \end{aligned}$$

Chú ý:

Để áp dụng vi phân vào tính gần đúng ta cần chú ý:

- Chọn dạng biểu thức hàm số $f(x, y)$
- Chọn điểm $M_0(x_0, y_0)$ sao cho giá trị của hàm và các đạo hàm riêng của nó tại điểm M_0 có thể tính được thuận lợi. Từ đó xác định số gia của các đối số: $\Delta x, \Delta y$
- Áp dụng công thức tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Ví dụ

Tính $\arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$

Giải :

- **Chọn hàm số :** Ta nhận xét rằng $\arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$ là giá trị của hàm

$$Z = f(x,y) = \arctg\left(\frac{x}{y}-1\right) \text{ tại điểm } M(1,97 ; 1,02).$$

- **Chọn điểm $M_0(2, 1)$** khi đó

$$\Delta x = 1,97 - 2 = -0,03 \quad \Delta y = 1,02 - 1 = 0,02$$

- Tính

$$f'_x = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}-1\right)^2} = \frac{y}{y^2 + (x-y)^2} \quad f'_y = \frac{x}{y^2 + (x-y)^2}$$

Vậy

$$f'_x(M_0) = f'_x(2,1) = \frac{1}{1^2 + (2-1)^2} = 0,5 \quad ; \quad f'_y = f'_y(2,1) = -1 \quad ; \quad f(M_0) = f(2,1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

- **Áp dụng công thức tính gần đúng :**

$$\begin{aligned} \arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right) &= f(M_0) \approx f(M_0) + f'_x(M_0) \cdot \Delta x + f'_y(M_0) \cdot \Delta y \\ &= \pi/4 + (0,5) \cdot (-0,03) + 1 \cdot (0,02) \\ &\approx 0,75 \end{aligned}$$

Bài tập tương tự :

3) $\sqrt{(1,02)^3 + (3,97)^3}$, chọn $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, $x_0 = 1, y_0 = 4, \Delta x = 0,02, \Delta y = -0,03$.

4) $\sin 62^\circ \arctg 1,02$, chọn $f(x, y) = \sin x \cdot \arctg y$, $x_0 = \pi/3, y_0 = 1, \Delta x = \pi/90, \Delta y = 0,02$

5) $\ln(\sqrt[3]{1,02} + \sqrt[4]{0,92} - 1)$, chọn $f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$, $x_0 = 1, y_0 = 1, \Delta x = 0,02, \Delta y = -0,08$

5.4 Cực trị của hàm hai biến

5.4.1 Định nghĩa điểm cực trị.

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trong miền D . $M(x_0, y_0)$ là một điểm trong của D .

- Hàm $z = f(x, y)$ gọi là đạt **cực đại (CĐ)** tại M_0 nếu tồn tại một lân cận U của M_0 sao cho $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ với $(x, y) \in U$. Điểm M_0 gọi là điểm cực đại của hàm $z = f(x, y)$.
- Hàm $z = f(x, y)$ gọi là đạt **cực tiểu (CT)** tại M_0 nếu tồn tại một lân cận U của M_0 sao cho $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ với $(x, y) \in U$. Điểm M_0 gọi là điểm cực tiểu của hàm $z = f(x, y)$.
- Hàm $z = f(x, y)$ đạt cực đại hay cực tiểu tại M_0 gọi là hàm đạt **cực trị** tại M_0 . Điểm cực đại hay cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

5.4.2 Định lí 1(Điều kiện cần của cực trị).

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực trị tại M_0 và tại M_0 tồn tại các đạo hàm riêng hữu hạn thì các đạo hàm riêng ấy bị triệt tiêu, tức là: $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$.

Nhận xét:

Từ định lý này ta thấy để xét cực trị chỉ cần xét tại những điểm đạo hàm riêng bị triệt tiêu và những điểm không tồn tại đạo hàm. Những điểm đó gọi chung là **điểm tới hạn** hay **điểm dừng** của hàm số.

5.4.3 Định lí 2 (Điều kiện đủ của cực trị).

Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong miền D , $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm trong của D .

Nếu hàm $z = f(x, y)$ có đạo hàm riêng liên tục đến cấp hai trong lân cận của M_0 và $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0$ thì:

Đặt $f''_{xx}(M_0) = A$; $f''_{xy}(M_0) = B$; $f''_{yy}(M_0) = C$, Khi đó:

$B^2 - AC$	A	Kết luận về điểm M_0
-	-	M_0 là điểm cực đại
	+	M_0 là điểm cực tiểu
+		M_0 không là điểm cực trị
0		Chưa kết luận được về điểm M_0 . Điểm M_0 gọi là điểm nghi ngờ .

5.4.4 Quy tắc tìm cực trị địa phương

Quy tắc tìm cực trị

Bước 1: Tính z'_x ; z'_y , Tính $z''_{xx} = A$, $z''_{xy} = B$, $z''_{yy} = C$, $\Delta = B^2 - AC$

Bước 2: Tìm điểm tới hạn hay điểm dừng :

Giải hệ $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ Được các nghiệm $M_i(x_i, y_i)$

Bước 3 : Tại mỗi điểm M_i tính các giá trị :

$z''_{xx}(M_i) = A_i; z''_{xy}(M_i) = B_i; z''_{yy}(M_i) = C_i, \Delta_i = B_i^2 - A_i C_i$ và kết luận về điểm M_i dựa vào định lí 2.

Chú ý: trong trường hợp có nhiều điểm dừng thì ta có thể lập bảng như sau:

Điểm	A	B	C	$B^2 - AC$	Kết luận về M_i
$M_i(x_i, y_i)$	A_i	B_i	C_i	$B_i^2 - A_i C_i$	
.....					

Ví dụ: Tìm cực trị địa phương của các hàm số sau:

1) $z = x + y - xe^y$

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

3) $z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y + 1$

4) $z = x^4 + 2y^4 - 14x^2 - y^2 + 24x + 1$

5) $z = x^2 - 8xy + 4y^3 + 10y + 1$

6) $z = 2y^3 - 3xy^2 + 2x^3 + 3x^2$

7) $z = x^2 - 2y^2 + 3xy + x - 7y + 1$

8) $z = x^3 + y^2 - 2xy + x - 2y - 4$

Giải:

1) $z = x + y - xe^y$

$\Rightarrow z'_x = 1 - e^y; z'_y = 1 - xe^y; z''_{xx} = 0 = A, z''_{xy} = -e^y = B, z''_{yy} = -xe^y = C$

-Giải hệ: $\begin{cases} z'_x = 1 - e^y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z'_y = 1 - xe^y = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$. Vậy hàm số có một điểm dừng $M(1, 0)$.

-Tính $A = 0, B = -1, C = -1, \Delta = 1 > 0$. Vậy $M(1, 0)$ không là điểm cực trị.

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

$z'_x = 3x^2 - 3y; z'_y = 3y^2 - 3x;$

$z''_{xx} = 6x = A; z''_{xy} = -3 = B; z''_{yy} = 6y = C, B^2 - AC = 9 - 36xy$

-Giải hệ: $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ ta được hai điểm dừng $M_1(0, 0); M_2(1, 1)$.

-Lập bảng:

Điểm	$A = 6x$	$B^2 - AC$ $(9 - 36xy)$	Kết luận
$M_1(0, 0)$	0	9	M_1 không là điểm cực trị.
$M_2(1, 1)$	$6 > 0$	$9 - 36.36 < 0$	M_2 là điểm cực tiểu và $z_{CT} = -1$

Kết luận: Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $M_2(1, 1)$ và $z_{CT} = -1$.

$$3) \quad z = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y + 1$$

$$z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30; \quad z'_y = 6xy - 18$$

$$z''_{xx} = 6x = A; z''_{xy} = 6y = B; z''_{yy} = 6x = C; \quad B^2 - AC = 36(y^2 - x^2)$$

$$\text{-Giải hệ: } \begin{cases} z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \\ z'_y = 6xy - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Hàm số có 4 điểm dừng $M_1(1, 3); M_2(3, 1); M_3(-1, -3); M_4(-3, -1)$.

Lập bảng:

Điểm	$A = 6x$	$B^2 - AC = 36(y^2 - x^2)$	Kết luận
$M_1(1, 3)$	$6 > 0$	+	M_1 không là điểm cực trị
$M_2(3, 1)$	$18 > 0$	-	M_2 là điểm cực tiểu và $z_{CT} = -71$
$M_3(-1, -3)$	$-6 < 0$	+	Không đạt cực trị
$M_4(-3, -1)$	$-18 < 0$	-	M_4 là điểm cực đại và $z_{CD} = 73$

Kết luận: Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $M_2(3, 1)$ và đạt cực đại tại $M_4(-3, -1)$.

- Cách làm tương tự cho các phần còn lại.

5.5 Phương pháp bình phương bé nhất (tối thiểu)

Trong khoa học kỹ thuật, ta thường gặp bài toán: tìm mối liên hệ giữa hai đại lượng biến thiên x và y . Mối quan hệ đó được biểu diễn dưới dạng hàm số thông qua một loạt các thí nghiệm đo đạc. Hàm số đó gọi là **hàm thực nghiệm**.

chẳng hạn : mối liên hệ giữa chiều cao h và tuổi của cây, hay là mối liên hệ giữa thể tích của cây với đường kính thân cây khi cây ở độ cao 1,3 mét.

Có nhiều phương pháp xây dựng hàm hàm số từ các số liệu thực nghiệm và một trong các phương pháp đó là **phương pháp bình phương bé nhất**.

5.5.1 Nội dung phương pháp bình phương bé nhất

5.5.1.1 Bài toán:

Hai đại lượng x, y qua thực nghiệm có mối quan hệ số theo bảng:

x	x_1	x_2	x_3	x_n
y	y_1	y_2	y_3	y_n

Giả sử về mặt lý thuyết, x và y có mối quan hệ dạng $y = F(x)$, trong đó quy luật F ta chưa được biết cụ thể. Ta biết rằng, nếu $F(x)$ có đạo hàm đến bậc n tại x thì có thể xấp xỉ $F(x)$ bằng một đa thức dạng Tay – lo hoặc Mắc- lo – ranh :

$$F(x) \approx f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

hoặc có thể xấp xỉ $f(x)$ bằng một tổng có dạng chuỗi Fourier :

$$F(x) \approx f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \dots + a_n\cos nx + b_n\sin nx$$

Như vậy trong các dạng xấp xỉ trên hàm $f(x)$ có chứa các tham số $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ chưa biết

Đặt $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i$ gọi là độ lệch giữa điểm lý thuyết $N_i(x_i, f(x_i))$ và điểm thực nghiệm $M_i(x_i, y_i)$.

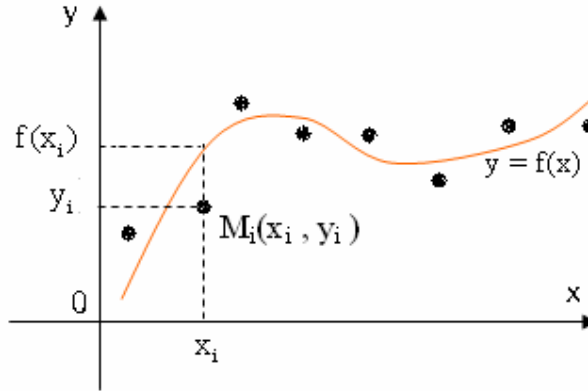
$$\text{Thiết lập } U = (f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \dots + (f(x_n) - y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \quad (5-1)$$

U được gọi là tổng bình phương các độ lệch.

Yêu cầu đặt ra: xác định các tham số trong $y = f(x)$ sao cho tổng bình phương các độ lệch U là nhỏ nhất.

Ta có thể mô tả phương pháp trên bằng cách sau:

Trong mặt phẳng Oxy, có các điểm thực nghiệm $M_i(x_i, y_i)$



Hình 5.6

Cần xác định các hệ số trong $f(x)$ để cho tổng bình phương khoảng cách từ các điểm thực nghiệm $M(x_i, y_i)$ đến đường cong $y = f(x)$ là nhỏ nhất, với điều kiện này ta có thể thay bằng tổng bình phương các độ lệch tung độ giữa hàm $f(x)$ lý thuyết và thực nghiệm tại các điểm $M(x_i, y_i)$ là nhỏ nhất.

Phương pháp tìm hàm thực nghiệm như trên gọi là phương pháp bình phương bé nhất.

5.5.1.2 Phương pháp bình phương bé nhất

- Đa thức suy rộng - nội dung của phương pháp bình phương bé nhất

Cho hệ hàm số $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}$ trong đó các hàm số $\varphi_k(x)$ đã được biết.

Hàm $\phi_m(x) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x)$ được gọi là đa thức suy rộng trên hệ hàm cơ sở

$$\{\varphi_k(x)\}, k = \overline{1, m}$$

Hai đại lượng x, y qua thực nghiệm có mối quan hệ số theo bảng:

x	x_1	x_2	x_3		x_n
y	y_1	y_2	y_3		y_n

Thay các giá trị x_i vào các hàm $\varphi_k(x)$ thì ta được các véc tơ $\vec{\varphi}_k(x)$:

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_1(x) &= (\varphi_1(x_1), \varphi_1(x_2), \varphi_1(x_3), \dots, \varphi_1(x_n)) \\ \vec{\varphi}_2(x) &= (\varphi_2(x_1), \varphi_2(x_2), \varphi_2(x_3), \dots, \varphi_2(x_n)) \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{\varphi}_m(x) &= (\varphi_m(x_1), \varphi_m(x_2), \varphi_m(x_3), \dots, \varphi_m(x_n)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Theo (5.1) thì cần xác định các a_k để cho

$$U = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{k=1}^m a_k \varphi_k(x_i) \right)^2 \rightarrow \min \quad (5.3)$$

thay (5.2) vào (5.3) và do a_k phải thỏa mãn hệ các phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial a_2} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial a_3} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial U}{\partial a_m} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

hay là phương trình $B.A = C$, với

$$B = (b_{rs}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad \text{gọi} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\text{trong đó } b_{rs} = \langle \vec{\varphi}_r, \vec{\varphi}_s \rangle = \sum_{i=1}^n \varphi_r(x_i) \varphi_s(x_i), \quad c_r = \langle \vec{y}, \vec{\varphi}_r \rangle = \sum_{i=1}^n y_i \varphi_r(x_i)$$

(ký hiệu $\langle \vec{\varphi}_r, \vec{\varphi}_s \rangle$ là tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{\varphi}_r$ và $\vec{\varphi}_s$)

Như vậy việc xác định các a_k được đưa về giải một hệ phương trình đại số tuyến tính với ma trận hệ số là B – là một ma trận đối xứng, và vế phải là C

Trong thực tế người ta thường sử dụng hệ hàm $\{\varphi_k(x)\}$ là các đa thức đại số, tức là :

$\{\varphi_k(x)\} = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^q\}$, khi đó $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ và các hệ số a_k sẽ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \dots \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{cases} \quad (5.6)$$

5.5.1.3 Các trường hợp cụ thể

- $f(x) = a_0 + a_1x$

Trường hợp này, trong công thức (5.6) ứng với $m = 1$ và $\varphi_1(x) = 1$; $\varphi_2(x) = x$

$$\begin{cases} a_0n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (5.7)$$

Khi đó đường thẳng $y = a_0 + a_1x$ tìm được là đường thẳng tốt nhất theo phương pháp bình phương tối thiểu

Ví dụ 1: Giả sử $y = a_0 + a_1x$. Hãy xác định a và b theo phương pháp bình phương bé nhất biết kết quả thực nghiệm được cho trong bảng sau:

x	-2	0	1	2	5
y	0,5	1	1,5	2	3

Giải: $n = 5$.

Để xác định hệ trên, ta lập bảng sau:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-2	0,5	4	-1
2	0	1	0	0
3	1	1,5	1	1,5
4	2	2	4	4
5	5	3	25	15
Tổng	6	8	34	19,5

Vậy ta có hệ
$$\begin{cases} 5a_0 + 6a_1 = 8 \\ 6a_0 + 34a_1 = 19,5 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{155}{134}; a_1 = \frac{99}{268}$$

Do đó hàm thực nghiệm cần tìm là $y \approx \frac{99}{268}x + \frac{155}{134}$.

Ví dụ 2: Câu hỏi tương tự với bảng số sau:

x	-1	0	1	2	3	4
y	1	1	2	1	2	3

Giải: $n = 6$.

Lập bảng

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1	1	1	-1
2	0	1	0	0
3	1	2	1	2
4	2	1	4	2
5	3	2	9	6
6	4	3	16	12
Tổng	9	10	31	21

Vậy ta có hệ:
$$\begin{cases} 31a + 9b = 21 \\ 9a + 6b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{35} \\ b = \frac{121}{105} \end{cases} \cdot \text{Vậy } y \approx \frac{12}{35}x + \frac{121}{105}$$

• $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

Trường hợp này ta có $\varphi_1(x) = 1$; $\varphi_2(x) = x$, $\varphi_3(x) = x^2$

Lập bảng:

TT	$\bar{x}$	$\bar{\varphi}_1(x)$ (1)	$\bar{\varphi}_2(x)$ (x)	$\bar{\varphi}_3(x)$ (x^2)	x^3	x^4	$\bar{y}$ (y)	x.y	$x^2 \cdot y$
1	x_1	1	x_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	y_1	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
2	x_2	1	x_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	y_2	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
...		...							
n	x_n	1	x_n	x_n^2	x_n^3	x_n^4	y_n	$x_n y_n$	$x_n^2 y_n$
tổng		n	$\sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i^3$	$\sum_{i=1}^n x_i^4$	$\sum_{i=1}^n y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i$	$\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$

Giải hệ phương trình sau để xác định a_0 , a_1 , a_2

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

Ví dụ :

Xác định hàm số dạng $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ theo phương pháp bình phương bé nhất dựa theo số liệu thực nghiệm sau :

x	1	3	6	7	8	13
y	1	10	52	80	100	300

Lập bảng

TT	1	x	x^2	x^3	x^4	y	x.y	$x^2.y$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	9	27	81	10	30	90
3	1	6	36	216	1296	52	312	1872
4	1	7	49	343	2401	80	560	3920
5	1	8	64	512	4096	100	800	6400
6	1	13	169	2197	28561	300	3900	50700
Tổng	6	38	328	3296	36436	543	5603	62983

Giải hệ :

$6a_0 + 38a_1 + 328a_2 = 543$	Tính được $a_0 \approx 3,292$
$38a_0 + 328a_1 + 3296a_2 = 5603$	$a_1 \approx -4,08$
$328a_0 + 3296a_1 + 36436a_2 = 62983$	$a_2 \approx 2,07$

Vậy quan hệ giữa x và y theo dạng $y = 3,292 - 4,08x + 2,07.x^2$

Nhận xét

- Phương pháp bình phương bé nhất áp dụng được khi đại lượng y biểu diễn tuyến

tính qua đại lượng x dạng: $y = \sum_{i=1}^k a_i \varphi_i(x)$, với $\varphi_i(x)$ là các hàm số đã cho.

Ví dụ các dạng như :

$$y = ax^2 + bx$$

$$y = ax^2 + b$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a \sin x + b \cos x +$$

Khi đó việc tìm các hệ số a_i theo phương pháp bình phương bé nhất sẽ luôn dẫn về một hệ phương trình đại số tuyến tính với các ẩn a_i . Hệ này là một hệ Cramer nên luôn có duy nhất nghiệm.

- Một số dạng quan hệ có thể đưa về dạng tuyến tính để áp dụng được phương pháp

phương bé nhất.

➤ $y = ax^\alpha \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x + \ln a$. Đặt $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $B = \ln a \Rightarrow$ đưa về dạng $Y = \alpha X + B$

➤ $y = ae^{-bx}$ đưa về dạng $Y = AX + B$ trong đó $Y = \ln y$, $X = x$, $A = -b$, $B = \ln a \dots$

Ví dụ 3: (sinh viên tự giải)

Giả sử $y = ax^2 + b$. Hãy lập hệ phương trình xác định a và b theo phương pháp bình phương bé nhất và xác định a, b biết kết quả thực nghiệm được cho trong bảng sau:

x	1	2	3	4	5
y	1.3	9.8	25.1	45.5	73.2

Ví dụ 4: (sinh viên tự giải)

Giả sử $y = ax^2 + bx$. Hãy lập hệ phương trình xác định a và b theo phương pháp bình phương bé nhất và xác định a, b biết kết quả thực nghiệm được cho trong bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6,5	0,5	0,2	3,5	9,5	21,1

Bài tập tương tự:

1) $y = ax + b$ với bảng

X	-1	1	2	3	4	5
y	-7.7	2.3	6.8	12.5	17.1	21.9

Đáp số: hệ $\begin{cases} 56a + 14b = 239 \\ 14a + 6b = 52.9 \end{cases}$ suy ra $a = 4.95$, $b = -2.74$.

2) $y = ax^2 + b$ với bảng

X	-1	0	1	2	-2	3
Y	5.1	2.5	4.5	13.8	14.2	29.5

ĐS: hệ: $\begin{cases} 115a + 19b = 387.1 \\ 19a + 6b = 69.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 3.04 \\ b \approx 1.97 \end{cases}$

3) $y = ax^2 + bx$ với bảng

X	1	-2	3	-1	5	6
Y	-1.8	15.5	6.3	6.2	29.5	47.7

ĐS: hệ: $\begin{cases} 2020a + 360b = 2577.8 \\ 360a + 76b = 413.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \approx 1.965 \\ b \approx -3.86 \end{cases}$

BÀI TẬP CHƯƠNG 5 : HÀM HAI BIẾN

Bài 1: Tìm miền xác định và biểu diễn chúng lên mặt phẳng Oxy.

1) $z = \sqrt{\frac{1-x^2}{a^2-y^2}}$ 2) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ 3) $z = \frac{1}{R^2-x^2-y^2}$ 4) $z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$

5) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ 6) $z = \sqrt{4-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-1}$ 7) $z = \ln xy$

8) $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \frac{1}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$

Bài 2: Biểu diễn các miền phẳng sau lên mặt phẳng tọa độ 0xy :

1) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ 2) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq 1\}$

3) $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 2x \leq y \leq 2x+3\}$ 4) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x}\}$

5) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x\}$ 6) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2ax, x^2 + y^2 \geq a^2\}$

7) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$

Bài 3: Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau theo các biến:

1) $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ 2) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ 3) $z = \arctg \frac{y}{x}$ 4) $z = x^y$

5) $z = (1 + xy)^y$ 6) $z = x^{x^y}$ 7) $z = x^2y + 3y^4x^2 + e^{(x+3y)}$ 8) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

9) $z = (2x + 3 \sin xy)e^{(3x+2y)}$ 10) $z = \ln \left(\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}} \right)$ 11) $z = (x + \sin y)^{(e^{3x} + \ln xy)}$

12) $z = a^{(x^2 + x^3 + 3x^2y^3)}$ 13) $z = \frac{x^3 + y}{y + x} - e^x \cdot \arctg y$ 14) $z = \lg(x+y) \cdot e^{\frac{x}{y}}$ 15) $z = xy \cdot \ln(xy)$

16) $z = \arctg \frac{y}{x+2y}$ 17) $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2y^2}}$ 18) $z = (x+2y)^{y^3} (x > 0)$

Bài 4: Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau:

- 1) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$
- 2) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
- 3) $z = \frac{x-y}{x+y}$
- 4) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- 5) $z = (x^2 + y^2)^2$
- 6) $z = e^{x-y^2} + \cos(x+3y)$
- 7) $z = \ln(x^2 + y^2)$
- 8) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{(x+y)}$
- 9) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

Bài 5: Tìm vi phân toàn phần của các hàm số sau:

- 1) $z = \sin(x^2 + y^2)$
- 2) $z = e^x (\cos y + x \sin y)$
- 3) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$
- 4) $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$

Bài 7: Tính gần đúng giá trị các biểu thức sau:

- 1) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$
- 2) $(1,04)^{2,03}$
- 3) $\sqrt{5 \cdot e^{0,02} + (2,03)^2}$
- 4) $\sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$
- 5) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$
- 6) $\sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$

Bài 8: Tìm cực trị địa phương của các hàm hai biến sau:

- 1) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$
- 2) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
- 3) $z = x + y - xe^y$
- 4) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
- 5) $z = x^3 + 3y^2x - 15x - 12y$
- 6) $z = x^3 + y^3 - 9xy + 20$
- 7) $z = 2y^2 - 4xy + 2x^3 - 2x$
- 8) $z = x^3 + 3y^2x - 39x - 36y$
- 9) $z = x^3 + y^3 - 3xy$
- 10) $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 5$
- 11) $z = 3y^3 + 4x^2y + 24xy + 1$
- 12) $z = x^2 + 8x + y^3 + 13y - 8xy + 9$
- 13) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$
- 14) $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
- 15) $z = x^3y^2(6 - x - y), x > 0, y > 0$
- 16) $z = x^2y - xy + y^2$

Bài 8:

Hai đại lượng x, y có mối quan hệ bậc nhất với nhau $y = ax + b$ và có bảng giá trị tương ứng sau:

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4.9	7.9	11.1	14.1	17

Xác định giá trị a, b theo phương pháp bình phương bé nhất.

Bài 9: Câu hỏi tương tự bài 8 với bảng số

x	1	2	3	4	5
y	2.9	6.1	9.2	11.8	16

Bài 10: Hai đại lượng x, y có mối quan hệ bậc hai với nhau $y = ax^2 + b$ và có bảng giá trị tương ứng sau:

x	1	2	3	4	5
y	0.1	3	8.1	14.9	23.9

Xác định giá trị a, b theo phương pháp bình phương bé nhất.

Bài 11: Hai đại lượng x, y có mối quan hệ bậc hai với nhau $y = ax^2 + bx + c$ và có bảng giá trị tương ứng sau:

x	1	2	3	4	5
y	2.9	8.9	19.1	33.2	50.8

Xác định giá trị a, b theo phương pháp bình phương bé nhất.

Bài 12: Hai đại lượng x, y có mối quan hệ bậc hai với nhau $y = ax^2 + bx$ và có bảng giá trị tương ứng sau:

x	1	2	3	4	5	6
y	4,9	16,5	33	55,5	84	119

Xác định giá trị a, b theo phương pháp bình phương bé nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1. Nguyễn Đình Trí và nhiều tác giả.** Toán cao cấp tập I, II, III. NXB ĐH và THCN, 2001.
- 2. G.N.Phichtengon.** Cơ sở giải tích toán học. Tập I, II và III. NXB Giáo dục, 1977
- 3. Ngô Thúc Lan.** Đại số tuyến tính. NXB ĐH và THCN, 1970