TS. TRẦN ĐẮC SỬ

TRẮC ĐỊA
CÔNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

9/10/2009

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI
HÀ NỘI - 2007

Chương 2
ỨNG DỤNG CÔNG NGHỆ ĐỊNH VỊ VỆ TINH TRONG TRẮC ĐỊA CÔNG TRÌNH

2.1. CÁC HỆ THỐNG ĐỊNH VỊ VỆ TINH

Từ những năm 60 của thế kỷ trước, cơ quan hàng không và vũ trụ của Mỹ, Nga đã tiến hành các chương trình nghiên cứu, phát triển hệ thống dẫn đường và định vị bằng vệ tinh nhân tạo. Hệ thống định vị dẫn đường bằng vệ tinh thế hệ đầu tiên là hệ thống TRANSIT (Mỹ) và SIKADA (Nga). Một thời gian ngắn sau đó các hệ thống định vị trên bắt đầu được ứng dụng trong trắc địa, tuy nhiên độ chính xác đạt được của các hệ thống trên là không cao.

Theo thời gian, hệ thống định vị vệ tinh ngày càng được phát triển và hoàn thiện cả về thiết bị thu phát cũng như phần mềm xử lý số liệu. Trong ngành trắc địa, phạm vi ứng dụng của công nghệ định vị vệ tinh cũng được mở rộng và đạt hiệu quả cao ở nhiều loại hình công việc. Đối với chuyên ngành trắc địa công trình, công nghệ định vị vệ tinh có tiềm năng rất lớn để giải quyết các công việc: định vị công trình, xây dựng các mạng lưới trắc địa chuyên dùng chính xác cao, quan trắc biến dạng công trình....

Cho đến nay các hệ thống định vị vệ tinh có tiềm năng ứng dụng hiệu quả trong trắc địa là NAVSTAR - GPS (Mỹ), GLONASS (Nga), Galileo (Cộng đồng châu Âu). Các hệ thống định vị nêu trên có nguyên lý cấu trúc chung, bao gồm 3 thành phần (được gọi là đoạn) như sau:

1- Đoạn không gian (Space Segment): bao gồm một số vệ tinh trên quỹ đạo.

2- Đoạn điều khiển (Control Segment): bao gồm một trạm điều khiển trung tâm và một số trạm theo dõi phân bố tại những vị trí khác nhau trên Trái Đất.

3- Đoạn sử dụng (User Segment): bao gồm các thiết thu và xử lý tín hiệu vệ tinh.

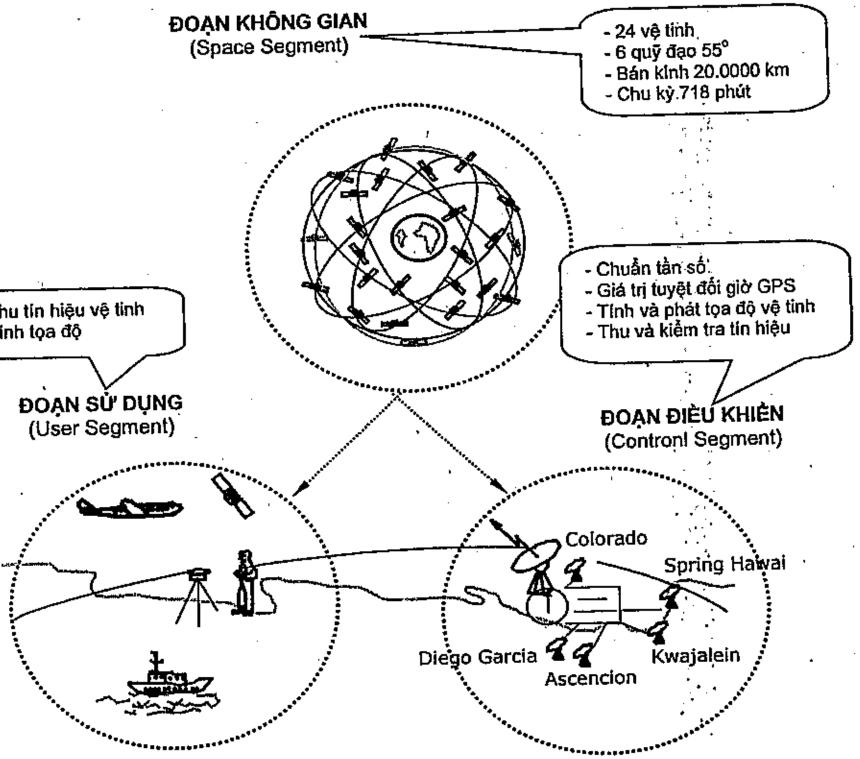
2.1.1. Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System - GPS)

Hệ thống định vị toàn cầu có tên đầy đủ là Navigation Satellite And Ranging Global Positioning System (NAVSTAR GPS) được bắt đầu triển khai từ những năm 1970 do quân đội Mỹ chủ trì. Vào năm 1978 vệ tinh đầu tiên được phóng lên quỹ đạo và đến 8/12/1993 trên 6 quỹ đạo đã có đủ 24 vệ tinh.

Ban đầu nhiệm vụ chủ yếu của hệ thống là xác định tọa độ không gian và tốc độ chuyển động của điểm xét trên tàu vũ trụ, máy bay, tàu thuỷ và trên đất liền phục vụ cho bộ quốc phòng Mỹ. Vào đầu thập kỷ 80, hệ thống GPS đã chính thức cho phép sử dụng trong dân sự. Từ đó các nhà khoa học của nhiều nước đã tập trung nghiên cứu phát triển công nghệ GPS để đạt được những thành quả cao nhất trong việc phát huy nguồn tiềm năng to lớn này. Hướng nghiên cứu chủ yếu đi vào các lĩnh vực:

- Chế tạo máy thu tín hiệu.
- Xây dựng phần mềm xử lý tín hiệu đáp ứng cho nhiều mục đích.
- Thiết lập và phát triển công nghệ ứng dụng trong các chuyên ngành.

Song song với hệ thống GPS của Mỹ, Liên Xô (cũ) cũng đã xây dựng một hệ thống định vị toàn cầu tương tự, mang tên GLONASS (Global Navigation Satellite System), được đưa vào sử dụng từ năm 1982. Nhưng do nhiều điều kiện khách quan nên ít được phổ biến hơn. Hiện nay, liên minh Châu Âu cùng một số nước phát triển cũng đã cho ra đời hệ thống định vị toàn cầu mang tên Galileo (GNSS) với mục đính sử dụng cho dân sự.

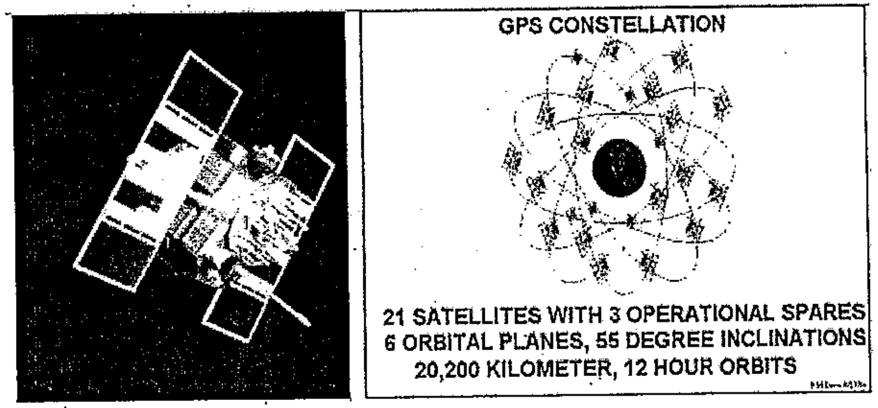


Hình 2.1 - Sơ đồ cấu trúc của hệ thống định vị toàn cầu GPS

Hệ thống định vị toàn cầu - GPS bao gồm 3 bộ phận là đoạn không gian (Space Segment), đoạn điều khiển (Control Segment) và đoạn sử dụng (User Segment).

2.1.1.1. Đoạn không gian

Đoạn không gian đến nay bao gồm 24 vệ tinh chuyển động trên 6 mặt phẳng quỹ đạo và 3 vệ tinh dự trữ. Vệ tinh chuyển động ở độ cao khoảng 20180km. Mặt phẳng quỹ đạo nghiêng so với mặt phẳng xích đạo Trái Đất một góc 55^o, quỹ đạo của mỗi vệ tinh cách nhau 60^0 kinh. Chu kỳ chuyển động của vệ tinh là gần 12h đồng hồ. Tất cả các vệ tinh GPS đều có thiết bị tạo dao động tần số chuẩn cơ sở $f_0 = 10,23$ MHz. Từ tần số cơ sở f_0 sẽ tạo ra hai tần số sóng tải L_1, L_2. ($L_2 = 120f_0 = 1227.60$ MHz.*PS*, $L_1 = 154f_0 = 1575.42$ MHz.)



Hình 2.2 - Vệ tinh và quỹ đạo vệ tinh GPS

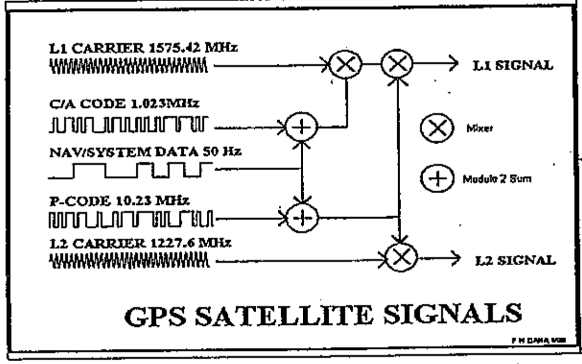
Các sóng tải này được điều biến bởi các mã, mã C/A và mã P. Sơ đồ liên hệ giữa các sóng tải và các mã điều biến được mô tả trong hình 2.3.

Mã C/A (Coarse/Accquisition code) là mã thô cho phép sử dụng rộng rãi. Mã C/A là một chuỗi nhị phân mang tính chất tựa ngẫu nhiên, có tần số 1.023 MHz, tương ứng với bước sóng 293 m. Chu kỳ của mã C/A là 1 mi-li-giây, mỗi vệ tinh phát đi một mã C/A khác nhau và mã C/A chỉ điều biến sóng tải L_1.

Mã P (Precission code) là mã chính xác, được dùng cho mục đích quân sự là chủ yếu. Mã P cũng là một chuỗi nhị phân nhưng phức tạp hơn, có tần số 10,23 MHz, tương ứng với bước sóng 29,3 m, có chu kì 267 ngày. Người ta chia mã P thành 38 đoạn, mỗi đoạn dài 7 ngày và mỗi đoạn điều biến cho một vệ tinh, sau 7 ngày lại thay đổi. Bằng cách chia và điều biến này mã P rất khó bị giải mã.

Theo thiết kế, độ chính xác định vị GPS có thể đạt độ chính xác cỡ 1% độ dài bước sóng, nghĩa là chỉ với mã thô C/A cũng có thể đạt độ chính xác cỡ 3 m. Chính vì thế phía

Mỹ đã chủ động làm nhiễu tín hiệu bằng kỹ thuật SA (Selective Availability) nhằm hạ thấp độ chính xác định vị. Từ ngày 20-05-2000 Mỹ đã bỏ chế độ nhiễu SA.



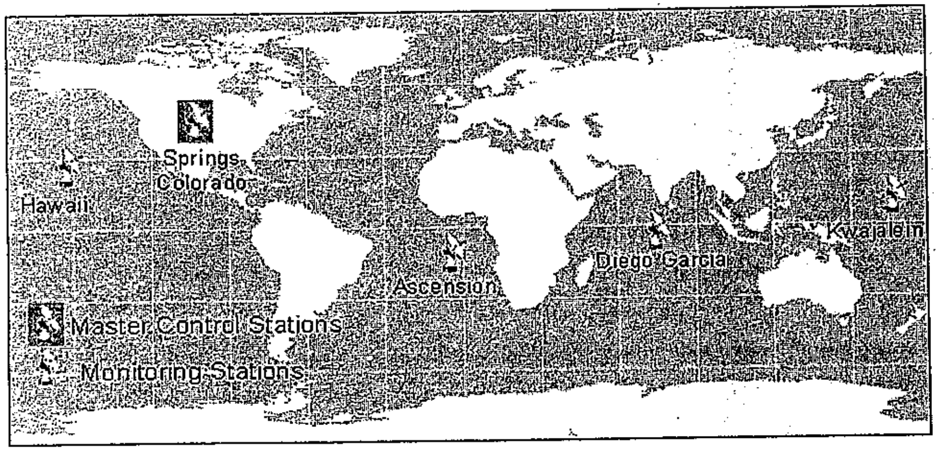
L_1: C/A-code 1.023 MHz P - code 10,23 MHz Thông tin đạo hàng	
L_2: P - code 10,23 MHz Thông tin đạo hàng	

Hình 2.3 - Các thông tin điều biến sóng tải L_1, L_2

Ngoài hai sóng tải L_1 và L_2 phục vụ mục đích định vị cho người sử dụng, các vệ tinh còn dùng hai sóng tần số 1783.74 MHz và 2227.5 MHz để trao đổi thông tin với các trạm điều khiển trên mặt đất.

2.1.1.2. Đoạn điều khiển

Đoạn điều khiển gồm một trạm điều khiển trung tâm đặt tại Colorado Springs và bốn trạm theo dõi phân bố đều quanh Trái Đất, đặt tại Hawaii (Thái Bình Dương), Ascension Island (Đại Tây Dương), Diego Garcia (Ấn Độ Dương) và Kwajalein (Tây Thái Bình Dương).



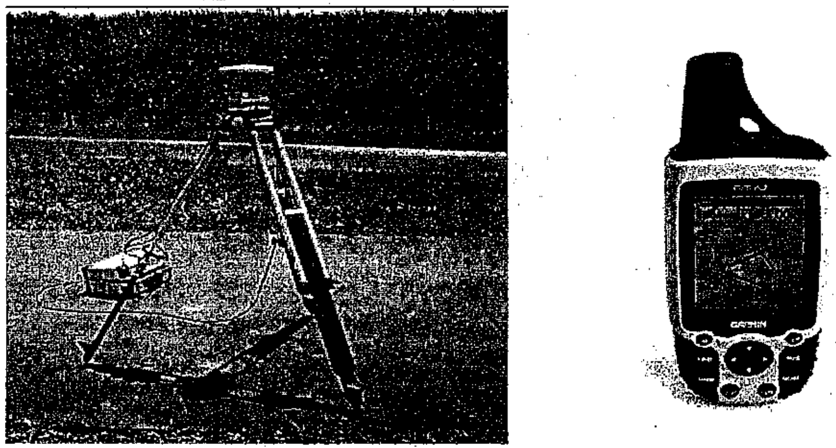
Hình 2.4 - Sơ đồ vị trí các trạm theo dõi và trạm điều khiển GPS

Các trạm điều khiển liên tục theo dõi sự hoạt động của các vệ tinh. Đồng thời trên mỗi trạm theo dõi đều có các máy thu GPS, cho phép đo khoảng cách, sự thay đổi khoảng cách và cả các số liệu khí tượng. Các số liệu này được gửi tới trạm trung tâm xử lý, kết quả tính toán là các lịch vệ tinh (Ephemerit) và số cải chính đồng hồ vệ tinh. Sau đó các thông tin này được chuyển lên các vệ tinh, từ đó chuyển đến các máy thu của người sử dụng.

Như vậy nhiệm vụ của đoạn điều khiển là rất quan trọng, nó không chỉ điều chỉnh, theo dõi mọi hoạt động của các vệ tinh mà còn liên tục cập nhật các loại thông tin bổ trợ để chính xác hoá các thông tin đạo hàng, đảm bảo độ chính xác khi định vị.

2.1.1.3. Đoạn sử dụng

Đoạn sử dụng bao gồm tất cả các máy móc, thiết bị thu nhận thông tin từ vệ tinh để khai thác sử dụng cho các mục đích và yêu cầu khác nhau cả ở trên biển, trên không và trên đất liền. Đó có thể là một máy thu riêng hoạt động độc lập (định vị tuyệt đối) hay một nhóm gồm từ hai máy thu trở lên hoạt động đồng thời theo một lịch trình thời gian nhất định (định vị tương đối) hoặc hoạt động theo chế độ một máy thu đóng vai trò máy chủ phát tín hiệu vô tuyến hiệu chỉnh cho các máy thu khác (định vị vi phân).



Hình 2.5 - Máy thu tín hiệu vệ tinh

2.1.2. Hệ thống định vị toàn cầu Glonass

Hệ thống định vị toàn cầu thế hệ 2 của Glonass tương tự như hệ định vị toàn cầu GPS NAVSTAR. Hệ thống Glonass thành lập vào những năm đầu của thập kỷ 70, với sự hợp tác chặt chẽ của các cơ quan quân sự và dân sự Liên Xô. Hệ thống Glonass được sử dụng với các mục đích: xác định vị trí điểm trên bề mặt Trái Đất, dẫn đường các hệ thống phương tiện trên không, trên biển, đạo hàng các vệ tinh vũ trụ.

Các vệ tinh đầu tiên của hệ thống Glonass được phóng lên quĩ đạo vào năm 1982, đến năm 1995 hệ thống đã được xây hoàn chỉnh với các quĩ đạo bay của các vệ tinh ở độ cao 19130 km. Hệ thống Glonass được phát triển và đưa vào sử dụng phục vụ cho 2 mục đích: đảm bảo an ninh cho quốc gia và giải quyết các yêu cầu nghiên cứu khoa học và dân sự.

Hệ thống cho phép trong khoảng thời gian 1÷2 phút, bất kì một điểm nào trên Trái Đất có thể xác định được vị trí với sai số không quá 100m, vận tốc chuyển động với sai số không quá 0,15m/giây, liên kết thời gian thang số chuẩn với sai số không quá 0,001giây. Hệ thống Glonass được ứng dụng cho các mục đích:

1. Thành lập mạng lưới trắc địa toàn cầu trong hệ tọa độ địa tâm;

2. Quảng bá thời gian thống nhất toàn cầu với độ chính xác cao;

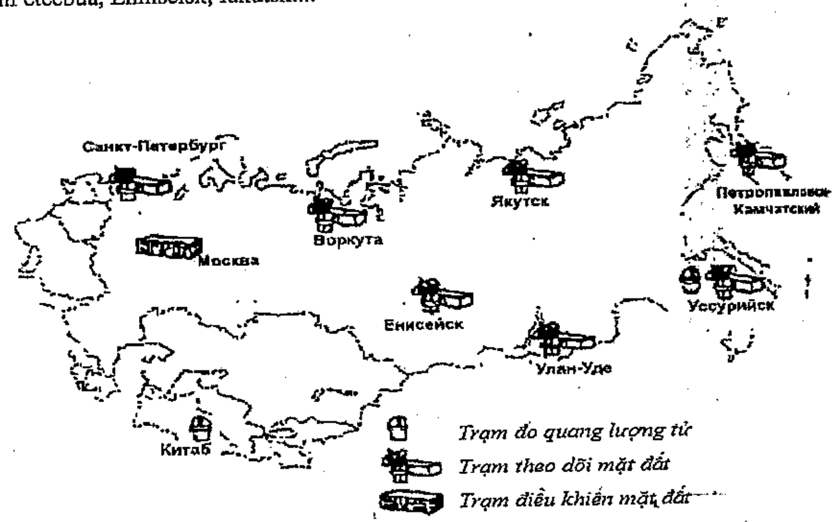
3. Dẫn đường các phương tiên chuyển động trên mặt đất, trên biển trong không trung và trong vũ trụ.

2.1.2.1. Đoạn không gian

Đoạn này gồm 24 vệ tinh quay trên 3 mặt phẳng quĩ đạo và 3 vệ tinh dự trữ. Quĩ đạo của vệ tinh gần như tròn, bay ở độ cao xấp xỉ 19130 km. Mỗi vệ tinh được trang bị máy phát tín hiệu radio đạo hàng với 2 tần số: CSA - độ chính xác chuẩn và BT - độ chính xác cao.

2.1.2.2. Đoạn điều khiển

Đoạn điều khiển gồm một trạm điều khiển trung tâm đặt tại Golishino cách Moscow 40 km; và các trạm theo dõi phân bố đều trên lãnh thổ Nga: quanh ngoại ô Moscow, SanPetecbua, Enhiseisk, Iakutsk....



Hình 2.6 - Sơ đồ vị trí các trạm theo dõi và trạm điều khiển Glonass

2.1.2.3. Đoạn sử dụng

Đoạn sử dụng bao gồm tất cả các máy, thiết bị thu nhận thông tin từ vệ tinh để khai thác sử dụng cho các mục đích và yêu cầu khác nhau của khách hàng (tương tự như hệ thống GPS).

2.1.3. So sánh các đặc trưng kỹ thuật của hai hệ thống GPS và GLONASS

Hai hệ thống định vị vệ tinh được đưa vào sử dụng gần như cùng một thời điểm, và trong tương lai có thể hợp nhất thành một hệ thống đạo hàng vệ tinh toàn cầu. Có thể đưa ra các so sánh tương đối về các đặc trưng kỹ thuật cho đến hiện nay của hai hệ thống GPS và GLONASS như sau:

2.1.3.1. Các đặc trưng tổng quan chung

Về thành phần hai hệ thống có cấu trúc như nhau, đều gồm các đoạn không gian, đoạn điều khiển và đoạn sử dụng.

- Quĩ đạo chuyển động của các vệ tinh hầu như cùng một độ cao (xấp xỉ 20000Km).

- Số lượng vệ tinh như nhau: cùng 24 vệ tinh.

2.1.3.2. Các điểm khác nhau

- Trong hệ thống GPS sử dụng hai sóng tải $L_1 = 154f_0 = 1575.42$ MHz, và $L_2 = 120$, $f_0 = 1227.60$ MHz . Các vệ tinh được phân biệt và nhận biết qua Code điều biến.

- Trong hệ thống Glonass cũng sử dụng hai sóng tải, nhưng mỗi vệ tinh làm việc riêng trong dải tần của mình. Các tần số của mỗi vệ tinh được tính theo công thức: $f_{L1} = f_{01} + k.\Delta f_1$ và $f_{L2} = f_{02} + k.\Delta f_2$ nên khả năng chống nhiễu trong lan truyền sóng tốt hơn, điều kiện quan sát tốt hơn, nhưng khối lượng vệ tinh lớn hơn.

- Số lượng mặt phẳng quĩ đạo chuyển động của các vệ tinh khác nhau (GPS - 6; Glonass - 3) nên số lượng vệ tinh trên mỗi quĩ đạo khác nhau (GPS - 4; Glonass - 8). Do vậy sự phân bố vệ tinh trên bầu trời của GPS đều hơn. Góc nghiêng của mặt phẳng quĩ đạo so với mặt phẳng xích đạo cũng khác nhau (GPS – 55°; Glonass - 64,8°).

- Hệ tọa độ sử dụng khác nhau: (GPS - sử dụng hệ tọa độ WGS-84, còn Glonass - hệ PZ-90). Đây là một vấn đề quan trọng trong việc ứng dụng tổng hợp hai hệ thống định vị toàn cầu GPS và Glonass vào các mục đích định vị với độ chính xác cao.

WGS-84 - Hệ thống tọa độ trắc địa toàn cầu, là cơ sở thực hiện các phép đo, nhận kết quả đo của công nghệ GPS, Hệ thống WGS-84 có các tham số:

- Kích thước Ellipsoid qui chiếu: bán trục lớn a = 6378137 m; độ dẹt α=1/278,257223563, tốc độ quay Trái Đất: ϖ = 7292115,8553.10^{-11} rad/giây, hằng số trọng lực Trái Đất: G_M =3986004,418.1010^8 m^3/giây^2 ;

PZ - Hệ thống tọa độ vuông góc địa tâm, với gốc là tâm của Trái Đất; trục Y hướng về cực trung bình, trục X về giao điểm của kinh tuyến "0" với mặt phẳng xích đạo. Hệ thống tọa độ được xây dựng trên các số liệu đo lưới thiên văn trắc địa của CHLB Nga. Cũng như WGS-84, sai số định vị điểm gốc cỡ khoảng 1÷2m. Theo các cách đánh giá của các nhà khoa học, sự khác nhau giữa hai hệ thống dao động từ 2 đến 15 m. PZ - hệ thống tọa độ trắc địa toàn cầu, là cơ sở thực hiện các phép đo, nhận kết quả đo của công nghệ Glonass, với các tham số:

- Kích thước Ellipsoid qui chiếu: bán trục lớn a = 6378 136 m, độ dẹt $\alpha = 1/278{,}257839303$, tốc độ quay Trái Đất: ϖ = 7292115,8553.10^{-11} rad/giây, hằng số trọng lực Trái Đất: $G_M = 3986004{,}440.10^8$ m^3/giây^2 ;

2.1.4. Thông số kỹ thuật chủ yếu của một số hệ thống định vị vệ tinh

Các thông số kỹ thuật chủ yếu của hệ thống GPS, GLONASS và Galileo được đưa ra trong bảng 2.1.

Bảng 2.1: Thông số kỹ thuật của các hệ thống định vị vệ tinh

Thông số kỹ thuật	GPS	GLONASS	Galileo
Số lượng vệ tinh	24 (3)	24 (3)	27 (3)
Số lượng mặt phẳng quỹ đạo	6	3	3
Số vệ tinh trên một mặt phẳng	4	8	9
Độ nghiêng của quỹ đạo	55°	64,8°	56°
Độ cao của quỹ đạo, km	20180	19130	
Chu kỳ quay của vệ tinh	11h 58ph 00s	11h 15ph 44s	
Hệ thống tọa độ	WGS-84	П3-90	
Pha sóng tải MHz,L1/E1 MHz,L2	1598,0625- 1604,25 7/9	1575,42- 1227,60	
Tuổi thọ của vệ tinh, năm	3÷10	7,5	

2.2. CÁC ĐẠI LƯỢNG ĐO GPS

2.2.1. Đo khoảng cách giả theo pha sóng tải

Trong các công tác trắc địa, đo khoảng cách giả (Pseudo Range) theo pha các sóng tải L_1 và L_2 cho độ chính xác cao, nên phương pháp đo này được ứng dụng nhiều hơn cả. Việc đo khoảng cách giả theo pha sóng tải được thực hiện như sau: máy thu GPS thu tín hiệu vệ tinh và đo hiệu số giữa pha của sóng tải của vệ tinh với pha của tín hiệu do chính máy thu tạo ra. Ký hiệu pha sóng tải là Φ $(0 < \Phi < 2\Pi)$ sẽ có:

$$\Phi = \frac{2\Pi}{\lambda}(R - N\lambda + c\Delta t) \qquad (2.1)$$

Trong đó:

R - là khoảng cách giữa vệ tinh và máy tâm anten máy thu;

λ - bước sóng của sóng tải;

N - số nguyên lần bước sóng chứa trong R, hoặc còn được gọi là số nguyên đa trị. N thường không biết trước mà phải xác định trong quá trình đo;

Δt - sai số không đồng bộ giữa đồng hồ của vệ tinh và của máy thu.

Nếu kí hiệu ρ là khoảng cách hình học từ máy thu tới vệ tinh, c là vận tốc ánh sáng (c = 299792 458 m/s) sẽ có:

$$\Phi = \frac{1}{\lambda}\rho + \frac{c}{\lambda}\Delta t + N; \qquad (2.2)$$

Người ta tìm cách xác định chắc chắn số nguyên lần chu kì N, và từ số lẻ hiệu pha đo có thể xác định được khoảng cách giả R từ máy thu tới vệ tinh theo công thức:

$$R = c\frac{\varphi}{2\pi . f} \qquad (2.3)$$

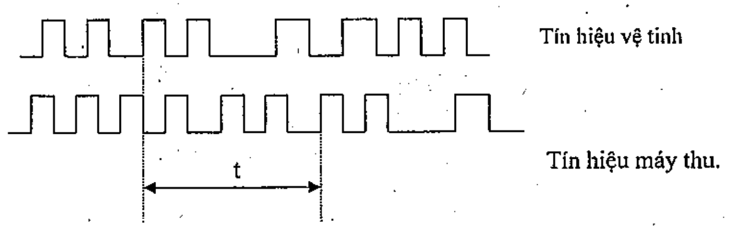
Đo cạnh theo pha sóng tải có thể đạt được độ chính xác cỡ 1% độ dài bước sóng, tức là cỡ 1,9 mm với sóng tải L_1, với sóng tải L_2 thì độ chính xác kém hơn nhưng tác dụng chủ yếu của nó là kết hợp với sóng tải L_1 tạo ra khả năng để làm giảm ảnh hưởng của tầng điện li đến độ chính xác xác định cạnh, đồng thời giúp xác định số nguyên N đa trị được đơn giản hơn.

2.2.2. Đo khoảng cách giả theo mã

Trong phương pháp này, mã tựa ngẫu nhiên được phát đi từ vệ tinh tới máy thu GPS, máy thu tiếp nhận tín hiệu vệ tinh và cũng phát ra mã tương tự. Sau đó máy thu so sánh mã thu được từ vệ tinh với mã của máy thu tạo ra để xác định ra thời gian lan truyền của tín hiệu vệ tinh. Từ đó tính được khoảng cách từ máy thu tới vệ tinh theo công thức:

$$R = c(t + \Delta t) = \rho + c.\,\Delta t\,; \qquad (2.4)$$

với t là thời gian lan truyền tín hiệu từ vệ tinh đến điểm xét, Δt là sai số không đồng bộ giữa đồng hồ vệ tinh và máy thu, R là khoảng cách giả đo được;



Hình 2.7 - Đo khoảng cách giả theo mã

Nếu ký hiệu: X_s, Y_s, Z_s - là tọa độ của vệ tinh; X, Y, Z - tọa độ của điểm quan sát. Khi đó có thể viết :

$$R = c(t + \Delta t) = \sqrt{(X_S - X)^2 + (Y_S - Y)^2 + (Z_S - Z)^2} + c\Delta t; \qquad (2.5)$$

Trong trường hợp sử dụng C/A code, theo dự tính của các nhà thiết kế hệ thống GPS, kỹ thuật đo khoảng thời gian lan truyền tín hiệu chỉ có thể đảm bảo độ chính xác đo khoảng cách cỡ 30 mét. Nếu tính đến ảnh hưởng của điều kiện lan truyền tín hiệu, thì sai số đo khoảng cách theo C/A - code sẽ ở mức 100 mét, với mức này chính phủ Mỹ chấp nhận để cho khách hàng khai thác sử dụng. Song kỹ thuật xử lý tín hiệu code này đã phát triển đến mức có thể đạt độ chính xác đo khoảng cách tới mức 3 mét, tức là hầu như không thua kém so với trường hợp sử dụng P - code mà phía Mỹ không cho khách hàng sử dụng. Chính vì lý do này mà phía Mỹ đã phải đưa ra giải pháp SA để hạn chế khả năng thực tế của C/A - code.

2.2.3. Đo khoảng cách giả theo tần số Doppler

Theo phương pháp này, khi vệ tinh phát đi tần số f_0, máy thu thu được tần số f_r, hiệu tần số của chúng chính là tần số Doppler:

$$\Delta f = f_0 - f_r \qquad (2.6)$$

Đồng thời Δf lại được xác định theo công thức:

$$\Delta f = -f_0 \frac{\overline{\rho}}{c}; \qquad (2.7)$$

với $\overline{\rho}$ là vận tốc khoảng cách tức thời.

$$\overline{\rho} = \frac{d\rho}{dt}; \qquad (2.8)$$

Thu được phương trình biểu thị vận tốc :

$$\overline{R} = \lambda . \overline{\Phi} = \overline{\rho} + c.\overline{\Delta t}; \qquad (2.9)$$

Từ đây sẽ xác định được khoảng cách giả R từ máy thu tới vệ tinh.

2.3. NGUYÊN LÝ VÀ KỸ THUẬT ĐỊNH VỊ VỆ TINH

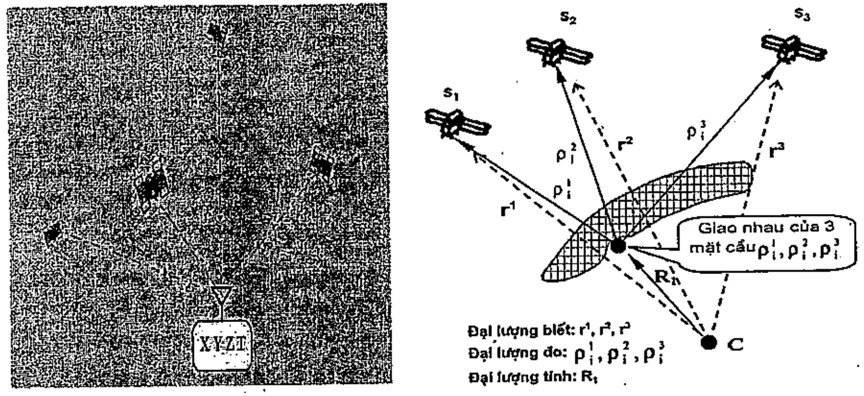
2.3.1. Nguyên lý định vị GPS

Định vị là việc xác định vị trí điểm cần đo (vị trí tâm pha của anten). Tuỳ thuộc vào đặc điểm cụ thể của việc xác định tọa độ mà chia thành 2 loại hình định vị cơ bản là định vị tuyệt đối và định vị tương đối.

2.3.1.1 Định vị tuyệt đối (point positioning)

Khi đặt máy ở điểm bất kỳ thu tín hiệu từ các vệ tinh, từ đó xác định được khoảng cách tương ứng từ máy thu đến vệ tinh và tính được tọa độ của điểm đo trong hệ tọa độ vệ tinh. (hình 2.8).

Định vị tuyệt đối dựa trên nguyên tắc giao hội nghịch không gian khi biết tọa độ của các vệ tinh và khoảng cách tương ứng đến máy thu. Về mặt hình học có thể mô tả sự định vị tại một thời điểm như sau:



Hình 2.8 - Định vị tuyệt đối

- Nếu với 1 vệ tinh thì điểm cần đo sẽ nằm trên mặt cầu có tâm là vị trí vệ tinh, có bán kính bằng khoảng cách đo được từ vệ tinh đến máy thu.
- Nếu với 2 vệ tinh thì điểm đo cũng nằm trên mặt cầu thứ 2 có tâm là vệ tinh thứ 2, có bán kính là khoảng cách từ vệ tinh thứ 2 đến máy thu. Kết hợp trị đo đến 2 vệ tinh thì vị trí của điểm đo sẽ nằm trên giao của 2 mặt cầu trong không gian - đó là 1 đường tròn.
- Khi có vệ tinh thứ 3 thì cũng như trên, vị trí của điểm đo sẽ là giao của mặt cầu thứ 3 và đường tròn nêu trên - kết quả cho 2 nghiệm là 2 vị trí trong không gian.
- Nếu có vệ tinh thứ 4 thì kết quả tổng hợp sẽ cho 1 nghiệm duy nhất, đó chính là vị trí của điểm đo trong không gian.

Như vậy ít nhất cần thu tín hiệu 4 vệ tinh để xác định tọa độ điểm đo trong không gian 3 chiều. Biểu thức toán học của việc định vị được thể hiện qua công thức:

$$D = \sqrt{(Xs - Xr)^2 + (Ys - Yr)^2 + Zs - Zr)^2} + c(\delta t - \delta T) + \delta_{atm} + \sigma \qquad (2.10)$$

Trong đó :

D là khoảng cách đo được từ vệ tinh đến máy thu.

Xs, Ys, Zs là tọa độ không gian 3 chiều của vệ tinh.

Xr, Yr, Zr, là tọa độ không gian 3 chiều của vị trí anten máy thu.

c là tốc độ truyền sóng (tốc độ ánh sáng).

δ t và δT là độ lệch tuyệt đối đồng hồ máy thu và của đồng hồ vệ tinh.

δ_{atm} là sai số do khí quyển và σ là tổng hợp các sai số khác.

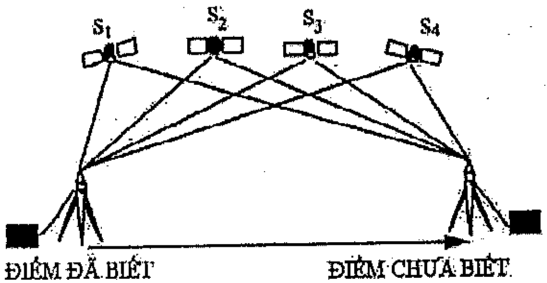
Với 1 vệ tinh có thể thành lập được 1 phương trình dạng (2.10). Để xác định 3 ẩn số Xr, Yr, Zr là tọa độ điểm cần đo và ẩn số thứ 4 là độ lệch tương đối đồng hồ vệ tinh và đồng hồ máy thu (δt - δT) thì tại mỗi điểm đo cần thu tín hiệu ít nhất 4 vệ tinh, khi đó tọa độ của điểm đo sẽ được xác định thông qua hệ phương trình:

$$\left.\begin{aligned}(D_1-c.\Delta t)^2 &= (Xs-Xr)^2+(Ys-Yr)^2+(Zs-Zr)^2\\(D_2-c.\Delta t)^2 &= (Xs-Xr)^2+(Ys-Yr)^2+(Zs-Zr)^2\\(D_3-c.\Delta t)^2 &= (Xs-Xr)^2+(Ys-Yr)^2+(Zs-Zr)^2\\(D_4-c.\Delta t)^2 &= (Xs-Xr)^2+(Ys-Yr)^2+(Zs-Zr)^2\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Khi số vệ tinh thu được tín hiệu lớn hơn 4 và số lần thu tín hiệu lớn hơn 1 lần thì vị trí điểm đo được giải theo phương pháp số bình phương nhỏ nhất. Với số lượng vệ tinh thường xuyên lớn hơn 4 như hiện nay, độ chính xác định vị có thể đạt đến 3 m (tại Việt Nam hầu như thường xuyên có từ 6 vệ tinh trở lên). Nếu sử dụng lịch vệ tinh chính xác thì sai số vị trí điểm định vị có thể đạt đến 1 m.

2.3.1.2. Định vị tương đối (Relative GPS)

Do ảnh hưởng của sai số vị trí của các vệ tinh trên quỹ đạo, do sai số đồng hồ và các yếu tố môi trường truyền sóng khác dẫn đến độ chính xác định vị điểm đơn thấp. Ngay cả khi chính phủ Mỹ loại bỏ nhiễu SA thì việc định vị tuyệt đối chính xác nhất cũng chỉ đạt tới đơn vị cỡ mét, độ chính xác này không thể áp dụng cho công tác trắc địa. Một phương án định vị khác cho phép sử dụng hệ thống GPS trong trắc địa có độ chính xác cao là định vị tương đối. Sự khác biệt của phương pháp định vị này là ở chỗ phải sử dụng tối thiểu 2 máy thu tín hiệu vệ tinh đồng thời và kết quả của phương pháp không phải là tọa độ điểm trong hệ tọa độ GPS mà là vector không gian (Baseline) nối 2 điểm đặt máy thu, cụ thể là các thành phần số gia tọa độ ΔX, ΔY, ΔZ (hoặc ΔB, ΔL, ΔH) của 2 điểm trong hệ tọa độ GPS (hình 2.9).



Hình 2.9 - Sơ đồ nguyên lý định vị tương đối

Định vị tương đối sử dụng trị đo pha sóng tải, để đạt được độ chính xác cao trong định vị tương đối thì cần tạo ra sai phân. Nguyên tắc của việc này là dựa trên sự đồng ảnh hưởng của các nguồn sai số đến tọa độ của điểm cần xác định trong bài toán định vị tuyệt đối (như sai số đồng hồ vệ tinh, máy thu, sai số tọa độ vệ tinh, ảnh hưởng của môi trường...). Cách làm trên có bản chất là lấy hiệu trị đo trực tiếp để tạo thành trị đo mới (các sai phân) để loại trừ hoặc giảm bớt các sai số kể trên.

- Sai phân bậc một:

Ký hiệu hiệu pha sóng tải đo được từ vệ tinh j tại điểm thu r vào thời điểm t_i là $\Phi^j_r(t_i)$. Khi đó, nếu xét 2 trạm r và s thu tín hiệu đồng thời vệ tinh j vào thời điểm t_i thì hiệu số:

$$\Delta\Phi^j(t_i) = \Phi^j_r(t_i) - \Phi^j_s(t_i) \qquad (2.12)$$

gọi là sai phân bậc một đối với vệ tinh j vào thời điểm t_i.

Trị đo này loại trừ được sai số đồng hồ vệ tinh bởi giá trị này là như nhau. Trị sai phân đơn có thể là hiệu số trị đo của 1 máy thu với 2 vệ tinh; trị đo này loại trừ sai số đồng hồ máy thu.

- Sai phân bậc hai:

Nếu lấy hiệu số 2 sai phân bậc một (2 trạm thu tín hiệu 2 vệ tinh j, k đồng thời) thì hiệu sai phân:

$$\Delta^2\Phi^{j,k}(t_i) = \Delta\Phi^k(t_i) - \Delta\Phi^j(t_i) \qquad (2.13)$$

được gọi là sai phân bậc hai vào thời điểm t_i. Đây là trị đo chuẩn trong đo GPS tương đối. Với trị đo này sai số vị trí vệ tinh, sai số đồng hồ máy thu, đồng hồ vệ tinh được loại trừ.

- Sai phân bậc ba:

Nếu xét 2 trạm tiến hành thu tín hiệu vệ tinh j, k vào thời điểm t_i và t_{i+1} thì hiệu sai phân bậc hai :

$$\Delta^3\Phi^{j,k} = \Delta^2\Phi^{j,k}(t_{i+1}) - \Delta^2\Phi^{j,k}(t_i) \qquad (2.14)$$

được gọi là sai phân bậc ba. Trị đo này không phụ thuộc vào số nguyên lần bước sóng, do vậy trị đo này có thể xử lý được sự trượt chu kỳ.

Việc xử lý các trị đo sai phân cho phép xác định các giá trị thành phần của vector không gian nối 2 điểm đặt máy thu với độ chính xác cao (cỡ cm). Bài toán định vị này được áp dụng trong trắc địa phục vụ việc đo lưới khống chế và các công tác đo đạc khác trong hệ thống tọa độ địa phương bất kỳ.

2.3.2. Kỹ thuật đo GPS

2.3.2.1. Đo GPS tuyệt đối

Đo GPS tuyệt đối là kỹ thuật xác định tọa độ của điểm đặt máy thu tín hiệu vệ tinh trong hệ tọa độ toàn cầu WGS-84 sử dụng nguyên lý định vị tuyệt đối. Trong định vị tuyệt đối, việc tính tọa độ của điểm đo được thực hiện thông qua giải bài toán giao hội nghịch không gian dựa trên cơ sở khoảng cách máy thu đến vệ tinh tại thời điểm đo. Trị đo cơ bản của kỹ thuật đo này là trị đo code. Do có nhiều nguồn sai số nên phương pháp định vị này có độ chính xác vị trí điểm thấp và được sử dụng chủ yếu cho việc dẫn đường và các mục đích đo đạc có yêu cầu độ chính xác không cao.

2.3.2.2. Đo GPS tương đối (Carrier-phase-based Relative GPS)

Thực chất của phương pháp đo GPS tương đối là xác định hiệu tọa độ không gian của 2 điểm đo đồng thời đặt trên 2 đầu của khoảng cách cần đo (Baseline) sử dụng nguyên lý định vị tương đối, trị đo cơ bản là trị đo pha. Phương pháp đo tương đối có độ chính xác rất cao vì đã loại trừ được nhiều nguồn sai số. Trong định vị tương đối cần tối thiểu 2 máy thu vệ tinh trong 1 thời điểm đo. Phụ thuộc vào quan hệ của các trạm thu tín hiệu trong thời gian đo mà chia thành các dạng đo GPS tĩnh và đo GPS tĩnh nhanh.

1. Đo GPS tĩnh (Static)

Đo GPS tĩnh sử dụng cả hai trị đo code và pha sóng tải. Hai hoặc nhiều máy thu đặt cố định thu tín hiệu GPS tại các điểm cần đo tọa độ trong một khoảng thời gian nhất định (thông thường từ 1 giờ trở lên). Thời gian đo kéo dài để đạt được sự thay đổi đồ hình vệ tinh, cung cấp trị đo dư và giảm được nhiều sai số khác nhằm mục đích đạt độ chính xác cao nhất. Đo GPS tĩnh đạt độ chính xác cỡ cm và được dùng cho các ứng dụng có độ chính xác cao.

2. Đo GPS tĩnh nhanh (Fast Static)

Phương pháp này về bản chất giống như đo GPS tĩnh nhưng thời gian đo ngắn hơn. Thời gian đo tĩnh nhanh thay đổi từ 8' ÷30' phụ thuộc vào số vệ tinh và đồ hình vệ tinh. Số vệ tinh nhiều hơn 4 bảo đảm trị đo dư, và với đồ hình vệ tinh phân bố đều sẽ hỗ trợ việc tìm nhanh số đa trị nguyên và giảm thời gian định vị.

2.3.2.3. Đo GPS động (Kinematic GPS)

Phương pháp đo động được tiến hành với 1 máy đặt tại trạm cố định (base station) và một hoặc nhiều các máy khác (rover stations) di động đến các điểm cần đo tọa độ và thu tín hiệu vệ tinh đồng thời. Đo GPS động là giải pháp nhằm giảm tối thiểu thời gian đo (so với phương pháp GPS tĩnh) nhưng vẫn đạt độ chính xác đo tọa độ cỡ cm. Tuỳ thuộc vào thời điểm xử lý số liệu đo: xử lý ngay tại thực địa hay trong phòng sau khi đo mà chia thành 2 dạng là đo GPS động thời gian thực và đo GPS động xử lý sau.

1. Đo GPS động thời gian thực (GPS RTK - Real Time Kinematic GPS)

Trong cách đo này, ngoài các máy thu vệ tinh còn cần thêm hệ thống Radio Link truyền số liệu liên tục từ trạm cố định đến trạm di động và thiết bị xử lý số liệu gọn nhẹ. Số nguyên đa trị (số nguyên lần bước sóng từ vệ tinh đến máy thu) được xác định nhanh nhờ giải pháp khởi đo và được duy trì bằng cách thu tín hiệu liên tục từ tối thiểu với 4 vệ tinh

trong khi di chuyển máy thu đến điểm đo tiếp theo. Thời gian đo tại các điểm này rất ít, chỉ cần 1 epoch (1 epoch tương đương với 1"÷ 5" tuỳ theo chế độ tự chọn). Nếu việc theo dõi vệ tinh bị gián đoạn (ví dụ như đi qua dưới vật cản) thì số nguyên đa trị sẽ bị mất, phải xác định lại. Do phải dùng đến Radio Link truyền số liệu nên tầm hoạt động đo của máy di động bị hạn chế (khoảng 5km). Ngoài việc đo tọa độ điểm chi tiết tại thực địa, phương pháp này còn có tính năng chuyển tọa độ thiết kế ra thực địa và dẫn đường với độ chính xác cao.

2. Đo GPS động xử lý sau (Post Processing Kinematic GPS)

Đây là phương pháp đo sử dụng máy đo giống như phương pháp GPS RTK để đo một loạt điểm định vị so với trạm gốc bằng cách di chuyển máy thu đến các điểm cần xác định tọa độ. Tọa độ của các điểm đo có được sau khi xử lý số liệu trong phòng, do vậy không sử dụng thiết bị truyền số liệu Radio Link. Trong phương pháp đo GPS động xử lý sau cần phải tiến hành việc khởi đo xác định số nguyên đa trị bằng cách đo tĩnh trên 1 đoạn thẳng sau đó mới đến đo tại các điểm cần xác định tọa độ với thời gian ngắn - tối thiểu đo 2 trị đo (2 epoch). Trong quá trình di chuyển đến điểm cần đo máy đo di động cần phải thu tín hiệu liên tục đến tối thiểu 4 vệ tinh. Nếu trong quá trình di chuyển đến điểm cần đo mà tín hiệu của một trong 4 vệ tinh bị mất thì phải khởi đo lại bằng cách đưa máy thu quay lại điểm đo trước đó hoặc đo tĩnh trên một cạnh mới. Kỹ thuật đo động xử lý sau có năng suất lao động cao, rất phù hợp cho việc phát triển lưới khống chế dạng đường chuyền, các điểm khống chế ảnh, đo chi tiết bản đồ địa hình.

2.3.2.4. Đo cải chính phân sai DGPS (Code-based Differential GPS)

Đo cải chính phân sai DGPS là phương pháp đo GPS sử dụng nguyên lý định vị tuyệt đối sử dụng trị đo code có độ chính xác đo tọa độ cỡ 0,5m ÷ 3m. Nội dung của phương pháp đo là dùng 2 trạm đo, trong đó 1 trạm gốc (Base station) có tọa độ biết trước và 1 trạm đo tại các điểm cần đo tọa độ (Rover station). Trên cơ sở độ lệch về tọa độ đo so với tọa độ thực của trạm gốc để hiệu chỉnh vào kết quả đo tại các trạm động theo nguyên tắc đồng ảnh hưởng. Yêu cầu quan trọng khi đo phân sai là trạm gốc và trạm di động phải thu số liệu đồng thời, cùng số vệ tinh. Có hai phương pháp cải chính phân sai, là cải chính vào cạnh và cải chính vào tọa độ.

Cải chính vào cạnh: sử dụng cạnh tính theo trị đo Code của trạm gốc tới từng vệ tinh và tìm độ lệch so với khoảng cách thực của nó trên cơ sở tọa độ điểm gốc. Các độ lệch này được dùng để cải chính cho chiều dài cạnh từ điểm cần định vị đến các vệ tinh tương ứng trước khi đưa cạnh vào tính tọa độ cho trạm động.

Cải chính vào tọa độ: cũng tương tự như việc cải chính vào cạnh như trên, ở đây sẽ xác định được độ lệch về tọa độ giữa tọa độ tính được của trạm gốc và tọa độ thực của nó do ảnh hưởng của các nguồn sai số. Các độ lệch đó được cải chính tương ứng vào tọa độ của trạm động.

Dựa vào thời điểm cải chính mà chia thành các phương pháp đo cải chính phân sai là: đo DGPS thời gian thực và đo DGPS cải chính sau.

1. Đo DGPS thời gian thực (Real Time DGPS)

Với phương pháp này, số cải chính được truyền từ trạm gốc tới trạm di động ngay trên thực địa để cải chính cho tọa độ trạm di động và hiển thị kết quả tại thực địa ngay trong khi đo. Để thực hiện được như vậy, thiết bị đo cần có thêm máy phát và thu tín hiệu Radio Link để truyền tín hiệu cải chính. Máy phát Radio Link có thể đặt trên mặt đất hoặc phát qua vệ tinh địa tĩnh.

2. Đo DGPS xử lý sau

Cũng tương tự như phương pháp đo DGPS thời gian thực nhưng số liệu cải chính không thực hiện trong quá trình đo mà nhận được sau khi xử lý số liệu trong phòng. Do độ chính xác không cao nên phương pháp DGPS chỉ được sử dụng trong đo vẽ bản đồ tỷ lệ trung bình và tỷ lệ nhỏ hoặc các công tác dẫn đường khác.

Bảng 2.2: Bảng tổng hợp về các phương pháp đo GPS

Số ST	Kiểu đo	Số vệ tinh tối thiểu	Thời gian đo tối thiểu	Độ chính xác đạt được	Các đặc trưng khác
1	Đo tĩnh (Static)	4	1 giờ	- Máy 1 tần số: 5mm+1ppm - Máy 1 tần số: 5mm + 0,5ppm	- Máy 1 tần số cho độ chính xác tốt nhất ở khoảng cách ≤10km - Không hạn chế khoảng cách với máy 2 tần số.
2	Đo tĩnh nhanh (Fast Static)	4	8'÷30'	(5 ÷ 10)mm + 1ppm (phụ thuộc thời gian đo)	- Các thủ tục đo như với đo tĩnh.
3	Đo động xử lý sau (GPS-PPK)	4	2 trị đo	1cm + 1ppm	- Khoảng cách tối đa 50km. - Cần khởi đo bằng đo tĩnh nhanh trên cạnh khởi đo.
4	Đo động thời gian thực (GPS -RTK)	4	1 trị đo	1cm + 1ppm	- Khoảng cách đo phụ thuộc vào RadioLink, < 10km - Cần khởi đo trên điểm biết tọa độ hoặc đo tĩnh nhanh
5	Đo DGPS xử lý sau (PPK- PS)	4	2 trị đo	- 0,5m với máy thu Everest, Maxwel. với 5 vệ tinh PDOP<4 - (1 ÷ 3)m với máy thu khác cùng ĐK	- Không cần thu liên tục vệ tinh, không cần Radio truyền sóng
6	Đo DGPS thời gian thực (RTK-DGPS)	4	1 trị đo	- 0,2m với máy thu Everest, Maxwel. với 5 vệ tinh PDOP<4 - (1 ÷ 3)m với máy thu khác.	- Cần Radio truyền sóng, không cần thu vệ tinh liên tục

2.4. CÁC NGUỒN SAI SỐ TRONG ĐO GPS

Việc định vị bằng các hệ thống định vị toàn cầu về thực chất được xây dựng trên phép giao hội khoảng cách từ các vệ tinh có tọa độ đã biết. Khoảng cách từ các vệ tinh đến các điểm quan sát được xác định theo thời gian lan truyền sóng vô tuyến trong không gian. Như vậy kết quả xác định thời gian lan truyền sẽ chịu ảnh hưởng trực tiếp của độ chính xác đo thời gian trên các đồng hồ vệ tinh và trong máy thu; còn tốc độ của sóng phụ thuộc vào điều kiện của môi trường lan truyền. Ngoài ra độ chính xác của vị trí điểm còn phụ thuộc vào sai số tọa độ vệ tinh và một số nguồn ảnh hưởng khác.

2.4.1. Sai số đồng hồ vệ tinh và đồng hồ máy thu

Đây là sai số của đồng hồ vệ tinh, sai số của đồng hồ máy thu và sự không đồng bộ giữa chúng. Đồng hồ trên vệ tinh được trạm điều khiển trên mặt đất theo dõi, và do đó nếu phát hiện có sai lệch, trạm này sẽ phát tín hiệu chỉ thị thông báo số cải chính cho máy thu GPS biết để xử lý. Để cải tiến đồng hồ máy thu có thể lắp đặt các đồng hồ nguyên tử như trên vệ tinh, nhưng khi đó giá thành máy thu rất đắt, người ta chỉ có thể cải tiến các đồng hồ thạch anh trong máy thu để có khả năng làm việc ổn định hơn trong giai đoạn đã đồng bộ với đồng hồ vệ tinh.

Ngoài ra để làm giảm ảnh hưởng sai số đồng hồ của cả vệ tinh và máy thu, người ta sử dụng hiệu các trị đo giữa các vệ tinh cũng như giữa các trạm quan sát.

2.4.2. Sai số của quỹ đạo vệ tinh

Chuyển động của vệ tinh trên quỹ đạo không tuân thủ theo định luật Kepler do có nhiều tác động nhiễu như: tính không đồng nhất của trọng trường Trái Đất, ảnh hưởng của sức hút Mặt Trăng, Mặt Trời và các thiên thể khác, sức cản của khí quyển, áp lực của bức xạ của Mặt Trăng, Mặt Trời, ... Vị trí tức thời của vệ tinh chỉ có thể được xác định theo mô hình chuyển động được xây dựng trên cơ sở các số liệu quan sát từ các trạm có độ chính xác cao trên mặt đất thuộc đoạn điều khiển của hệ thống GPS và đương nhiên có chứa sai số.

Ephemerit là tập hợp các số liệu thể hiện vị trí của thiên thể nói chung và vệ tinh nói riêng dưới dạng hàm của thời gian, do đó cũng gọi là lịch vệ tinh. Có hai loại Ephemerit của vệ tinh: Ephemerit được xác định từ kết quả hậu xử lý các số liệu quan sát cho chính các thời điểm nằm trong khoảng thời gian quan sát và Ephemerit được nội suy từ các Ephemerit nêu trên cho các ngày quan sát tiếp theo. Loại Ephemerit thứ nhất có độ chính xác ở mức 10 ÷ 50 m, và chỉ được cung cấp khi chính phủ Mỹ cho phép; còn ở mức hai cỡ 20 ÷100 m, cho phép các khách hàng đại trà sử dụng.

Số liệu của lịch vệ tinh cho phép xác định tức thời các vector vị trí và tốc độ của các vệ tinh trong hệ tọa độ Trái Đất. Các máy thu GPS thu tín hiệu vệ tinh, và sử dụng lịch vệ tinh để tính toán xử lý số liệu đo. Sai số vị trí của vệ tinh ảnh hưởng gần như trọn vẹn tới sai số xác định vị trí điểm quan sát đơn, hoàn toàn riêng biệt; nhưng lại được loại trừ đáng kể trong kết quả định vị tương đối giữa hai điểm quan sát.

Sai số vị trí của vệ tinh là nguồn sai số khá lớn nhưng tác động chủ yếu vào tọa độ tuyệt đối được xử lý theo phương pháp đo khoảng cách giả. Vì vậy, thông thường tọa độ tuyệt đối trong hệ WGS-84 quốc tế chỉ có thể xác định được với độ chính xác khoảng từ 10 tới 100 m. Nếu độ chính xác tọa độ tuyệt đối của một đầu baseline tăng được từ 100 m tới 2 m thì độ chính xác của ΔX, ΔY, ΔZ có thể tăng thêm được 1 dm. Chính vì vậy người ta cần có tọa độ gần đúng trong hệ WGS-84 tới cỡ 2 m để có được các baseline có độ chính xác cao. Để khắc phục các sai số này người ta sử dụng các biện pháp sau:

- Có được lịch vệ tinh chính xác tại thời điểm đo: Lịch vệ tinh chính xác có thể có được nếu yêu cầu các cơ quan như NGS, IGS,... cung cấp.

- Quan trắc liên tục trong 24 giờ: tức là hai vòng quỹ đạo của 32 vệ tinh có thể hiệu chỉnh được lịch vệ tinh thông qua các phần mềm xử lý Pseudo Range mới, độ chính xác đạt được tới 1 m.

- Sử dụng hệ thống DGPS toàn cầu do OMNI STAR cung cấp với các số hiệu chỉnh tọa độ được lấy từ hệ thống các trạm định vị cố định toàn cầu. Công nghệ này cũng đã được thử nghiệm tại Việt Nam và cho độ chính xác đạt tới 1 m .

2.4.3. Sai số do môi trường truyền sóng

2.4.3.1. Ảnh hưởng khúc xạ tầng điện ly

Đây là sai số do hiện tượng khúc xạ tia sóng đi từ khoảng không vũ trụ vào tầng đầu tiên của khí quyển. Sai số này không gây ảnh hưởng lớn tới kết quả đo trong khoảng cách ngắn mà chỉ ảnh hưởng lớn trên khoảng cách dài. Tầng điện ly là tầng khí quyển ở độ cao từ 50 km đến 1000 km. Do bức xạ mạnh của mặt trời, các phần tử khí trong tầng điện ly tạo thành một lượng lớn các điện tử khí tự do. Khi tín hiệu sóng điện từ đi qua tầng điện ly thì đường truyền tín hiệu sẽ bị cong. Tốc độ truyền sóng sẽ thay đổi, vì vậy thời gian truyền tín hiệu nhân với tốc độ ánh sáng trong chân không sẽ không bằng khoảng cách từ vệ tinh đến máy thu.

Để khắc phục nguồn sai số định vị này, người ta đã sử dụng tần số thứ hai để hiệu chỉnh các trị đo trên khoảng cách dài.

2.4.3.2 Ảnh hưởng khúc xạ tầng đối lưu

Tầng đối lưu có độ cao đến 8 km so với mặt đất là tầng làm khúc xạ đối với tín hiệu GPS do chiết suất biến đổi. Do vậy số cải chính mô hình khí quyển phải được áp dụng đối với trị đo của máy một tần số và cả máy hai tần số. Sóng điện từ khi đi qua tầng đối lưu thì tốc độ truyền bị thay đổi, đường truyền sóng cũng bị cong. Sai số khoảng cách do tầng đối lưu gây ra trên thiên đỉnh khoảng 2,3 m, khi khoảng thiên đỉnh $Z = 80^0$ thì sai số này có giá trị khoảng 13 m.

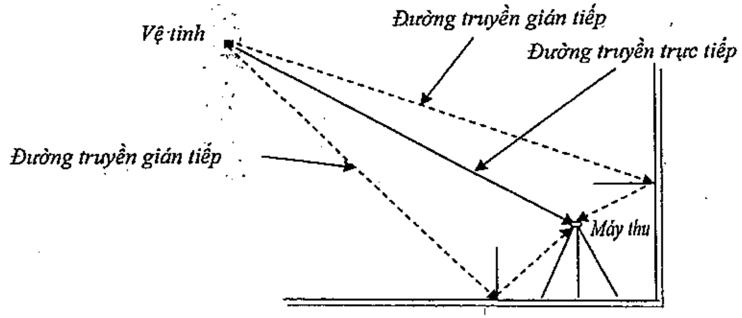
Môi trường truyền sóng gây nên sai số nhiễu tín hiệu do môi trường: Sai số này do 2 nguồn gây ra, một là do các nguồn phát sóng ngắn quanh máy thu tạo nên (như các đài truyền hình, sóng của điện thoại di động ...), hai là do sóng GPS phản xạ từ các vật thể đặt quanh anten. Để khắc phục nguồn sai số này người ta đã cải tiến các anten có độ nhậy cao hơn nhằm tạo khả năng tự lọc nhiễu và đặt thêm các bộ lọc trong phần mềm xử lý.

2.4.4. Sai số do tầm nhìn vệ tinh và trượt chu kỳ

Khi đo GPS cần phải thu được tín hiệu của ít nhất 4 vệ tinh, tức là phải có tầm nhìn thông tới các vệ tinh đó. Tín hiệu GPS là sóng cực ngắn trong phổ điện từ, có thể xuyên qua mây mù, song không thể truyền qua được tán cây hoặc các vật che chắn. Do vậy tầm nhìn vệ tinh thông thoáng có tầm quan trọng đặc biệt đối với công tác đo GPS. Khi sử dụng trị đo pha cần phải bảo đảm thu tín hiệu vệ tinh trực tiếp, liên tục nhằm xác định số nguyên lần bước sóng khởi đầu. Tuy nhiên có trường hợp ngay cả khi vệ tinh luôn được nhìn thấy nhưng tín hiệu thu vẫn bị gián đoạn, khi đó có một số chu kỳ không xác định đã trôi qua mà máy thu không đếm được khiến cho số nguyên lần bước sóng thay đổi và làm sai kết quả định vị. Một số loại máy thu có thể nhận biết sự trượt chu kỳ và thêm vào số hiệu chỉnh tương ứng khi xử lý số liệu. Mặt khác khi tính toán xử lý số liệu GPS có thể dùng sai phân bậc ba để nhận biết và xử lý trượt chu kỳ.

2.4.5. Sai số do hiện tượng đa tuyến (Multipath)

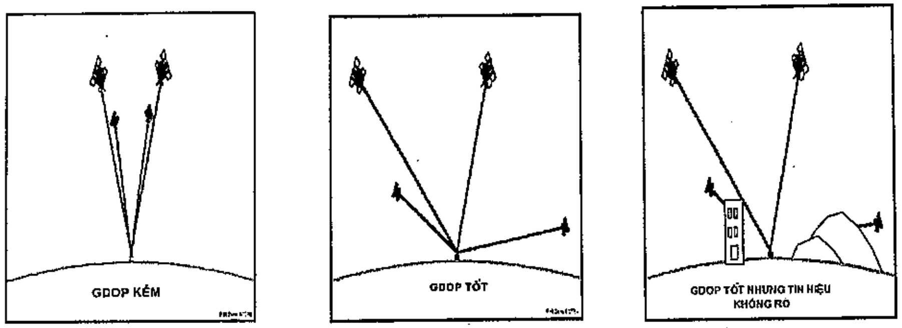
Đó là những tín hiệu từ vệ tinh không đến thẳng anten máy thu mà đập vào bề mặt phản xạ nào đó xung quanh rồi mới đến máy thu (hình 2.10). Như vậy kết quả đo sẽ bị sai lệch. Để tránh hiện tượng này anten phải có tầm nhìn vệ tinh thông thoáng với ngưỡng góc cao trên 15^0. Việc chọn ngưỡng góc cao 15^0 nhằm giảm ảnh hưởng bất lợi của chiết quang của khí quyển và hiện tượng đa tuyến. Để khắc phục sai số do hiện tượng đa tuyến, hầu hết các anten GPS đều được thiết kế có gắn bản (mâm anten) dạng phẳng, tròn để che chắn tín hiệu phản xạ từ dưới mặt đất lên.



Hình 2.10 - Sai số do hiện tượng đa tuyến

2.4.6. Sự suy giảm độ chính xác (DOPs) do đồ hình các vệ tinh

Định vị GPS có bản chất là giải bài toán giao hội nghịch không gian dựa vào điểm gốc là các vệ tinh và các khoảng cách tương ứng đến máy thu. Trường hợp tối ưu khi thu tín hiệu vệ tinh GPS là vệ tinh cần phải có sự phân bố hình học cân đối trên bầu trời xung quanh điểm đo.



Hình 2.11 - Đồ hình vệ tinh

Chỉ số mô tả đồ hình vệ tinh gọi là hệ số phân tán độ chính xác - hệ số DOP (Delution of Precision). Chỉ số DOP là số nghịch đảo thể tích của khối tỷ diện tạo thành giữa các vệ tinh và máy thu, Chỉ số DOP chia ra các loại :

PDOP - chỉ số phân tán độ chính xác về vị trí (Positional DOP).

TDOP - chỉ số phân tán độ chính xác về thời gian (Time DOP).

HDOP - chỉ số phân tán độ chính xác về mặt phẳng (Horizontal DOP).

VDOP - chỉ số phân tán độ chính xác về cao độ (Vertical DOP).

GDOP - chỉ số phân tán độ chính xác về hình học (Geometric DOP).

Đồ hình phân bố vệ tinh được thiết kế sao cho chỉ số PDOP đạt xấp xỉ 2,5 với xác suất 90% thời gian. Đồ hình vệ tinh đạt yêu cầu với chỉ số PDOP < 6.

2.4.7. Sai số do người đo

Khi đo GPS, tâm hình học của anten máy thu cần đặt chính xác trên tâm mốc điểm đo theo đường dây dọi. Anten phải đặt cân bằng, chiều cao từ tâm mốc đến tâm hình học của anten cần đo và ghi lại chính xác. Đo chiều cao anten không đúng thường là lỗi hay mắc phải của người đo GPS. Ngay cả khi xác định tọa độ phẳng thì việc đo chiều cao cũng quan trọng vì GPS là hệ thống định vị 3 chiều, sai số chiều cao sẽ lan truyền sang vị trí mặt phẳng và ngược lại.

2.4.8. Sai số do lệch tâm pha của anten

Tâm pha là một điểm nằm bên trong anten, là nơi tín hiệu GPS biến đổi thành tín hiệu trong mạch điện, các trị đo khoảng cách được tính vào điểm này. Điều này có ý nghĩa quan

trọng đối với công tác trắc địa. Khi chế tạo, anten đã được kiểm định sao cho tâm pha trùng với tâm hình học của nó. Tuy nhiên tâm pha thay đổi vị trí phụ thuộc vào đồ hình vệ tinh, ảnh hưởng này có thể kiểm định trước khi đo hoặc sử dụng mô hình tâm pha ở giai đoạn tính xử lý. Quy định cần phải tuân theo là khi đặt anten cần dóng theo cùng một hướng (thường là hướng Bắc) và tốt nhất sử dụng cùng một loại anten cho cùng một ca đo.

Đến nay, với tiến bộ của KHKT, các nguồn sai số nói trên đã được khắc phục đáng kể, tạo được các baseline có độ chính xác rất cao. Các trị đo GPS cạnh dài đã nâng được độ chính xác từ cỡ 1/10.000.000 vào giai đoạn 1990 đến 1/200.000.000 như hiện nay đạt được.

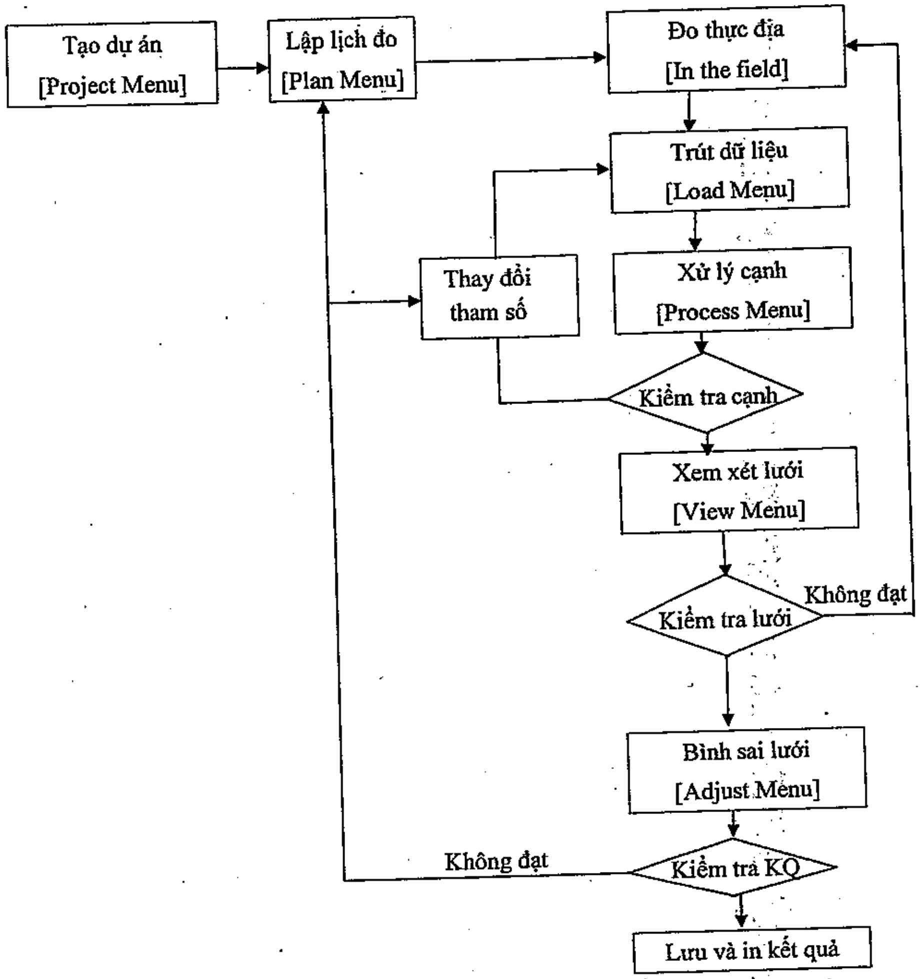
2.5. ỨNG DỤNG CÔNG NGHỆ GPS TRONG TRẮC ĐỊA CÔNG TRÌNH

Việc xác định vị trí điểm bằng công nghệ định vị vệ tinh có những ưu điểm rõ rệt so với khi sử dụng các phép đo mặt đất truyền thống, đặc biệt là trong công tác đo đạc lưới khống chế trắc địa mặt bằng. Hệ thống định vị toàn cầu cho phép xác định các yếu tố của lưới với độ chính xác rất cao, nhất là vị trí tương hỗ giữa các điểm mà không phụ thuộc vào khoảng cách giữa chúng. Chính vì vậy việc phân cấp hạng các mạng lưới trắc địa và xây dựng chúng theo nguyên tắc từ tổng quát tới chi tiết không còn là vấn đề cần thiết và bắt buộc nữa. Bên cạnh đó hệ thống không đòi hỏi sự thông hướng giữa các điểm đo, công tác đo đạc có thể tiến hành trong mọi điều kiện của thời gian và thời tiết. Thời gian đo trên mỗi điểm thường không quá 2÷3h đồng hồ, thậm chí chỉ cần 2÷3 phút, tùy thuộc vào khoảng cách đo. Có thể khẳng định rằng, công nghệ định vị vệ tinh đã tạo ra một cuộc cách mạng sâu sắc trong lĩnh vực Trắc địa - Bản đồ, và còn hàm chứa nhiều khả năng tiềm ẩn cần được khai thác.

2.5.1. Xây dựng các mạng lưới khống chế mặt bằng

Ưu điểm chủ yếu và quan trọng nhất của công nghệ GPS là khả năng xác định các vector cạnh giữa các điểm quan sát với độ chính xác cao mà không cần tầm thông hướng mặt đất. Công nghệ GPS đã được kết hợp với các phương pháp đo cạnh dài khác để xây dựng khung tọa độ Trái Đất quốc tế (ITRF), khung tọa độ châu Âu (EUREF).

Ở Việt Nam, việc khai thác sử dụng GPS mới chỉ triển khai từ đầu những năm 90 của thế kỷ trước. Từ tháng 12-1991 đến tháng 4-1993, Cục đo đạc bản đồ Nhà nước - Bộ Tài nguyên & Môi trường đã xây dựng mạng lưới tọa độ nhà nước khu vực Minh Hải, Sông Bé và Tây Nguyên bằng công nghệ GPS với 117 điểm phủ đều khắp khu vực. Xây dựng mạng lưới tọa độ trên quần đảo Trường Sa, đồng thời đo nối lưới này với các đảo khác và mạng lưới trên đất liền tạo thành mạng lưới trắc địa biển Việt Nam, góp phần xây dựng cơ sở dữ liệu hình thành hệ quy chiếu VN2000. Sơ đồ quy trình công nghệ thành lập lưới trắc địa bằng phương pháp GPS được đưa ra trong hình 2.12.



Hình 2.12 - Sơ đồ quy trình xây dựng lưới trắc địa bằng công nghệ GPS

2.5.2. Ứng dụng GPS trong nghiên cứu địa động

Hiện nay công nghệ định vị vệ tinh đã được ứng dụng trong nghiên cứu dịch chuyển vỏ Trái Đất trên phạm vi rộng lớn với khoảng cách từ vài chục tới hàng trăm km. Bằng phương pháp đo tương đối xác định gia số tọa độ không gian trong hệ thống tọa độ địa tâm, người ta có thể xác định vị trí tương hỗ giữa các điểm với độ chính xác vài ba cm trên khoảng cách hàng trăm km.

Ở Việt Nam công nghệ GPS cũng đã được ứng dụng đo đạc các mạng lưới nghiên cứu địa động và tham gia với các nước trong khu vực đo đạc và nghiên cứu chuyển dịch vỏ Trái Đất khu vực Đông Nam Á.

2.5.3. Ứng dụng GPS trong trắc địa công trình

Công nghệ GPS đã được ứng dụng rộng rãi trong việc lập lưới khống chế mặt bằng cơ sở, lưới thi công công trình, lưới quan trắc chuyển dịch ngang công trình, đo vẽ thành lập mặt cắt, chuyển trục công trình lên cao. Các dạng công tác trắc địa công trình thường có khoảng cách đo không quá dài, chiều dài thường chỉ vài ba trăm mét, hoặc dưới 1 km, nhưng yêu cầu đo với độ chính xác cao. Trong phép đo tương đối khá nhiều loại sai số được giảm thiểu, do vậy độ chính xác đo cạnh đạt rất cao. Với chiều dài cạnh dưới 1 km, hầu như đã loại bỏ được ảnh hưởng sai số của tầng điện ly và tầng đối lưu của khí quyển. Công nghệ GPS được ứng dụng trong ngành trắc địa công trình ở các lĩnh vực sau:

- Trong giai đoạn khảo sát thiết kế: Thành lập lưới khống chế đo vẽ, đo vẽ bình đồ, mặt cắt.
- Trong giai đoạn thi công: Thành lập lưới khống chế thi công, bố trí các điểm chi tiết ra thực địa, chuyển trục công trình trong xây dựng nhà cao tầng.
- Trong giai đoạn vận hành: Quan trắc chuyển dịch, biến dạng công trình.

2.5.4. Ứng dụng GPS trong thành lập bản đồ

GPS cũng được ứng dụng rộng rãi trong công tác đo vẽ chi tiết như thành lập lưới khống chế cơ sở, lưới khống chế đo vẽ và đo vẽ chi tiết địa hình. Với các chế độ đo động, công nghệ định vị được sử dụng như là các trạm đo vẽ chi tiết bằng các máy toàn đạc điện tử. Ưu điểm nổi trội nhất của phương pháp là không cần thông hướng ngắm. Ngoài ra các máy thu GPS có thể được sử dụng để xác định tọa độ, độ cao của điểm địa hình để thành lập mô hình số địa hình (DEM).

Đặc biệt trong công tác hiện chỉnh bản đồ, công nghệ GPS được sử dụng rất thuận lợi để hiện chỉnh nội dung của bản đồ như bổ sung các địa vật, địa hình.

2.6. THIẾT KẾ VÀ TỔ CHỨC ĐO GPS TRONG THÀNH LẬP LƯỚI KHỐNG CHẾ TRẮC ĐỊA CÔNG TRÌNH

2.6.1. Chọn điểm lưới GPS

Chọn điểm đo GPS liên quan đến việc thiết kế lưới GPS, ngoài một số yêu cầu về mật độ điểm, về kết cấu hình học của mạng lưới, các điểm đo cần phải bảo đảm một số yêu cầu riêng mang tính đặc thù của công nghệ GPS.

Trong mục 2.4 đã xem xét một số nguồn sai số ảnh hưởng đến kết quả đo GPS. Có nhiều nguồn sai số đã được loại bỏ hoặc giảm thiểu khi sử dụng trị đo pha sóng tải để thực hiện phép đo tương đối trong các mạng lưới GPS. Tuy vậy cũng có một số nguồn sai số thường làm giảm độ chính xác kết quả đo có liên quan đến vị trí đặt máy thu GPS, như sai số do các nguồn gây nhiễu tín hiệu, sai số đa đường dẫn (*multipath*)... . Vì vậy, khi chọn điểm cần lưu ý đến các yếu tố sau:

1. Để thiết kế lưới GPS và chọn điểm phải có bản đồ địa hình tỷ lệ càng lớn càng tốt. Tất cả các điểm dự kiến cần được chuyển vị trí lên bản đồ cùng với các điểm gốc đã biết.

2. Trong mạng lưới trắc địa truyền thống sử dụng các trị đo góc-cạnh, thì điều quan trọng khi chọn điểm là phải bảo đảm thông hướng giữa các điểm. Đối với lưới GPS yêu cầu thông hướng giữa một số cặp điểm chỉ cần thiết khi phát triển lưới cấp thấp hơn hoặc tầm thông hướng từ điểm GPS đến công trình xây dựng.

3. Hiện tượng đa đường dẫn: Do hiện tượng phản xạ, tín hiệu đi từ vệ tinh đến máy thu có thể qua nhiều đường dẫn. Hiện tượng đa đường dẫn gây biến dạng tín hiệu điều biến C/A Code, P Code và ảnh hưởng đến các trị đo pha sóng tải. Các tín hiệu đa đường dẫn có thời gian phát đi cùng nhau từ vệ tinh, song khi đến máy thu đã bị thay đổi code và pha do hiện tượng phản xạ khác nhau và phụ thuộc vào chiều dài đường truyền tín hiệu. Các tín hiệu phản xạ đến máy thu chậm hơn so với tín hiệu đi theo đường thẳng do phải trải qua một quãng đường dài hơn.

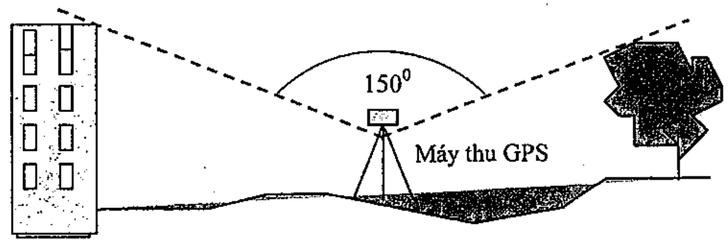
Thông thường, vật phản xạ cục bộ sẽ thể hiện rõ tín hiệu đa đường dẫn. Nói chung, hiện tượng đa đường dẫn tác động một cách ngẫu nhiên đối với tín hiệu tần số thấp và tần số cao. Các tín hiệu có thể bị phản xạ bởi vệ tinh (đa đường dẫn vệ tinh) và bởi các vật xung quanh máy thu (đa đường dẫn máy thu), cụ thể như sau:

Ảnh hưởng đa đường dẫn vệ tinh có thể được loại bỏ trong hiệu pha bậc nhất của các trị đo đối với cạnh ngắn (*short baselines*). Tín hiệu phản xạ thường bị suy yếu sau khi phản xạ, mức độ suy yếu này phụ thuộc vào chất liệu của vật phản xạ, phụ thuộc vào góc tới và góc tán xạ. Nhìn chung, các tín hiệu phản xạ với góc tới rất thấp, trên thực tế hầu như không bị suy yếu. Điều này giải thích tại sao các vệ tinh có "góc cao" thấp thường gây ra nhiễu đa đường dẫn với cường độ mạnh. Các đỉnh toà nhà xung quanh điểm đặt máy thu cũng là một môi trường gây nên hiện tượng đa đường dẫn đáng kể.

Nhiễu đa đường dẫn đến từ phía dưới máy thu cũng gây ra sai số đáng kể đến công tác định vị. Dựa vào dạng của anten sử dụng cần phải lưu ý đến bề mặt đất phía dưới máy thu. Thông thường mặt dưới anten là bề mặt kim loại có dạng tròn hoặc vuông, được cấu tạo dạng từ các hình xuyến ghép lại với nhau. Đó là các vòng kim loại nằm ngang với khoảng rộng cỡ 1,5 bước sóng tải.

4. Hiện tượng nhiễu do các đài phát sóng: nếu máy thu đặt quá gần các trạm phát sóng như đài phát thanh, truyền hình, rađa v.v...kết quả đo sẽ chịu ảnh hưởng của các nguồn tín hiệu đó nếu các nguồn phát sóng này có tần số phù hợp với máy thu GPS. Các đường dây điện cao áp cũng gây ảnh hưởng đến tín hiệu vệ tinh trước khi vào máy thu nếu máy thu đặt ngay dưới các đường dây đó, vì vậy máy thu nên đặt xa các đài phát sóng trên 200 m và xa đường tải điện cao áp trên 50m.

5. Tín hiệu GPS thuộc dải sóng radio cực ngắn, dễ bị chắn, do vậy cần bảo đảm sự thông thoáng giữa vệ tinh và máy thu. Khi máy thu đặt dưới các tán cây thì tín hiệu vệ tinh dễ bị gián đoạn, điều này đương nhiên sẽ ảnh hưởng đến độ chính xác của kết quả đo. Tốt nhất nên bố trí điểm đo sao cho góc mở lên bầu trời (dạng hình nón) không nhỏ hơn 150° hoặc 140° (hình 2.13). Điều này còn nhằm mục đích làm giảm sai số do tầng ion và đối lưu gây ra, vì với các tín hiệu có "góc cao" thấp, tức là góc tới của tín hiệu đến bề mặt lớn sẽ làm cho sự khúc xạ càng lớn.



***Hình 2.13** - Góc mở tại điểm đo GPS*

6. Khi chọn điểm cần tránh tạo thành các cạnh bị che chắn đối xứng. Trong những trường hợp này, khả năng quan sát cùng số vệ tinh là rất khó thực hiện và gây bất lợi cho giai đoạn xử lý số liệu.

2.6.2. Thiết kế lưới GPS

Đồ hình lưới GPS nói chung không khác nhiều với các mạng lưới trắc địa truyền thống (lưới tam giác, đa giác ...). Lưới GPS gồm các điểm được chôn trên mặt đất nơi ổn định hoặc bố trí trên đỉnh các công trình vững chắc, kiên cố. Các điểm của mạng lưới được liên kết với nhau bởi các cạnh đo và thông qua đó để tính toán xác định tọa độ, độ cao của các điểm trong một hệ thống tọa độ thống nhất. Cần chú ý đến đặc điểm của lưới GPS là không cần thông hướng giữa các điểm vẫn có thể đo cạnh được, yêu cầu thông hướng giữa một số điểm GPS được đặt ra là chỉ để đo nối phương vị khi phát triển lưới cấp thấp.

Một nguyên tắc chung khi xây dựng lưới trắc địa là phải có trị đo thừa để kiểm tra kết quả đo, chính vì vậy mạng lưới GPS phải tạo thành các hình khép kín, hoặc được khống chế bởi các điểm cấp cao. Để xác định tọa độ và độ cao cho các điểm trong lưới GPS cần đo nối với các điểm tọa độ và độ cao nhà nước, các điểm này đóng vai trò là các điểm khởi tính. Trong trường hợp lý tưởng số lượng điểm tọa độ khởi tính trong một mạng lưới GPS thường lớn hơn 3, số lượng điểm độ cao khởi tính thường lớn hơn 4.

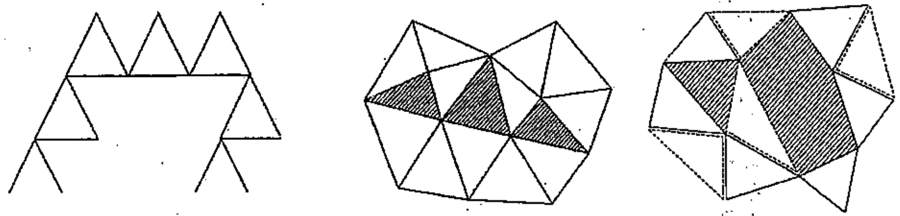
Vị trí điểm và đồ hình lưới GPS được thiết kế linh hoạt hơn so với lưới mặt đất do thường không cần đặt ra vấn đề thông hướng giữa các điểm lưới. Căn cứ vào mục đích sử dụng, có 4 phương thức cơ bản để thành lập lưới là liên kết điểm, liên kết cạnh, liên kết lưới và liên kết phối hợp cạnh - điểm.

- *Liên kết điểm:* là dạng liên kết các vòng đo đồng bộ kề nhau bởi một điểm chung. Phương thức liên kết này có cường độ đồ hình yếu, có rất ít điều kiện khép hình không đồng bộ (hình 2.14-a).

- *Liên kết cạnh:* là dạng liên kết giữa các vòng đo đồng bộ kề nhau bởi một cạnh chung. Phương thức liên kết này có nhiều cạnh đo lặp, nhiều điều kiện khép hình đồng bộ và cường độ đồ hình chặt chẽ (hình 2.14-b).

- *Liên kết hỗn hợp cạnh- điểm*: phương thức liên kết này cho phép nâng cao cường độ đồ hình, độ tin cậy của lưới và giảm khối lượng công tác ngoại nghiệp (hình 2.14-c).

-*Liên kết lưới:* là dạng liên kết giữa các đồ hình đo đồng bộ bởi hai điểm chung trở lên. Lưới được thành lập theo phương thức này có cường độ đồ hình chặt chẽ và độ tin cậy cao.



(a) (b) (c)

Hình 2.14 - Đồ hình liên kết các điểm đo GPS
(a)- Liên kết điểm; (b)- Liên kết cạnh; (c)-Liên kết cạnh-điểm

Trong quá trình thiết kế đồ hình lưới cần chú ý đến các yếu tố sau:

1. Điều kiện địa hình địa vật tại khu vực công trình.

2. Tùy theo kiểu công trình xây dựng: công trình đường hầm có thể phải chọn đồ hình đường chuyền, công trình thuỷ điện: đồ hình tam giác, khu công nghiệp: đồ hình tứ giác và tam giác kết hợp... Đồ hình lưới tối ưu cần đạt được các tiêu chí:

- Số ca đo (SEESION) là ít nhất, số cạnh đo được trong 1 ca đo là nhiều nhất.
- Số cạnh đo trong lưới ít nhất và lưới vẫn đạt độ chính xác theo yêu cầu.
- Các điểm gốc khống chế phân bố đều về các phía khác nhau của lưới.

2.6.3. Tổ chức đo đạc

2.6.3.1. Chuẩn bị lịch vệ tinh và chọn thời điểm thu tín hiệu tốt nhất

Trước khi lập kế hoạch đo cần đặt máy thu tại khu vực cần công tác để thu tín hiệu vệ tinh trong khoảng thời gian 5 phút nhằm xác định lịch vệ tinh mới nhất. Nếu sử dụng lịch vệ tinh cũ quá 1 tháng các kết quả sẽ không chính xác.

Để bảo đảm thành công cho công tác đo GPS cần phải tiến hành lập kế hoạch đo, cụ thể là xác định thời gian đo tối ưu. Khoảng thời gian tối ưu có thể sử dụng là khoảng thời gian trong đó có số vệ tinh quan trắc đồng thời là tối đa và có PDOP không vượt quá giá trị cho phép. Khoảng thời gian tối ưu thay đổi 4 phút mỗi ngày do sự khác nhau giữa giờ sao và giờ thế giới (UT). Ví dụ: đã xác định được giờ quan trắc phù hợp của ngày hôm nay là 9:00 h (giờ UT) thì vào ngày tiếp theo thời gian quan trắc phù hợp lại là 8:56 h. Độ dài của khoảng thời gian quan trắc là hàm số của vị trí quan trắc.

Sau khi vị trí các điểm của mạng lưới đã được triển vẽ lên bản đồ, có thể tiến hành công tác khảo sát thực địa. Mục đích của việc khảo sát thực địa là nhằm xác định lại các điều kiện đo tại từng điểm và điều kiện di chuyển máy trong lưới. Thông thường lập cho mỗi điểm một phiếu khảo sát, trong đó ghi đầy đủ số hiệu điểm, tên điểm và những điều cần lưu ý. Tại mỗi điểm GPS người khảo sát cần xác định xem có bảo đảm yêu cầu góc ngưỡng không nhỏ hơn 15^{o} và bảo đảm xung quanh không có các vật phản xạ.

Khi sử dụng phần mềm GPSurvey 2.35, Modul Quick Plan/Plan là phần mềm dùng để lập kế hoạch đo. Modul này cung cấp cho người sử dụng GPS những thông tin bao gồm các hệ số DOP, góc cao của vệ tinh, góc phương vị và vị trí các vệ tinh theo thời gian. Trên cơ sở đó có thể tính toán và lập kế hoạch đo ngoài thực địa một cách hợp lý.

2.6.3.2. Tổ chức ca đo

Ca đo (Session) được hiểu là khoảng thời gian thu tín hiệu vệ tinh trùng nhau của các máy thu. Khoảng quan trắc đầu tiên trong ngày được ký hiệu là ca đo DDD0 và tiếp theo là ca đo DDD1. Số hiệu ngày DDD được ký hiệu từ 001 đến 365 (ngày Julian), và như vậy ca đo 1052 chỉ ca đo thứ ba trong ngày thứ 105. Độ dài thời gian quan trắc trong các ca đo được xác định dựa trên các căn cứ:

Độ dài của cạnh đo;

1. Số lượng vệ tinh có thể quan trắc;

2. Cấu hình vệ tinh;

3. Độ ồn của tín hiệu vệ tinh thu được (SNR- Signal Noise Ratio).

Thông thường khi vệ tinh càng nhiều thì cấu hình vệ tinh càng tốt và thời gian quan trắc có thể rút ngắn hơn. Thời gian quan trắc cũng có thể rút bớt đối với cạnh đo có chiều dài ngắn. Thời gian đo phải kéo dài tới mức nhất định để có thể xác định được số nguyên đa trị. Đối với cạnh ngắn (nhỏ hơn 1 km), số nguyên đa trị có thể được giải ra trong khoảng thời gian 5÷10 phút khi sử dụng pha của tần số L1. Bằng máy thu 2 tần số, khi sử dụng kỹ thuật cổng rộng (*Wide lane*), ở khoảng cách đo là 15 km có thể nhận được kết quả chính xác chỉ với 2 phút đo.

Phương pháp tốt nhất để xác định thời gian quan trắc đối với các mạng lưới lớn là tiến hành quan trắc với thời gian dài hơn bình thường ở ngày thứ nhất để nhận được các tệp số liệu chuẩn. Thường quan trắc kéo dài 90 phút đối với cạnh dài 1÷5 km và 120 phút đối với cạnh dài 5÷20 km. Các tệp số liệu đo thử được xử lý và thường là sẽ đạt kết quả tốt, sau đó các tệp số liệu này được xử lý lại theo các chia đoạn ngắn hơn. Thời gian quan trắc tốt nhất là thời gian được rút ngắn (đã dùng xử lý lại) nhưng vẫn giữ được kết quả tốt sau khi đối chiếu với kết quả xử lý toàn bộ số liệu đã đo. Khoảng thời gian giữa 2 ca đo cũng cần tính toán sao cho có thể kịp di chuyển máy đến điểm tiếp theo.

Trong đo tĩnh, khâu tổ chức thực hiện đo cũng là một bước quan trọng. Trong giai đoạn này người tổ chức sắp xếp trình tự đo của các ca đo, trình tự di chuyển máy và phân công cụ thể từng thành viên trong tổ đo ngoại nghiệp phụ trách máy GPS thực hiện. Việc sắp xếp trình tự đo phải phù hợp với việc điều phương tiện di chuyển máy từ điểm này sang điểm khác. Mỗi thành viên trong tổ đo cần có trong tay sơ đồ lưới, sơ đồ kế hoạch di chuyển của các máy thu và làm quen với địa hình khu vực đo, có như vậy mới thực hiện di chuyển máy từ điểm này sang điểm khác một cách nhanh chóng. Để lập được các ca đo hợp lý cần xác định số lượng ca đo tối thiểu như sau:

$$n = \frac{m.s}{r} \tag{2.15}$$

Trong đó: n là số ca đo, được làm tròn thành số nguyên lớn hơn; s là số lượng điểm cần đặt máy; r là số lượng máy thu và m là số lần đặt máy lặp trung bình tại điểm đo.

Số lượng trị đo thừa s_r, xét cho trường hợp số lần trung bình đặt máy tại các điểm đo tối thiểu q = 1 sẽ được tính theo công thức:

$$s_r = n.r - [s + (n-1)] \tag{2.16}$$

Trong quá trình đo đạc GPS cần lưu ý những vấn đề sau:

- Khi có điểm bị che khuất mà không thể khắc phục được thì cần phải chọn thời gian đo cẩn thận đảm bảo yêu cầu đặt ra.

- Trong 1 ca đo cần phải đặt được nhiều trạm máy nhất và đo được nhiều cạnh nhất.

- Số điểm phải đặt lại giữa các ca đo là ít nhất, số cạnh phải đo lặp lại giữa các ca đo là ít nhất.

- Ngoài ra còn phải chọn sao cho thời gian đo ít nhất, quãng đường đi là thuận tiện và ngắn nhất.

- Với qui trình xây dựng lưới theo công nghệ cũ cần phát triển lưới thành nhiều bậc, thi công xong cấp cao mới phát triển cấp thấp hơn do đó quá trình đo được thực hiện riêng rẽ cho từng cấp lưới là hợp lý. Đối với công nghệ GPS thì không nhất thiết phải tổ chức thi công lưới theo tuần tự như trên mà các cấp lưới khác nhau có thể đo chung theo một lịch đo. Khi đó việc lập lịch cần phải được xem xét trên bình diện tất cả các lưới cần phải đo trên cùng một khu vực.

Đo tại một trạm máy: Nếu công tác chuẩn bị chu đáo, kỹ lưỡng sẽ là điều kiện để tránh các trục trặc có thể xảy ra trong quá trình đo. Công tác chuẩn bị bao gồm các nội dung chính sau:

- Trước khi đo cần kiểm tra các máy thu GPS và các thiết bị kèm theo (chân máy, định tâm quang học, ốc nối, thước đo cao anten ...).

- Chuẩn bị phương tiện đi lại, để di chuyển máy đúng lịch đo.

- Chuẩn bị nguồn điện, ác quy hoặc pin đủ dùng, có dự trữ, pin có chất lượng tốt.

- Chuẩn bị phương tiện liên lạc (bộ đàm, hoặc điện thoại di động...). Người đo cần có đồng hồ đeo tay để phối hợp thời gian.

- Có phương án phối hợp nếu không liên lạc được bằng bộ đàm hoặc điện thoại di động (thống nhất theo thời gian đã dự kiến).

- Chuẩn bị sổ đo, bút ghi chép, sơ đồ lưới và lịch đo đã lập cho các thời đoạn đo.

Trước khi đo cần kiểm tra dung lượng của pin và ắc quy. Máy và các phụ kiện đi kèm phải đầy đủ. Trước khi thu tín hiệu cần kiểm tra dung lượng bộ nhớ trong của máy xem còn đủ chỗ dung nạp không, nếu không đủ bộ nhớ thì phải xoá bớt số liệu đã trút. Khi đo trên mốc có định tâm bắt buộc, phải lau sạch mặt mốc rồi mới lắp máy hoặc loại anten rời. Vạch định hướng của anten phải luôn luôn hướng về phía Bắc với sai số không vượt quá ±5° (nhằm giảm thiểu sai số lệch tâm pha anten). Những chỗ khó định hướng cần đặt trước cọc định hướng, mỗi lần đo dựa vào cọc định hướng để định hướng anten.

Công tác đo trong lưới GPS bao gồm các thao tác: khởi động máy thu GPS tại trạm đo và quy trình thu tín hiệu ghi vào bộ nhớ của máy. Khi đo lưới khống chế thi công nên sử dụng ít nhất 3 máy thu GPS loại một tần số có tham số độ chính xác a ≈ 5mm, b ≈ 2ppm và có định tâm quang học. Định tâm quang học của máy thu GPS được kiểm nghiệm trước khi sử dụng, bảo đảm sai số định tâm không vượt quá 1mm.

Trước khi mở máy cho một ca đo cần phải xác định ngay chiều cao anten bằng thước chuyên dụng đọc số đến 1mm. Sau khi tắt máy cũng phải đo lại chiều cao anten để kiểm tra, chênh lệch chiều cao anten giữa hai lần đo không được vượt quá ±2 mm, lấy giá trị trung bình của chiều cao anten và ghi vào sổ đo. Trong quá trình đo, cần tuân thủ đúng kế hoạch đo và bảo đảm an toàn cho máy thu. Ghi đầy đủ các thông số theo quy định của sổ đo GPS ngoại nghiệp.

Các điểm cần chú ý để đảm bảo độ chính xác trong khi đo GPS:

- Số lượng vệ tinh tối thiểu có thể thu được tín hiệu tại trạm đo phải lớn hơn 4.

- Sự thoáng đãng của bầu trời, tức các máy thu phải đặt cách xa các vật cản (nhà cửa, cây cổ thụ, ...) và các đối tượng gây nhiễu tín hiệu (trạm phát sóng, đường điện cao thế...).

- Vị trí tương hỗ giữa các vệ tinh với nhau và giữa các vệ tinh với máy thu, điều này phản ánh trong chỉ tiêu PDOP phải đạt yêu cầu.

- Đo độ cao anten đảm bảo chính xác.

2.7. XỬ LÝ SỐ LIỆU ĐO GPS

2.7.1. Giới thiệu chung về phần mềm GPSurvey 2.35

Ở Việt Nam thường sử dụng phần mềm GPSurvey 2.35 để xử lý số liệu đo GPS, đây là phần mềm do hãng Trimble xây dựng kèm theo các loại máy của hãng; với máy thu của các hãng khác nếu có định dạng số liệu đo không giống với phần mềm GPSurvey 2.35 thì có thể chuyển về định dạng RINEX để xử lý bằng phần mềm này.

Phần mềm GPSurvey 2.35 là phần mềm tích hợp (integrated family) của các chương trình xử lý GPS, được hãng Trimble xây dựng và bán kèm theo máy thu của hãng. GPSurvey 2.35 được thiết kế phục vụ cho toàn bộ các công đoạn đo đạc và tính toán xử lý số liệu đo GPS của máy thu một tần và máy thu hai tần.

GPSurvey 2.35 chạy trong môi trường Windows, có giao diện đồ họa rất dễ sử dụng. Phần mềm GPSurvey 2.35 có các modul:

Project Manager: Quản lý dự án, được sử dụng cho toàn bộ dự án.

Plan and Quick Plan: Lập kế hoạch đo.

Gpload: Trao đổi số liệu từ máy thu, từ các tệp số liệu đã có, từ TDC1 với GPSurvey.

Check – in: Hỗ trợ số liệu cho Project như kiểm tra sai số, biên tập số liệu đo và cho các thông báo; sát nhập các cạnh từ tính toán riêng lẻ; nhập lời giải cạnh từ đo thời gian thực, tự động kiểm tra sau khi kết thúc đọc số liệu vào.

Wave: Xử lý kết quả đo Static, FastStatic, Stop-and-go, Kinematic, Continuous Kinematic.

Trimnet Plus: Bình sai lưới theo phương pháp số bình phương nhỏ nhất từ tất cả các số liệu đo GPS (qua xử lý hậu kỳ và đo thời gian thực) cùng các số liệu đo truyền thống.

Network Map: Xem hình vẽ các mạng lưới, cạnh, điểm đo continuous kinematic, ghi tên trạm máy,...

Utilities: Tính toán hệ thống kiểm tra, xuất số liệu, thông báo Project; báo cáo, tệp chuẩn đồ họa (DXF), chuyển tọa độ (nếu có) và ghi chép antenna.

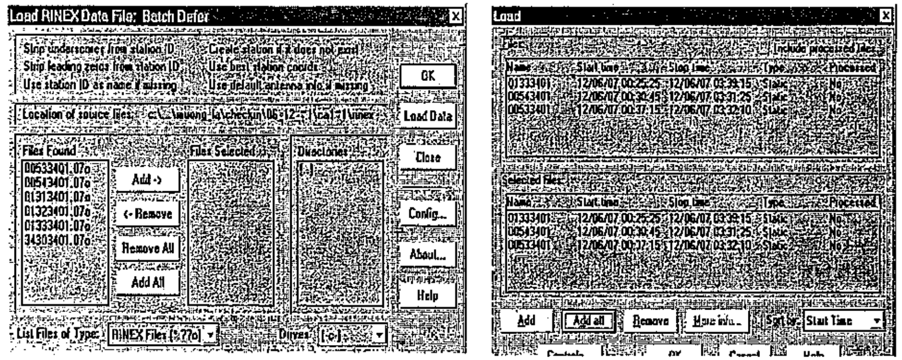
GPTrans: Chuyển đổi tọa độ và các tham số chuyển đổi.

2.7.2. Xử lý kết quả đo cạnh

Xử lý cạnh là một trong những bước quan trọng trong quá trình tính toán GPS, chiều dài cạnh có thể được coi là những trị đo của lưới. Xử lý cạnh là việc tính toán các cạnh GPS được đo đồng bộ thời gian từ hai hay nhiều máy thu. Trong đo GPS để xác định các cạnh giữa các máy thu bắt buộc phải thu số liệu trong cùng một khoảng thời gian nhất định. Đây là điều kiện bắt buộc để tính toán các cạnh GPS, các file số liệu không cùng thời gian sẽ không được đưa vào tính toán. Việc xử lý cạnh sẽ ảnh hưởng đến kết quả tính toán cho toàn mạng lưới, tính toán tốt các cạnh sẽ cho kết quả tốt trong bình sai.

2.7.2.1. Các bước xử lý cạnh

- *Tải số liệu đo:* vào menu LOAD như hình 2.15 của phần mềm GPSurvey 2.35 để tải số liệu đo. Số liệu đo có thể dưới dạng **.dat*, hoặc có thể chuyển sang dạng dữ liệu RINEX để xử lý.



Hình 2.15 - Modul xử lý cạnh

- *Tính cạnh:* Trước khi tính cạnh phải tính cải chính chiều cao Anten đo được ở thực địa về chiều cao thẳng đứng theo công thức phù hợp với từng loại Anten. Kiểm tra các giá trị nhiệt độ áp suất và độ ẩm. Có thể dựa vào độ cao khái lược của điểm xác định được thông qua máy thu để kiểm tra giá trị áp suất nhằm loại trừ sai số thô. Tiếp đến thực hiện các bước tính số cải chính độ cao Anten và điều kiện khí tượng, chọn khoảng thời gian sử dụng dữ liệu để tính toán. Nhập giá trị tọa độ và độ cao đã biết trên WGS- 84 cho một điểm với tư cách là điểm tham chiếu để làm số liệu khởi tính cho mạng lưới. Trước khi tính cạnh có thể chọn các chế độ:

- All Baselines: chọn để tính tất cả các cạnh có thể có trong một session.
- Independent Set: chọn các cạnh đo độc lập.
- User defined: các cạnh do người tính chọn.

Chất lượng tính cạnh sẽ được thể hiện thông qua việc lựa chọn như sau:

Lựa chọn lời giải: Việc xử lý cạnh là quá trình liên kết các trị đo thành các cạnh với chất lượng tốt nhất có thể. Các lời giải dựa vào chất lượng của số liệu đo GPS và tập hợp các giá trị đặt cho việc xử lý cạnh như: góc ngưỡng, số vệ tinh...

Khi tín hiệu thu là 1 tần số (L1) thì có các lời giải: Fixed, Float, Code. Khi xử lý số liệu đo một tần số sẽ phát sinh ra lời giải L1- Fixed cuối cùng nếu xác định được tính đa trị L1. Nếu việc xác định L1 không đạt, quá trình xử lý sẽ sinh ra lời giải L1 float. Lời giải L1 float xảy ra khi đo cạnh rất ngắn với thời gian đo quá ít hoặc bị ảnh hưởng nhiễu trong quá trình thu tín hiệu. Lời giải L1 float kém hơn lời giải L1 fixed, do đó trong các ứng dụng đo đạc không nên dùng lời giải L1 float. Khi xử lý cạnh có thể kiểm soát được yếu tố này thông qua giá trị của Ratio, nếu Ratio nhỏ hơn 1,5 tức là sẽ có lời giải L1 float.

Trong trường hợp tín hiệu thu là hai tần số (L1 và L2) sẽ có các lời giải: Wide lane, Narrow lane, Iono-free.

Lời giải Wide lane dựa trên hiệu liên kết hai tần số L1- L2 tạo ra một bước sóng 86 cm. Bước sóng dài này sẽ làm cho việc xử lí số nguyên đa trị dễ dàng hơn. Lời giải Narrow lane dựa trên tổng liên kết L1 + L2 tạo thành bước sóng 11 cm. Bước sóng ngắn này cung cấp lời giải chính xác hơn nhưng cũng dễ xảy ra trường hợp xác định sai số nguyên đa trị. Lời giải chỉ định Iono-free fixed là lời giải tốt nhất trong các điều kiện cự li rất xa, trong cự li gần không được áp dụng lời giải này.

Lời giải Iono-free float cho các cạnh dài cỡ trên 30 km là lời giải tốt nhất và lời giải này cần phải có thời gian đo lâu hơn để đạt được kết quả đo tốt nhất.

- *Các chỉ tiêu về độ chính xác*: chỉ tiêu này của các cạnh thường được chỉ ra trong qui phạm hoặc thiết kế kỹ thuật đối với từng cấp hạng của lưới và bao gồm các chỉ tiêu: Ratio, Reference Variance, RMS.

- Chỉ tiêu Ratio: phải đạt yêu cầu là Ratio > 1,5. Tất cả các lời giải số nguyên đa trị đều có phương sai, việc xử lý cạnh sẽ so sánh hai lời giải với phương sai nhỏ nhất. Ratio chính là phương sai của lời giải tốt thứ hai sinh ra từ phương sai của lời giải tốt nhất. Nếu Ratio lớn hơn 1,5 tức là lời giải tốt nhất gấp 1,5 lần hơn lời giải tốt thứ hai và trong trường hợp này việc xử lý chấp nhận lời giải tốt nhất. Một lời giải với Ratio lớn hơn 1,5 được coi là được thống kê tốt hơn lời giải tốt kế đó và sinh ra lời giải Fixed, chỉ có lời giải Fixed mới có Ratio. Ngưỡng cuối cùng của Ratio khi xử lý cạnh là 1,5 không thể thay đổi được, việc thay đổi giá trị cho nhỏ hơn 1,5 trong chỉ tiêu không có ý nghĩa. Nếu Ratio nhỏ hơn 1,5 thì quá trình xử lý cạnh không xác định được lời giải nào là đúng đắn, việc này dẫn tới lời giải Float. Ratio không được sử dụng khi lời giải cuối cùng trong việc xử lý cạnh là Float và Code.

- Reference variance: Refvar cũng là một trong các chỉ tiêu để khẳng định có chấp nhận việc xử lý cạnh hay không. Cạnh xử lý đạt yêu cầu phải có giá trị nhỏ hơn giá trị theo yêu cầu, thông thường giá trị này phải nhỏ hơn từ 10 đến 15 (với máy 1 tần số có thể lớn hơn nhưng xấu nhất cũng không quá 30).

- RMS: Chất lượng của lời giải cạnh chủ yếu phụ thuộc vào phép đo nhiễu và đồ hình vệ tinh. RMS là chỉ tiêu dùng để đo nhiễu của tín hiệu thu được và để thể hiện chất lượng của đồ hình vệ tinh. Chỉ tiêu này thường phải đạt yêu cầu: <0,02+0,004 x S km.

- Kết quả khép hình

Sử dụng chức năng kiểm tra sai số khép giúp đánh giá được chất lượng của kết quả xử lý cạnh. Để kiểm tra được sai số khép bắt buộc phải thiết kế lưới theo các đồ hình hình học, khi đó sẽ có điều kiện tính toán sai số khép theo dạng đồ hình hình học và đưa ra bảng báo cáo.

Việc tính sai số khép hình trong lưới GPS được thực hiện trong các hình khép kín theo công thức:

$$\left.\begin{aligned} f_X &= \sum_{i=1}^{n} \Delta X_i \\ f_Y &= \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i \\ f_Z &= \sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Sai số khép toàn phần được tính theo công thức:

$$f_{X,Y,Z} = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2 + f_Z^2} \tag{2.18}$$

Sai số khép f_X, f_Y, f_Z thực chất là hàm của các trị đo $\Delta X'$, $\Delta Y'$, $\Delta Z'$ (là các thành phần của vector cạnh).

2.7.2.2. Các biện pháp nâng cao chất lượng xử lý cạnh

Căn cứ vào chỉ tiêu đánh giá chất lượng cạnh theo yêu cầu đặt ra để xác định cạnh đã đạt hay chưa. Thông qua việc xử lý cạnh hoàn toàn có thể nâng cao độ chính xác các cạnh đo GPS.

1. Kết quả đo kém chất lượng có thể xảy ra với một số lý do sau:

- Sai sót ở ngoại nghiệp: đo xác định chiều cao anten sai, nhập tên trạm đo không đúng, định tâm lệch. Đặt các tham số máy thu: góc ngưỡng khác nhau, tốc độ thu không đồng bộ, số vệ tinh thu sử dụng khác nhau, định dạng file số liệu khác loại (khác loại máy thu).

- Thu số liệu ở các điều kiện rìa: thu quá ít vệ tinh, PDOP quá cao, nhiều vệ tinh ở góc ngưỡng thấp, điều kiện đo có nhiều chướng ngại vật, trượt chu kỳ pha nhiều và không đủ thời gian thu.

Loại sai số do sai sót ở ngoại nghiệp thường gọi là sai số thô, sai số này có thể tránh được bằng cách tuân thủ chặt chẽ theo các bước ngoài thực địa. Đo và ghi chiều cao anten vào sổ đo, ghi thời gian bắt đầu thu và thời gian kết thúc. Ghi rõ số hiệu điểm đo và ca đo tránh nhầm lẫn với các ca khác. Các sai số này sẽ được nhận biết và loại trừ thông qua việc xác định sai số khép trước khi bình sai lưới.

Việc chọn nhầm điểm đo và vào sai tên điểm đo là một trong những sai số do người đo gây nên, loại sai số này cũng có thể phát hiện khi tính sai số khép lưới và bình sai lưới, kiểm tra cẩn thận sổ đo và khi nhập số liệu đo vào Project.

2. Các biện pháp để nâng cao chất lượng xử lý cạnh

Cần đưa vào điểm tham chiếu ban đầu với độ chính xác càng cao càng tốt. Trong quá trình xử lý cạnh cũng đồng thời tiến hành tính tọa độ của các điểm còn lại, chất lượng tọa độ của các điểm tính ra tương đương với điểm tham chiếu. Do đó nâng cao chất lượng tọa độ của điểm tham chiếu ban đầu chính là nâng cao chất lượng của cả mạng lưới.

Có thể chọn lại số vệ tinh tham gia vào quá trình tính cạnh, thông qua menu SETUP\ SATELLITES để loại bỏ các vệ tinh xấu: đó là các vệ tinh có quĩ đạo sát với ngưỡng cao, các vệ tinh có tín hiệu bị đứt quãng do bị che bởi các vật cản. Có thể loại bỏ một hay nhiều vệ tinh khi thấy thời gian thu của vệ tinh này không đồng bộ hay có nhiều khoảng trượt chu kỳ và nhiễu xảy ra, bỏ các đoạn tín hiệu không tốt: thông qua Baselines \ Solution Summary để điều chỉnh các thông số phù hợp trong quá trình tính cạnh thông qua menu SETUP\ Advanced controls...

2.7.3. Tính toán bình sai lưới GPS

2.7.3.1. Yêu cầu xử lý số liệu đối với lưới trắc địa công trình

Thông thường lưới khống chế trắc địa công trình là hệ thống lưới nhiều bậc, yêu cầu độ chính xác mỗi bậc lưới tăng dần và không chịu ảnh hưởng của sai số liệu gốc. Vì vậy lưới khống chế phải được tính toán xử lý theo các nguyên tắc sau:

- Xử lý như lưới độc lập, để tránh ảnh hưởng của sai số số liệu gốc.

- Tất cả các bậc lưới phải được tính trong cùng một hệ thống tọa độ thống nhất đã được lựa chọn trong giai đoạn khảo sát trước.

2.7.3.2. Các phương án tính toán bình sai

Có 4 phương án bình sai lưới trắc địa nói chung là bình sai phụ thuộc, bình sai với sai số số liệu gốc, bình sai với số liệu gốc tối thiểu và bình sai tự do.

1. Phương án bình sai lưới phụ thuộc: phương án bình sai này sẽ chịu ảnh hưởng của sai số số liệu gốc đến kết quả bình sai, dẫn đến sự biến dạng của các bậc lưới, do vậy không dùng phương pháp này để bình sai lưới khống chế thi công công trình.

2. Phương án bình sai với sai số số liệu gốc hoặc bình sai chung các bậc lưới: phương án này chấp nhận được về mặt nguyên tắc nhưng khó thực hiện được ở điều kiện thực tế trong trắc địa công trình .

3. Phương án bình sai với số liệu gốc tối thiểu: phương án này bảo toàn được cấu trúc nội tại của lưới, nhưng thiếu chặt chẽ về mặt định vị. Do quy luật lan truyền sai số, dẫn đến các điểm càng xa điểm gốc sẽ có sai số tích lũy lớn, vì vậy phương pháp này cũng không áp dụng được cho lưới khống chế thi công.

4. Phương án bình sai lưới tự do: phương án này tránh được ảnh hưởng của sai số số liệu gốc, quá trình định vị lưới linh hoạt phù hợp với kết cấu công trình.

2.7.3.3. Cơ sở lý thuyết bình sai lưới GPS trong hệ tọa độ vuông góc không gian địa tâm

Tương tự như các mạng lưới trắc địa truyền thống khác, lưới GPS được bình sai theo nguyên lý số bình phương nhỏ nhất. Hiện nay các mạng lưới trắc địa thường được bình sai theo phương pháp gián tiếp, vì đây là phương pháp có thuật toán dễ lập trình trên máy tính điện tử. Khi bình sai mạng lưới GPS tự do trong hệ tọa độ vuông góc không gian địa tâm theo phương pháp bình sai gián tiếp, ẩn số sẽ là tọa độ X, Y, Z của các điểm cần xác định.

Trong lưới GPS tự do (số khuyết bằng 0) chỉ cần tọa độ của một điểm khởi tính, mỗi điểm còn lại trong lưới xác định 3 ẩn số, tổng số ẩn số tương ứng là T = 3P (P là điểm cần xác định). Nếu lưới GPS có từ 2 điểm gốc trở lên thì gọi là lưới GPS phụ thuộc.

Kết quả đo GPS nhận được là số gia tọa độ không gian giữa các cặp điểm, cho nên các trị đo tham gia bình sai sẽ là các số gia tọa độ DX, DY, DZ của vector *Baseline,* ma trận hiệp phương sai của các trị đo $M_{XYZ}(3x3)$ có dạng:

$$M_{(XYZ)} = \begin{bmatrix} V(x) & COV(xy) & COV(xz) \\ COV(xy) & V(y) & COV(yz) \\ COV(xz) & COV(yz) & V(z) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Các thành phần của ma trận hiệp phương sai $COV(xy)$, $COV(xz)$, $COV(yz)$ có giá trị khác nhau và được đưa ra trong lời giải cạnh. Như vậy có thể thấy các trị đo DX, DY, DZ là các trị đo phụ thuộc. Sử dụng các ký hiệu:

$(X_i, Y_i, Z_i), (X_j, Y_j, Z_j)$: Tọa độ sau bình sai của điểm i và j

$(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0), (X_j^0, Y_j^0, Z_j^0)$: Tọa độ gần đúng của điểm i và j

$(\delta X_i, \delta Y_i, \delta Z_i), (\delta X_j, \delta Y_j, \delta Z_j)$: Số hiệu chỉnh vào tọa độ gần đúng của điểm i và j.

$(\Delta X_{ij}', \Delta Y_{ij}', \Delta Z_{ij}'), (\Delta X_{ij}, \Delta Y_{ij}, \Delta Z_{ij})$: Trị đo và trị thu được ma trận bình sai

$V_{\Delta X}, V_{\Delta Y}, V_{\Delta Z}$: Số hiệu chỉnh vào trị đo.

Như vậy số gia tọa độ giữa hai điểm i, j sẽ được viết là :

$$\left.\begin{aligned} \Delta X_{ij} &= X_j - X_i \\ \Delta Y_{ij} &= Y_j - Y_i \\ \Delta Z_{ij} &= Z_j - Z_i \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Từ đó thu được các phương trình số hiệu chỉnh :

$$\left.\begin{aligned} V_{\Delta X} &= \delta X_j - \delta X_i + L_x \\ V_{\Delta Y} &= \delta Y_j - \delta Y_i + L_y \\ V_{\Delta Z} &= \delta Z_j - \delta Z_i + L_z \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

Trong đó L_x, L_y, L_z là số hạng tự do, được tính theo công thức:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= X_j^0 - X_i^0 - \Delta X_{ij}' \\ L_y &= Y_j^0 - Y_i^0 - \Delta Y_{ij}' \\ L_z &= Z_j^0 - Z_i^0 - \Delta Z_{ij}' \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

Trong mạng lưới GPS có số trị đo là N = 3n, trong đó n là số cạnh *(baseline)* đo. Như vậy sẽ lập được hệ phương trình chuẩn dưới dạng:

$$A^T PA.DX + A^T PL = 0 \qquad (2.23)$$

Trong đó :

A là ma trận hệ số của hệ phương trình số hiệu chỉnh với vector ẩn số:

$$DX = (\delta X_i\ \delta Y_i\ \delta Z_i\ \delta X_j\ \delta Y_j\ \delta Z_j \ldots\ldots\ldots\ldots)^T$$

P là ma trận trọng số :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & P_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & P_n \end{bmatrix}$$

Ma trận trọng số P là ma trận khối, P_i là các ma trận vuông kích thước 3x3.

$$p_i = M_{(XYZ)}^{-1} \qquad (2.24)$$

Giải hệ phương trình chuẩn sẽ nhận được vector ẩn số DX :

$$DX = -(A^T PA)^{-1}(A^T PL) \qquad (2.25)$$

Số liệu gốc tối thiểu cho một mạng lưới GPS là 3 giá trị tọa độ X,Y,Z (hoặc B,L,H) của một điểm trong lưới. Trong trường hợp lưới không có điểm khởi tính (lưới hoàn toàn tự do) ma trận hệ số phương trình chuẩn là ma trận suy biến, do đó phải tính ma trận giả nghịch đảo để giải nghiệm của hệ phương trình chuẩn, khi đó sẽ tính được vector ẩn số DX :

$$DX = -(A^T PA)^{+}(A^T PL) \qquad (2.26)$$

Trong đó ma trận $(A^T P A)^+$ là ma trận giả nghịch đảo của ma trận hệ số phương trình chuẩn, được tính theo công thức:

$$(A^T PA)^+ = (A^T PA + C^T C)^{-1} - C^T (CC^T CC^T)^{-1} C \qquad (2.27)$$

Với C là một ma trận phụ, thoả mãn điều kiện:

$$C.DX = 0 \qquad (2.28)$$

Giá trị bình sai của tọa độ các điểm trong lưới được tính theo tọa độ gần đúng và số hiệu chỉnh DX , cụ thể là:

$$\left.\begin{aligned} X &= X^0 + \delta X \\ Y &= Y^0 + \delta Y \\ Z &= Z^0 + \delta Z \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Và tính vector trị đo sau bình sai :

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= \Delta X' + V_{\Delta X} \\ \Delta Y &= \Delta Y' + V_{\Delta Y} \\ \Delta Z &= \Delta Z' + V_{\Delta Z} \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

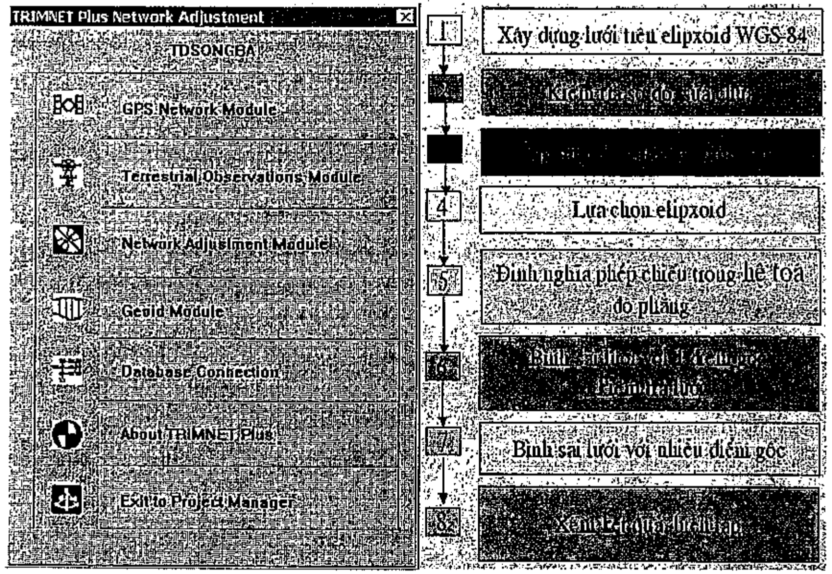
Đối với lưới GPS, việc đánh giá độ chính xác các yếu tố trong lưới sau bình sai cũng được thực hiện theo quy trình giống như đối với các mạng lưới truyền thống khác.

2.7.3.4. Bình sai lưới bằng phần mềm GPSurvey 2.35

Từ Menu adjust cho phép sử dụng modul Trimnet của phần mềm GPSurvey 2.35. Modul này bao gồm các thành phần sau:

- GPS Network Module
- Terrestrial Observations Module
- Network Adjusttment Module
- Geoid Module
- Data Base Connection Module.

Trong trường hợp sử dụng phương pháp đo tương đối, sau khi xử lý phase sẽ nhận được các thành phần của véc tơ *baseline* bao gồm các số gia tọa độ không gian DX, DY, DZ và ma trận tương quan tương ứng.



Hình 2.16 - Modul bình sai

Quy trình chung để tính toán bình sai mạng lưới GPS bao gồm 2 bước sau:

- *Bước 1:* Xem các số gia tọa độ không gian của các véc tơ *baseline* tạo nên mạng lưới GPS là các trị đo để bình sai mạng lưới trong hệ tọa độ không gian quốc tế WGS-84.

- *Bước 2:* Xử lý các trị đo GPS trong hệ tọa độ quốc gia nhằm nhận được tọa độ phẳng và độ cao của các điểm đo trong hệ tọa độ này. Trong bước 2 này cũng tự động thực hiện việc biến đổi các số gia tọa độ DX, DY, DZ thành các trị đo cạnh, phương vị và hiệu độ cao trắc địa. Các trị đo này được quy chiếu tiếp lên các mặt toán học (ellipsoid, mặt phẳng) để bình sai trong hệ tọa độ quốc gia. Từ thực đơn chính của phần mềm GPSurvey 2.35 chuyển sang Modul Trimnet bằng cách chọn Adjust sau đó chọn Network. Chọn GPS Network Module, khi đó chương trình sẽ tự động nhặt những baseline trong cơ sở dữ liệu để xây dựng lưới. Kết thúc quá trình, sẽ hiện ra sơ đồ lưới, lúc này cần đối chiếu kiểm tra lại sơ đồ lưới so với thiết kế về đồ hình lưới, tên điểm so với thiết kế. Nếu có sự sai khác, cần kiểm tra lại các công đoạn có liên quan để quyết định biện pháp giải quyết. Quá trình này cũng cho phép sửa đổi tên, kiểm tra các điểm và các cạnh trùng.

Trước tiên, cần xây dựng 1 hệ thống quy chiếu phù hợp. Phần mềm GPSurvey có khả năng cho phép lựa chọn theo hệ tọa độ địa lý hay hệ tọa độ phẳng. Các elipxoid được định nghĩa bằng 2 trong 3 tham số: bán trục lớn: a, bán trục nhỏ: b và độ dẹt: α.

Hệ tọa độ địa tâm WGS- 84 sử dụng elipxoid có các kích thước: bán trục lớn: a=6378137 m; bán trục nhỏ: b = 635657 m; độ dẹt: α=1/289,257223563.

Hệ tọa độ HN 1972 có các thông số của elipxoid quy chiếu Krasovxki như sau: bán trục lớn: a = 6371245 m; bán trục nhỏ: b = 6356863,01; độ dẹt: α=1/289,3.

2.7.3.5. Biện pháp nâng cao chất lượng bình sai

Cần bình sai tự do với một điểm có B, L, H trên WGS-84, các điểm còn lại dùng làm các điểm kiểm tra. So sánh, đối chiếu các điểm đã có tọa độ, nếu sai số nhỏ thì cho phép tiếp tục dùng các điểm đó làm gốc (FIXED) để bình sai lưới. Nếu sự sai khác giữa các tọa độ gốc mà lớn thì cần kiểm tra lại các công đoạn có liên quan để quyết định các bước tiếp theo (xử lý lại hay đo lại). Khi bình sai cần phải chú ý sử dụng trọng số của các trị đo một cách hợp lý, nhất là các mạng lưới trắc địa có đồ hình không chuẩn (các cạnh trong lưới có chiều dài khác nhau nhiều).

Tận dụng tối đa các cạnh đã đo được để đưa vào tham gia xây dựng lưới, tạo cho đồ hình lưới có nhiều trị đo thừa, khi đó đồ hình lưới có thể không giống với đồ hình thiết kế.

Với qui trình xây dựng lưới theo công nghệ cũ cần phát triển lưới thành nhiều bậc, thi công xong lưới cấp cao mới phát triển lưới cấp thấp hơn, do đó quá trình bình sai được thực hiện riêng rẽ cho từng cấp lưới là hợp lý. Với công nghệ GPS thời gian thi công nhanh, tính chất đo đạc không nhất thiết theo tuần tự (có thể gộp vào để đo chung theo một lịch đo), do đó nên bình sai chung các cấp lưới vừa đảm bảo nâng cao độ chính xác của mạng lưới, vừa giảm thiểu sự tích luỹ sai số số liệu gốc.

2.8. TÍNH CHUYỂN TỌA ĐỘ GPS VỀ TỌA ĐỘ CÔNG TRÌNH

Hệ thống tọa độ toàn cầu WGS-84 được sử dụng làm hệ tọa độ quy chiếu của công nghệ định vị GPS. Vị trí điểm trong định vị tuyệt đối cũng như các vector cạnh đều được xác định trong hệ quy chiếu này. Trong công tác trắc địa công trình, để các trị đo ít bị biến dạng nhất cần chọn một hệ tọa độ phù hợp với khu vực công trình thông qua chọn mặt chiếu phải là mặt có độ cao trung bình của công trình, kinh tuyến trung bình của khu vực xây dựng có hệ số biến dạng gần bằng 1.

Có 3 phép chuyển đổi tọa độ thường được sử dụng để chuyển đổi tọa độ đo bằng GPS về hệ tọa độ cục bộ của công trình là chuyển đổi tọa độ qua các múi chiếu, chuyển đổi từ hệ tọa độ địa tâm sang hệ tọa độ địa diện và chuyển đổi tọa độ phẳng đồng dạng.

2.8.1. Tính chuyển tọa độ phẳng giữa các múi chiếu

2.8.1.1. Tính chuyển tọa độ trong hệ HN-72

1. Tính chuyển từ (B, L) sang (x, y)

$$\left.\begin{array}{ll}
x = & 6367558{,}4969\,(B''/\rho'') - \{a_o - [0{,}5 + (a_4 + a_6 l^2)\, l^2\,] l^2 N\}\,\mathrm{SinB.CosB};\\
y = & [1 + (a_3 + a_5 l^2)\, l^2\,] l.N.\mathrm{CosB} + 500000;\\
l = & (L - L_o)\,''/\rho'';\\
N = & 6399698{,}902 - [21562{,}267 - (108{,}973 - 0{,}612.\mathrm{Cos}^2B)\mathrm{Cos}^2B]\mathrm{Cos}^2B;\\
a_o = & 32140{,}404 - [135{,}3302 - (0{,}7092 - 0{,}004\mathrm{Cos}^2B)\mathrm{Cos}^2B]\mathrm{Cos}^2B;\\
a_4 = & (0{,}25 + 0{,}00252\ \mathrm{Cos}^2B)\mathrm{Cos}^2B - 0{,}04166;\\
a_6 = & (0{,}166\mathrm{Cos}^2B - 0{,}084)\mathrm{Cos}^2B;\\
a_3 = & (0{,}33333333 + 0{,}001123\mathrm{Cos}^2B)\mathrm{Cos}^2B - 0{,}1666667;\\
a_5 = & 0{,}0083 - [0{,}1667 - (0{,}1968 + 0{,}004\mathrm{Cos}^2B)\mathrm{Cos}^2B]\mathrm{Cos}^2B
\end{array}\right\} \quad (2.31)$$

2. Tính chuyển từ (x,y) sang (B,L)

$$\left.\begin{array}{ll}
B = & B_x - [1 - (b_4 - 0{,}12z^2)z^2]z^2 b_2 \rho''/3600\\
L = & L_o + l\\
L = & [1 - (b_3 - b_5 z^2)z^2]z\rho''/3600\\
B_x = & \beta + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\mathrm{Cos}^2\beta)\mathrm{Cos}^2\beta]\mathrm{Cos}^2\beta\}\,10^{10}\\
 & \mathrm{Sin}\beta\mathrm{Cos}\beta\rho''/3600\\
\beta = & (x/6367558{,}4969)\rho''/3600\\
z = & (y - 500000)/(N_x \mathrm{CosB}_x)\\
b_2 = & (0{,}5 + 0{,}003369\mathrm{Cos}^2B_x)\mathrm{SinB}_x\mathrm{CosB}_x\\
b_3 = & 0{,}333333 - (0{,}166667 - 0{,}00123\ \mathrm{Cos}^2B_x)\mathrm{Cos}^2B_x\\
b_4 = & 0{,}25 + (0{,}16161 + 0{,}00562\mathrm{Cos}^2B_x)\mathrm{Cos}^2B_x\\
b_5 = & 0{,}2 - (0{,}1667 - 0{,}0088\mathrm{Cos}^2B_x)\mathrm{Cos}^2B_x.
\end{array}\right\} \quad (2.32)$$

2.8.2.2. Tính chuyển tọa độ trong hệ Vn-2000

1. Tính chuyển từ (x, y) sang (B, L)

$$\left.\begin{aligned}
&U=\frac{x}{0,9996};\quad V=\frac{y-500000,0}{0,9996};\ K=0.0\\
&a_0=R=6378137,0\\
&b_0=6356752,314;\\
&e=\sqrt{\frac{a_0^2-b_0^2}{a_0^2}}\\
&a=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8\\
&p=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8\\
&c=\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8\\
&d=\frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8\\
&g=\frac{315}{16384}e^8
\end{aligned}\right\}\qquad(2.33)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Lặp: } N=\frac{U}{R(1-e^2)}+\frac{p}{2}Sin(2K)-\frac{c}{4}Sin(4K)+\frac{d}{6}Sin(6K)-\frac{g}{8}Sin(8K)\\
&\quad N=\frac{N}{a}\frac{180}{\pi};\ T=ABS(N-K);\ K=N\\
&\text{Nếu } T\geq 0{,}000000001 \text{ quay lại } \textbf{Lặp}
\end{aligned}\right\}\qquad(2.34)$$

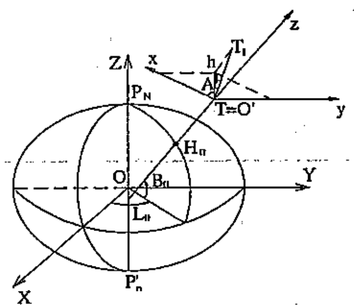
$$\left.\begin{aligned}
&W=tgK\quad N=\frac{R}{\sqrt{1-e^2Sin^2K}};\quad N=\frac{V}{N};\quad T=\frac{e^2}{1-e^2}Cos^2K\\
&B=-\frac{(1+T)WN^2}{2}+\frac{(5+3W^2+6T-6TW^2)WN^4}{24}-\frac{(61+90W^2+45W^4)WN^6}{720}\\
&B=K+\frac{180B}{\pi}\\
&L=\frac{N}{CosK}-\frac{(1+2W^2+T)N^3}{6CosK}+\frac{(5+28W^2+24W^4+6T+8TW^2)N^5}{120CosK}\\
&L=H+\frac{180}{\pi}
\end{aligned}\right\}\qquad(2.35)$$

2. Tính chuyển từ (B,L) sang (x,y)

$$\left.\begin{aligned}
&N=\frac{R}{\sqrt{1-e^2Sin^2B}}\\
&T=\frac{e^2}{1-e^2}Cos^2B\\
&Q=\frac{L-H}{180}\pi\\
&W=tgB\\
&x=R(1-e^2)(aB\frac{\pi}{180}-\frac{p}{2}Sin(2B)+\frac{c}{4}Sin(4B)-\frac{d}{6}Sin(6B)+\frac{g}{8}Sin(8B))+\\
&+N\frac{Q^2}{2}SinBCosB+(5-W^2+9T+4T^2)N\frac{Q^4}{24}SinBCos^3B\\
&+(61-58W^2+W^4+270T-330TW^2)N\frac{Q^6}{720}.SinB.Cos^5B\\
&y=NQCosB+(1-W^2+T)N\frac{Q^3}{6}Cos^3B\\
&+(5-18W^6+14T-58TW^2+13T^2-64T^2W^2)N\frac{Q^5}{120}Cos^5B\\
&X=0{,}9996X;\ y=0{,}9996Y+500000{,}0;
\end{aligned}\right\}\qquad(2.36)$$

2.8.2. Tính chuyển tọa độ địa tâm về tọa độ địa diện

Hệ tọa độ địa diện chân trời có gốc tọa độ O' trùng với điểm T trên mặt đất (thường là điểm quan sát). Ba trục tọa độ là $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Trục $O'z'$ trùng với pháp tuyến tại điểm T. Trục $O'x'$ nằm trong mặt phẳng kinh tuyến qua T, vuông góc với trục $O'z'$ và hướng về cực bắc Trái Đất. Trục $O'y'$ vuông góc với mặt phẳng $x'O'y'$ và hướng về phía đông (hình 2.17).



Hình 2.17 - Hệ tọa độ địa diện chân trời

Tọa độ địa diện x, y, z của một điểm quan sát được tính theo công thức:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin B\cos L & -\sin B\sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ \cos B\cos L & \cos B\sin L & \sin B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X-(N+H_o)\cos B_o\cos L_o \\ Y-(N+H_o)\cos B_o\sin L_o \\ Z-[No(1-e^2)+H_o].\sin B_o \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Trong đó: X, Y, Z là tọa độ vuông góc không gian địa tâm của điểm P cần tính chuyển; B_0, L_0, H_0 là tọa độ trắc địa của điểm trọng tâm lưới (hay gốc tọa độ của hệ tọa độ địa diện).

N_0 là bán kính cong vòng thẳng đứng thứ nhất đi qua hệ tọa độ địa tâm:

$$N_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2 B_0 + b^2\sin^2 B_0}} \quad (2.38)$$

Trong công thức (2.38): a, b là bán trục lớn và bán trục nhỏ của Ellipsoid WGS- 84; e: tâm sai thứ nhất của Ellipsoid.

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad (2.39)$$

B, L, H là tọa độ trắc địa của điểm cần tính chuyển, được xác định từ các công thức:

$$tgB = \frac{Z}{P}\left(1-e^2\frac{N}{N+H}\right) \quad (2.40)$$

$$tgL = \frac{Y}{X} \quad (2.41)$$

$$H = \frac{P}{\cos B} - N \quad (2.42)$$

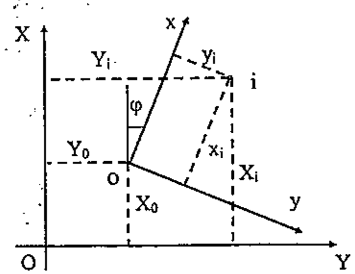
Trong đó:

$$P = \sqrt{X^2+Y^2} \quad (2.43)$$

2.8.3. Tính chuyển tọa độ phẳng Helmert

Đối với hai hệ tọa độ vuông góc phẳng liên hệ với 2 hệ quy chiếu khác nhau, trên phạm vi không quá lớn có thể chuyển đổi tọa độ theo công thức chuyển đổi tọa độ Helmert. Nếu i là điểm có tọa độ trong cả 2 hệ xoy và XOY (hình 2.18), khi đó:

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + m.x_i.\cos\varphi - m.y_i.\sin\varphi \\ Y_i &= Y_0 + m.y_i.\cos\varphi + m.x_i.\sin\varphi \end{aligned} \quad (2.44)$$



Hình 2.18 - Tính chuyển tọa độ phẳng

Trong công thức (2.44): X_i, Y_i là tọa độ của điểm trong hệ tọa độ thứ hai; x_i, y_i là tọa độ

của điểm trong hệ tọa độ thứ nhất; X_0, Y_0 là các giá trị dịch chuyển gốc tọa độ, chính là tọa độ gốc của hệ thứ nhất trong hệ thứ hai. X_0, Y_0 là các giá trị dịch chuyển gốc tọa độ, φ là góc xoay giữa 2 hệ tọa độ, m là hệ số tỷ lệ dài giữa hai hệ.

Để tính chuyển tọa độ từ hệ thứ nhất sang hệ thứ hai, cần xác định 4 tham số chuyển đổi, đó là độ lệch gốc tọa độ X_0,Y_0, góc xoay φ và tỷ lệ dài m. Muốn xác định được 4 tham số thì cần ít nhất 2 điểm có tọa độ trong cả hai hệ (gọi là điểm song trùng). Trong trường hợp này thường không tính chuyển trực tiếp từ hệ x,y sang hệ X,Y mà tính chuyển thông qua hệ tọa độ trọng tâm x',y' với các tọa độ thành phần được xác định như sau:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i - x_0 \\ y_i' &= y_i - y_0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

trong đó x_0,y_0 là tọa độ trọng tâm, được tính theo công thức:

$$x_0 = \frac{[x]}{n};\ y_0 = \frac{[y]}{n}$$

trong đó n là số lượng điểm tham gia tính.

Như vậy biểu thức (2.44) sẽ có dạng:

$$\begin{aligned} X_i &= X_0 + m.x_i'.\cos\varphi - m.y_i'.\sin\varphi \\ Y_i &= Y_0 + m.y_i'.\cos\varphi + m.x_i'.\sin\varphi \end{aligned} \quad (2.46)$$

Nếu có n điểm song trùng thì sẽ lập được 2.n phương trình số hiệu chỉnh dạng:

$$\begin{aligned} V_{X_i} &= X_0 + m.x_i'.\cos\varphi - m.y_i'.\sin\varphi - X_i \\ V_{Y_i} &= Y_0 + m.y_i'.\cos\varphi + m.x_i'.\sin\varphi - Y_i \end{aligned} \quad (2.47)$$

Coi các điểm song trùng có độ chính xác như nhau, hệ phương trình (2.47) được giải với điều kiện $[V_X^2 + V_Y^2] = \min$.

Kí hiệu:

$$\begin{aligned} P &= m.\cos\varphi \\ Q &= m.\sin\varphi \end{aligned} \quad (2.48)$$

Khi đó:

$$\varphi = acrtg\frac{Q}{P} \text{ và } m = \sqrt{P^2+Q^2} \quad (2.49)$$

Hệ phương trình số hiệu chỉnh (2.47) được viết được ở dạng:

$$V_{X_i} = X_0 + x_i'.P - y_i'.Q - X_i$$
$$V_{Y_i} = Y_0 + y_i'.P + x_i'.Q - Y_i \tag{2.50}$$

Trên cơ sở ghép cặp phương trình hiệu chỉnh đối với các điểm song trùng sẽ lập hệ phương trình chuẩn với 4 ẩn số là X_0, Y_0, P và Q.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1' & -y_1' \\ 0 & 1 & y_1' & x_1' \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & 0 & x_n' & -y_n' \\ 0 & 1 & y_n' & x_n' \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ P \\ Q \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} -X_1 \\ -Y_1 \\ .... \\ -X_n \\ -Y_n \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Hệ phương trình chuẩn có dạng:

$$C^T CX + C^T L = 0 \tag{2.52}$$

Suy ra:

$$X = -(C^T C)^{-1} C^T L \tag{2.53}$$

Dựa vào vector tham số X để tính chuyển tọa độ của các điểm từ hệ xoy sang hệ XOY.

2.8.4. Quy trình tính chuyển tọa độ GPS về tọa độ công trình

Khi sử dụng công nghệ GPS để thành lập lưới khống chế thi công trong trắc địa công trình thì thường phải tính chuyển tọa độ các điểm đo GPS về hệ tọa độ thi công công trình. Kết quả tính chuyển sẽ đảm bảo tính đồng nhất giữa hệ tọa độ thiết kế và hệ tọa độ thi công công trình cũng như đảm bảo độ chính xác cần thiết khi bố trí công trình. Hệ tọa độ được lựa chọn cho công trình phải đảm bảo 2 điều kiện:

1- Sự đồng nhất giữa hệ tọa độ thiết kế và hệ tọa độ thi công công trình.

2- Chiều dài cạnh trong hệ tọa độ công trình có độ biến dạng ít nhất so với chiều dài đo được ở thực địa.

2.8.4.1. Tính chuyển từ tọa độ phẳng (x, y)

Trong trường hợp này việc tính chuyển được thực hiện qua các bước sau:

- Tính chuyển tọa độ phẳng (x, y) sang múi chiếu phù hợp sao cho độ biến dạng chiều dài là nhỏ nhất so với thực địa, kết quả thu được tọa độ (x', y').

- Tính chuyển tọa độ (x', y') theo phương pháp Helmert về tọa độ công trình dựa trên cơ sở các điểm song trùng.

2.8.4.2. Tính chuyển từ tọa độ không gian (X,Y,Z)

Bài toán tính chuyển từ hệ tọa độ vuông góc không gian địa tâm WGS-84 về hệ tọa độ địa diện tại điểm quan sát được xác định theo quy trình sau:

1. Căn cứ vào tọa độ địa tâm của các điểm đo GPS, tính chuyển tọa độ điểm GPS từ hệ tọa độ địa tâm về hệ tọa độ trắc địa.

2. Xác định điểm gốc của hệ tọa độ địa diện bằng cách lấy tọa độ trọng tâm và độ cao trung bình của khu vực xây dựng.

3. Từ tọa độ không gian của các điểm đo GPS, tính chuyển tọa độ các điểm đo GPS từ hệ tọa độ WGS- 84 về hệ tọa độ địa diện.

4. Dựa vào tọa độ của các điểm song trùng trong hệ tọa độ thi công, tính các tham số tính chuyển tọa độ trong hai hệ tọa độ phẳng theo phép tính chuyển Helmert.

5. Tính tọa độ cho các điểm đo GPS còn lại trong hệ tọa độ thi công theo các tham số tính chuyển đã xác lập.

$$v_i = a.\delta X + l_i \qquad (3.34)$$

Trong đó: a là vector hệ số; v_i và l_i lần lượt là số hiệu chỉnh và số hạng tự do của phương trình.

- Tính ma trận nghịch đảo đến trị đo thứ i:

$$Q_i = Q_{i-1} - \frac{Q_{i-1}a_i^T a_i Q_{i-1}}{\frac{1}{p_i} + a_i Q_{i-1} a_i^T} \qquad (3.35)$$

Trong đó: p được ký hiệu là trọng số của trị đo thứ i.

- Tính vector số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn:

$$b_m = b_m + a_m.p.l_i \qquad (3.36)$$

(Bước tính 2-a, 2-b và 2-c được lặp bắt đầu từ trị đo thứ nhất đến trị đo cuối cùng).

3- Tính vector ẩn số:

$$\delta X = -Q.b \qquad (3.37)$$

4- Đánh giá độ chính xác các yếu tố trong lưới

- Sai số trọng số đơn vị;

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{n-t}} \qquad (3.38)$$

- Sai số trung phương ẩn số:

$$M_{\delta x_i} = \mu.\sqrt{Q_{ii}} \qquad (3.39)$$

- Sai số trung phương hàm số:

$$M_F = \mu . \sqrt{\frac{I}{P_F}} \qquad (3.40)$$

Trong đó trọng số đảo của hàm số được tính theo công thức:

$$\frac{1}{P_F} = f^T.Q.f \qquad (3.41)$$

Phương pháp bình sai truy hồi có ưu điểm hơn các phương pháp thông thường ở những điểm sau :

- Phương pháp bình sai truy hồi áp dụng công thức tính ma trận nghịch đảo mà không cần lập hệ phương trình chuẩn, do đó thuật toán của phương pháp này đơn giản và thuận tiện cho việc lập trình trên máy tính.

- Trong bài toán khảo sát độ chính xác của các mạng lưới trắc địa, nhiều khi phải thay đổi trị đo như tăng số trị đo hoặc giảm bớt số trị đo, khi đó công thức truy hồi cho phép không cần phải lập lại hệ phương trình chuẩn, không cần tính ma trận nghịch đảo từ đầu nên rất thuận tiện cho việc tính toán thiết kế lưới.

Tuy nhiên phương pháp truy hồi có khối lượng tính toán tương đối lớn, việc xử lý số liệu bằng cách tính cầm tay gặp nhiều khó khăn, còn nếu sử dụng kỹ thuật lập trình thì đơn giản và hiệu quả hơn rất nhiều. Vì vậy với sự phổ cập của công nghệ thông tin như hiện nay thì việc áp dụng phương pháp bình sai truy hồi cho hiệu quả rất rõ nét.

3.4. BÌNH SAI LƯỚI TRẮC ĐỊA TỰ DO

3.4.1. Khái niệm về lưới trắc địa tự do

Phụ thuộc vào tính chất số liệu gốc, lưới trắc địa được chia thành 2 loại là lưới phụ thuộc và lưới tự do. Lưới trắc địa tự do được định nghĩa là loại lưới mà trong đó không có đủ số liệu gốc tối thiểu cần thiết cho việc định vị mạng lưới đó.

Mỗi dạng lưới có một tập hợp số liệu gốc tối thiểu riêng biệt, cụ thể là: lưới độ cao có số liệu gốc tối thiểu là độ cao của một điểm gốc, lưới mặt bằng có số liệu gốc tối thiểu là một cặp tọa độ (X, Y), một phương vị và một cạnh đáy. Như vậy có thể rút ra định nghĩa cụ thể hơn cho các dạng lưới tự do như sau:

1. Lưới độ cao tự do là lưới không có điểm độ cao gốc.

2. Lưới mặt bằng tự do là lưới thiếu toàn bộ hoặc thiếu một số trong nhóm yếu tố gốc tối thiểu là: một cặp tọa độ (X, Y), một góc phương vị, một cạnh đáy (số lượng yếu tố gốc tối thiểu trong lưới mặt bằng là 4).

Số lượng các yếu tố gốc còn thiếu trong tất cả các mạng lưới được gọi là số khuyết của lưới và được ký hiệu bằng d, còn bản thân lưới được gọi là lưới tự do bậc d. Từ các khái niệm trên suy ra:

1- Đối với lưới độ cao tự do, số khuyết d =1 và là lưới tự do bậc 1.

2- Đối với lưới mặt bằng tự do, số khuyết d có thể nhận các giá trị (1, 2, 3, 4), tương ứng bậc tự do của lưới là (1, 2, 3, 4).

Để phân biệt mức độ và dạng tự do của lưới mặt bằng, thường dùng ký hiệu:

- Lưới (x, y, α, m) - tự do: nếu trong lưới thiếu cả 4 yếu tố gốc tối thiểu, số bậc tự do của lưới là 4.

- Lưới (x, y, α) - tự do: nếu trong lưới thiếu một cặp tọa độ (X, Y) và góc định hướng (lưới tự do bậc 3).

- Lưới (x, y, m) - tự do: nếu trong lưới thiếu một cặp tọa độ (X, Y) và cạnh để xác định kích thước lưới (lưới tự do bậc 3).

- Lưới (x, y) - tự do: nếu trong lưới thiếu một cặp tọa độ gốc (X, Y), (lưới tự do bậc 2).

Nếu lưới trắc địa có thừa yếu tố gốc tối thiểu thì được gọi là lưới trắc địa phụ thuộc. Như vậy sẽ có một trường hợp đặc biệt khi trong lưới có vừa đủ số liệu yếu tố gốc tối thiểu. Trong lý thuyết bình sai, dạng lưới như vậy được coi là lưới tự do bậc 0 (số khuyết d = 0).

Khi số liệi gốc trong lưới trắc địa có sai số vượt quá sai số đo và nếu số liệu gốc chỉ được được sử dụng để định vị lưới thì mạng lưới đó cũng được coi là lưới tự do. Nếu trong bình sai lưới phụ thuộc, các điểm có số liệu gốc được gọi là điểm gốc (hoặc điểm khởi tính), thì trong bình sai tự do các điểm đó được gọi là điểm định vị.

3.4.2. Cơ sở lý thuyết của phương pháp bình sai tự do

3.4.2.1. Định nghĩa

Bình sai tự do được định nghĩa là bình sai lưới trắc địa tự do theo phương pháp gián tiếp với ẩn số cần xác định là độ cao (đối với lưới thủy chuẩn) hoặc tọa độ (đối với lưới mặt bằng) của tất cả các điểm trọng lưới.

3.4.2.2. Lý thuyết chung

Giả sử một mạng lưới tự do được bình sai theo phương pháp gián tiếp với ẩn số là tọa độ (độ cao) tất cả các điểm mốc trong lưới, khi đó:

1. Hệ phương trình số hiệu chỉnh có dạng:

$$A.\delta X + L = V \tag{3.42}$$

Với: A là ma trận hệ số, δx là vector ẩn số ; V, L là các vector số hiệu chỉnh và số hạng tự do.

Vì trong lưới tự do không có đủ các yếu tố định vị tối thiểu nên ma trận hệ số của hệ phương trình số hiệu chỉnh (3.42) có một số cột phụ thuộc, bằng với số khuyết (kí kiệu là d) của lưới.

2. Khi chuyển từ hệ phương trình số hiệu chỉnh sang hệ phương trình chuẩn theo nguyên lý số bình phương nhỏ nhất sẽ thu được:

$$R.\delta X + b = 0 \tag{3.43}$$

Với: $R = A^T\mathrm{PA}; \mathrm{b} = \mathrm{A}^T\mathrm{L}$;

Ma trận hệ số R trong phương trình (3.43) có tính chất: Det (R) = 0

3. Hệ phương trình chuẩn (3.43) có vô số nghiệm, vì vậy không thể giải theo các phương pháp thông thường. Nhưng có thể xác định được vector nghiệm riêng bằng cách đưa bổ sung một hệ phương trình điều kiện ràng buộc đối với vector ẩn số dưới dạng:

$$C^T.\delta X + L_c = 0 \tag{3.44}$$

Biểu thức (3.44) phải thoả mãn 2 điều kiện:

- Số lượng phương trình bằng số khuyết trong mạng lưới (d).
- Các hàng của ma trận C^T phải độc lập tuyến tính đối với các hàng của ma trận A.

4. Kết hợp hai biểu thức (3.43) và (3.44) sẽ thu được hệ phương trình chuẩn mở rộng:

$$\begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta X \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ L_C \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình (3.45) có nghịch đảo thường và có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận khối:

$$\begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^{\sim} & T \\ T^T & 0 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Khi đó nghiệm của hệ phương trình (3.46) được xác định theo công thức:

$$\delta X = -R^{\sim}b - T.L_c \tag{3.47}$$

Trong các công thức (3.46, 3.47), ma trận $R^{\sim}$ là một dạng giả nghịch đảo của R và có thể được tính như sau:

$$R^{\sim} = (R + CP_0C^T)^{-1} - TP_0^{-1}T \tag{3.48}$$

Với:

$$T = B(C^TB)^{-1} \tag{3.49}$$

Trong công thức (3.49): B là ma trận kích thước (dxk), thỏa mãn điều kiện $A.B = 0$. Trong các ứng dụng thực tiễn ma trận B thường được chọn như sau:

- Đối với lưới độ cao:

$$B = (111.........1)^T \tag{3.50}$$

- Đối với lưới mặt bằng:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

với các phần tử B_i (ứng với điểm thứ i) được xác định theo công thức:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_i & X_i \\ 0 & 1 & -X_i & Y_i \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

5. Đánh giá độ chính xác các yếu tố trong lưới được thực hiện theo quy trình thông thường, tương tự như trong bình sai gián tiếp kèm điều kiện, cụ thể là:

- Sai số trung phương đơn vị trọng số

$$\mu = \sqrt{\frac{V^T PV}{N - t + d}} \tag{3.53}$$

- Sai số trung phương của hàm số

$$m_F = \mu . \sqrt{\frac{1}{P_F}} \tag{3.54}$$

Trong đó:

$$\frac{1}{P_F} = f^T R^{\sim} f \tag{3.55}$$

Trong các công thức trên: N-k+d - số lượng trị đo thừa trong lưới.

f - vector hệ số khai triển của hàm số.

3.4.3. Các tính chất của bình sai tự do

3.4.3.1. Tính chất của vector nghiệm

Các vector tọa độ bình sai trong lưới tự do ứng với những lựa chọn ma trận C và các vector tọa độ gần đúng khác nhau đều có sự đồng dạng hình học.

Điều này có nghĩa là nếu X_1, X_2 là 2 vector tọa độ bình sai của cùng một mạng lưới tự do thì luôn tồn tại quan hệ:

$$X_2 = X_1 + BZ \tag{3.56}$$

với B là ma trận chuyển đổi tọa độ phẳng Helmert, Z là vector tham số chuyển đổi.

Trường hợp 1: Nếu trong 2 phương án bình sai chọn ma trận C khác nhau với cùng có một vector tọa độ gần đúng $X^{(0)}$, khi đó:

$$X_2 = X_1 + BZ_1 \tag{3.57}$$

Với vector tham số chuyển đổi tọa độ:

$$Z_1 = (C_2{}^T B)^{-1} C_2{}^T R^{\sim} b \tag{3.58}$$

Trường hợp 2: Nếu trong 2 phương án bình sai chọn cùng ma trận C và với các vector tọa độ gần đúng khác nhau ($\eta = X_0^{(2)} - X_0^{(1)} \neq 0$).

$$X_2 = X_1 + BZ_2 \tag{3.59}$$

Với vector tham số chuyển đổi tọa độ:

$$Z_2 = (C^T B)^{-1} C^T \eta \tag{3.60}$$

Trường hợp 3: Nếu vector tọa độ bình sai X_1 ứng với lựa chọn C_1, $X_1^{(0)}$, vector tọa độ bình sai X_2 ứng với lựa chọn C_2, $X_2^{(0)}$, khi đó:

$$X_2 = X_1 + BZ_3 \tag{3.61}$$

Với vector tham số chuyển đổi:

$$Z_3 = (C_2{}^T B)^{-1} C_2{}^T (R_1^{\sim} b_1 + \eta) \tag{3.62}$$

3.4.3.2. Tính chất của vector trị bình sai các đại lượng đo

Vector trị bình sai của các đại lượng đo là duy nhất, không phụ thuộc vào sự lựa chọn ma trận định vị C cũng như lựa chọn vector tọa độ gần đúng.

3.4.3.3. Vai trò của ma trận định vị

Nếu như trong bình sai lưới phụ thuộc kết quả tọa độ bình sai chỉ phụ thuộc vào số liệu tọa độ gốc và không phụ thuộc vào vector tọa độ gần đúng của các điểm mới trong lưới, thì qui luật trên không đúng đối với trường hợp bình sai lưới tự do.

Xét mối liên hệ giữa hai vector tọa độ bình sai X_1 và X_2, ứng với các phương án chọn vector tọa độ gần đúng $X_1^{(0)}$ và $X_2^{(0)}$. Đặt:

$$\eta = X_2^{(0)} - X_1^{(0)}$$

Giữa 2 vector X_1, X_2 có mối liên hệ:

$$X_2 = X_1 + TC^T \eta \tag{3.63}$$

Như vậy: *Vector tọa độ bình sai trong lưới tự do phụ thuộc vào sự lựa chọn vector tọa độ gần đúng và ma trận C.*

Giả sử: $C^T = (C_1^T \; C_2^T)$; $\eta = (\eta 1 \; \eta 2)$, khi đó:

$$X_2 - X_1 = T(C_1^T \eta_1 + C_2^T \eta_2) \tag{3.64}$$

Từ công thức (3.64) rút ra được hai hệ quả:

1. Hệ quả 1:

Với $C1 \neq 0$; $C2 = 0$ thì giữa X_1 và X_2 có quan hệ:

$$X_2 - X_1 = TC_1^T \eta_1 \tag{3.65}$$

Điều đó có nghĩa là: *Vector tọa độ bình sai không phụ thuộc vào tọa độ gần đúng của các điểm có C = 0.*

(Các điểm có $C_i \neq 0$ được gọi là điểm định vị),

2. Hệ quả 2:

Nếu trong công thức (3.65) chọn $C1 \neq 0$; $C2 = 0$; $\eta_1 = 0$, sẽ thu được:

$$X_1 = X_2 \tag{3.66}$$

Như vậy: *Với cùng một tập hợp vector tọa độ các điểm định vị thì sẽ thu được kết quả là một vector tọa độ bình sai duy nhất.* Với các tính chất nêu ở trên, phương pháp bình sai tự do hoàn toàn thích hợp để xử lý các mạng lưới thi công, lưới quan trắc chuyển dịch biến dạng công trình.

3.5. TÍNH TOÁN BÌNH SAI LƯỚI KHỐNG CHẾ THI CÔNG CÔNG TRÌNH

3.5.1. Quy trình tính toán

Lưới khống chế trắc địa công trình là những mạng lưới được thành lập trong quá trình khảo sát, thiết kế, thi công và vận hành các công trình kỹ thuật thuộc nhiều lĩnh vực kinh tế-xã hội khác nhau. Theo mục đích sử dụng, lưới trắc địa công trình được chia thành 3 nhóm, gồm: lưới khảo sát, lưới thi công và lưới quan trắc chuyển dịch biến dạng. Yêu cầu độ chính xác, mật độ điểm và một số chỉ tiêu kỹ thuật của lưới trắc địa công trình có nhiều điểm khác biệt so với các mạng lưới trắc địa nhà nước do loại lưới này cần phải đáp ứng những yêu cầu đa dạng của các giai đoạn xây dựng và của từng loại công trình.

Tuy nhiên, điểm đặc trưng nhất của lưới khống chế trắc địa công trình là ở chỗ, các mạng lưới đó đều là lưới cục bộ với yêu cầu độ chính xác tăng dần từ bậc trước đến bậc sau (lưới thi công), hoặc là dạng lưới đo lặp với mục đích xác định độ chuyển dịch các điểm mốc trong lưới (lưới quan trắc biến dạng công trình). Như vậy lưới khống chế trắc địa công trình thuộc về dạng lưới trắc địa tự do và do đó, trong tính toán xử lý số liệu lưới áp dụng phương pháp bình sai tự do là phù hợp, đúng với bản chất của các mạng lưới đó.

Lưới thi công là mạng lưới nhiều bậc, được thành lập trong giai đoạn thiết kế kỹ thuật công trình và là cơ sở trắc địa cho việc bố trí tổng thể, bố trí chi tiết và đo vẽ hoàn công công trình. Lưới khống chế thi công có những đặc điểm sau:

- Cấu trúc hệ thống lưới được xây dựng theo nguyên tắc từ tổng thể đến cục bộ, đồng thời yêu cầu độ chính xác đối với từng bậc lưới lại tăng dần (lưới bậc sau có độ chính xác cao hơn bậc lưới trước).

- Các bậc lưới thi công cần được định vị trong cùng một hệ tọa độ để bảo đảm tính thống nhất trong phân bố các hạng mục công trình.

Yêu cầu độ chính xác và đồ hình lưới được tính toán, lựa chọn trên cơ sở đáp ứng các chỉ tiêu của công tác bố trí công trình và đo vẽ hoàn công. Vì vậy lưới thi công phải được xây dựng và xử lý số liệu theo các nguyên tắc:

- Là mạng lưới độc lập cục bộ (để tránh ảnh hưởng sai số số liệu gốc).

- Tất cả các bậc lưới thi công cần phải được tính tọa độ (độ cao) trong một hệ thống thống nhất, đã được lựa chọn trong giai đoạn khảo sát công trình.

Việc thực hiện các quy định trên đảm bảo cho lưới thi công không bị biến dạng do ảnh hưởng sai số số liệu gốc, đồng thời tất cả các bậc lưới được định vị trong cùng một hệ tọa độ chung.

Phân tích khả năng ứng dụng các phương pháp bình sai đối với lưới thi công công trình có thể nhận thấy: phương pháp bình sai lưới phụ thuộc sẽ dẫn đến ảnh hưởng sai số số liệu gốc trong kết quả xử lý và như vậy sẽ gây ra sự biến dạng của từng bậc lưới, áp dụng phương án bình sai với sai số số liệu gốc hoặc bình sai gộp tổng thể các bậc lưới trong hệ thống là đúng về nguyên tắc nhưng khó thực hiện trong điều kiện thực tế trắc địa công trình, phương án bình sai với số liệu gốc tối thiểu (lưới tự do bậc 0) bảo toàn được cấu trúc nội tại của lưới nhưng có nhược điểm là thiếu chặt chẽ về phương diện định vị lưới, quy luật lan truyền sai số sẽ dẫn đến tình trạng các điểm càng xa điểm gốc sẽ có sai số tích luỹ lớn. Chỉ còn phương án bình sai lưới tự do đáp ứng được các yêu cầu đối với lưới thi công: tránh được ảnh hưởng của sai số số liệu gốc, quá trình định vị lưới được thực hiện linh hoạt, phù hợp với điều kiện thực tế.

Để định vị lưới thi công vào vị trí gần đúng nhất so với hệ tọa độ đã có trên công trình xây dựng cần chọn ma trận C trong công thức 3.44 (với điều kiện L_c=0) theo quy tắc:

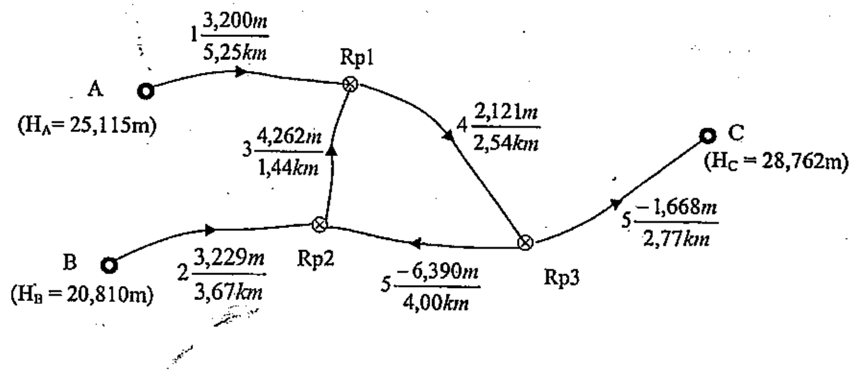
$$C = \begin{cases} B \text{ - đối với các điểm định vị} \\ 0 \text{ - đối với các điểm khác} \end{cases} \qquad (3.67)$$

Trong công thức (3.67), tùy thuộc vào từng dạng lưới và điều kiện định vị mà ma trận B được xác định theo một trong các biểu thức (3.50) hoặc (3.51).

3.5.2. Ví dụ bình sai lưới khống chế thi công

1. Bình sai lưới độ cao thi công

Xử lý số liệu mạng lưới độ cao thi công có sơ đồ như trên hình 3.6: Các điểm mới lập là Rp1, Rp2, Rp3; Các điểm định vị là A, B, C (có độ cao ghi trong ngoặc đơn). Số liệu đo chênh cao của các tuyến được ghi dưới dạng phân số: ở tử số ghi chênh cao đo, ở mẫu số ghi chiều dài tuyến.



Hình 3.6 - Sơ đồ lưới độ cao cơ sở

Chương V

PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT VÀ BÌNH SAI TRỰC TIẾP

A. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT

V-1. KHÁI NIỆM VỀ BÌNH SAI

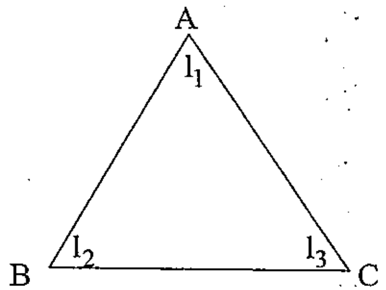
Chúng ta biết rằng trong trắc địa, ngoài lượng đo cần thiết người ta còn tiến hành đo thừa. Các đại lượng đo thừa này được liên hệ trực tiếp với các đại lượng đo cần thiết bằng các hàm toán học. Các đại lượng đo thừa sẽ làm tăng độ chính xác của những đại lượng cần xác định và cho phép đánh giá độ chính xác của chúng với độ tin cậy cao, trên cơ sở mối liên hệ toán học giữa các giá trị đo.

Ví dụ: Trong tam giác phẳng (hình V-1) đo cả ba góc cùng độ chính xác và nhận được các kết quả l_1, l_2, l_3. Các giá trị thực tương ứng là X_1, X_2, X_3.

Chúng ta có thể thiết lập được các mối quan hệ toán học giữa 3 góc trong một tam giác như sau:

$$X_1 + X_2 + X_3 - 180^0 = 0 \tag{V-1}$$

Phương trình (V-1) gọi là phương trình điều kiện hình tam giác. Số phương trình đúng bằng số đại lượng đo thừa bằng 1. Rõ ràng đo thừa chỉ là một phần của tổng các giá trị đo, cho nên luôn luôn có r < n.



Hình V-1

Ở ví dụ trên đây r = 1 và n = 3. Vì vậy phương trình (V-1) có vô số nghiệm.

Vì giá trị thực của các góc chúng ta không biết nên thay các giá trị đo vào (V-1) ta sẽ có:

$$l_1 + l_2 + l_3 - 180^0 = w \tag{V-2}$$

Vì các giá trị đó có sai số, nên vế phải của biểu thức (V-2) khác không, tức là có sai số khép w. Để làm mất w hay nói cách khác là đem w hiệu chỉnh vào các góc đo theo một phương pháp toán học đã chọn mà người ta gọi là bình sai. Nhiệm vụ tiếp theo là đánh giá độ chính xác theo các kết quả đã bình sai.

Ta kí hiệu giá trị sau bình sai là $x_i = l_i + v_i$ (i =1,2,3) (V-3)

Ở đây v_i là số hiệu chỉnh cần tìm.

Như vậy (V-1) có dạng: $l_1 + v_1 + l_2 + v_2 + l_3 + v_3 - 180^0 = 0$ (V-4)

So sánh (V-4) với (V-3) ta có:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \tag{V-5}$$

Đây cũng là phương trình vô định.

Phương pháp được chọn để giải bài toán trên phải thoả mãn hai yêu cầu:

- Khử sai số khép w.

- Số hiệu chỉnh v_i tìm được phải xấp xỉ sai số thực của giá trị đo (tức là các sai số ngẫu nhiên). Chúng ta cần lưu ý hai điểm quan trọng trong bài toán bình sai là:

a. Điều kiện để tiến hành bình sai là: tồn tại những đại lượng đo thừa và những sai số nhỏ không tránh của các giá trị đo.

b. Mục đích của bình sai là: triệt tiêu sai số khép và nâng cao độ chính xác của tất cả các đại lượng cần xác định.

V-2 NGUYÊN TẮC BÌNH PHƯƠNG NHỎ NHẤT

Dựa trên cơ sở lý thuyết xác suất, người ta đã chứng minh được rằng trong trường hợp đo cùng độ chính xác, để nhận được các giá trị sau bình sai $(l_i + v_i)$, với i = 1,2,3...n có độ tin cậy lớn nhất là xấp xỉ với giá trị thực thì: tổng các bình phương v_i phải thoả mãn điều kiện.

$$[vv] = \min \tag{V-6}$$

Trong trường hợp đo không cùng độ chính xác thì

$$[Pvv] = \min \tag{V-7}$$

Ở đây $P_i = \dfrac{\mu^2}{m_i^2}$ là trọng số của giá trị đo l_i.

Các điều kiện (V-6) và (V-7) gọi là nguyên tắc bình phương nhỏ nhất.

Nếu trong kết quả đo chỉ bao gồm các sai số ngẫu nhiên thì chúng tuân theo luật phân bố chuẩn và những giá trị tuân theo nguyên tắc bình phương nhỏ nhất sẽ là những giá trị xác suất nhất. Cần chú ý rằng công thức (V-3) được xây dựng trên cơ sở lý thuyết nhưng trong thực tế đo đạc không thể loại bỏ triệt để sai số hệ thống. Mặt khác, số lần đo lại không nhiều do đó khi áp dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để tiến hành bình sai thì nên hiểu là đã giả thiết với số lần đo vô hạn và ảnh hưởng của sai số hệ thống là không đáng kể.

Như vậy nghiệm của (V-5) sẽ là một nhóm v_i nào đó thoả mãn điều kiện (V-6) và sẽ là nghiệm của phương trình (V-5).

Để tìm nghiệm đó ta làm như sau:

Đặt $$\Phi = [vv] = \min \qquad \text{(V-8)}$$

hay $$\Phi = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2k(v_1 + v_2 + v_3 + w) = \min$$

k - gọi là số nhân chưa xác định hoặc là hệ số Lagrang, trong trắc địa gọi là hệ số liên hệ.

Để tìm cực tiểu của hàm ϕ ta lấy đạo hàm riêng theo v_i rồi cho bằng không.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 0$$; Nghĩa là $2v_i - 2k = 0$ và $v_i = k$.

Thay v_i vào (V-5) ta có: $3k + w = 0$ suy ra $k = -\frac{w}{3}$;

nghĩa là $$v_i = -\frac{w}{3}.$$

Giá trị sau khi bình sai là $x_i = l_i + \left(-\frac{w}{3}\right)$

Rõ ràng $v_i = -\frac{w}{3}$ thoả mãn điều kiện (V-6) và là nghiệm duy nhất của (V-5).

Ta thấy rằng ưu điểm nổi bật của phương pháp bình phương nhỏ nhất không những giúp ta tìm được giá trị tin cậy nhất của các đại lượng cần tìm mà còn giúp ta giải những bài toán bình sai rất thuật lợi.

V-3. CƠ SỞ ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN BÌNH SAI

Như đã nêu ở trên, ta thấy rằng việc bình sai đồng thời nhiều đại lượng theo phương pháp bình phương nhỏ nhất thực chất là giải bài toán cực trị.

Giả thiết cần tìm cực tiểu của hàm $[pvv] = \min$ (V-9)

Trong đó các biến v_i được bằng những phương trình điều kiện độc lập có dạng:

$$\varphi_j(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \ldots, l_n + v_n) = 0 \quad (j = a, b, c \ldots r) \qquad \text{(V- 10)}$$

Để giải bài toán này, chúng ta có hai phương pháp cơ bản:

+ Phương pháp Lagrang với các số nhân chưa xác định (hay còn gọi là phương pháp cực trị có điều kiện), trong tính toán bình sai gọi tắt là bình sai điều kiện.

+ Phương pháp cực trị tuyệt đối, trong tính toán bình sai gọi là bình sai gián tiếp.

Trong thực tế tuỳ thuộc vào nội dung và khối lượng tính toán cụ thể của từng bài toán mà vận dụng một cách linh hoạt một trong hai phương pháp bình sai cơ bản nêu trên.

Ví dụ: Chỉ cần tìm giá trị xác suất nhất của một đại lượng ra áp dụng phương pháp bình sai trực tiếp (trường hợp đặc biệt của phương pháp bình sai gián tiếp). Khi cần tìm giá trị xác suất nhất của nhiều đại lượng ta có thể áp dụng một trong hai phương pháp bình sai trên.

Trong bình sai điều kiện, nếu khối lượng tính toán lớn ta có thể áp dụng phương pháp bình sai chia nhóm. Ngoài ra, tuỳ theo yêu cầu đặt ra của từng bài toán chúng ta có thể áp dụng phương pháp bình sai kết hợp.

Mặc dù bình sai theo phương pháp nào cũng phải thực hiện 3 nội dung cơ bản sau:

- Tìm giá trị xác suất nhất của đại lượng đo.
- Đánh giá độ chính xác của giá trị đo.
- Đánh giá độ chính xác giá trị xác suất nhất hay hàm các giá trị sau khi bình sai.

B. BÌNH SAI TRỰC TIẾP

Bình sai trực tiếp là trường hợp đặc biệt của phương pháp bình sai gián tiếp khi chỉ có một ẩn số.

Bản chất của phương pháp bình sai trực tiếp là tiến hành đo nhiều lần một đại lượng (ví dụ góc và chiều dài) và nhận được nhiều giá trị đo, có thể là cùng độ chính xác hoặc không cùng độ chính xác. Nhiệm vụ đặt ra là tiến hành bình sai như thế nào để tìm giá trị xác suất nhất của các giá trị đo và đánh giá chính xác của các giá trị đo cũng như giá trị sau khi bình sai.

V-4. BÌNH SAI TRỰC TIẾP CÁC GIÁ TRỊ ĐO CÙNG ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA MỘT ĐẠI LƯỢNG

V-4-1. Giá trị trung bình cộng và sai số trung phương của nó

a. Giá trị trung bình cộng

Tiến hành đo cùng một đại lượng nhiều lần cùng độ chính xác, khi số lần tăng lên vô hạn thì giá trị trung bình cộng của các giá trị đo sẽ rất gần với giá trị thực, cho nên trong bình sai trực tiếp cùng độ chính xác, giá trị trung bình cộng được coi là giá trị xác suất nhất. Đây chính là nguyên lý của giá trị trung bình cộng. Nguyên lý này có thể dựa vào đặc tính thứ 4 của sai số ngẫu nhiên để chứng minh.

Giả thiết giá trị thực của đại lượng đó là X. Chúng ta đo n lần cùng độ chính xác và được các kết quả $l_1, l_2 \ldots l_n$ với các sai số ngẫu nhiên tương ứng là $\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$.

Theo định nghĩa của sai số ngẫu nhiên ta có:

$$\Delta_i = X - l_i \ (i = 1 \div n) \qquad \text{(V -11)}$$

Lấy tổng hai vế: $[\Delta] = nX - [l]$

Chia hai vế cho n ta được:

$$\frac{[\Delta]}{n} = X - \frac{[l]}{n} \qquad \text{(V - 12)}$$

Ký hiệu:

$$\delta = \frac{[\Delta]}{n}$$

$$x = \frac{[l]}{n} \qquad \text{(V - 14)}$$

Khi đó (V -12) có dạng: $X = x + \delta$ (V - 15)

Ta nhận thấy rằng x là giá trị trung bình cộng của tất cả các giá trị đo còn δ là sai số thực của giá trị trung bình cộng.

Theo đặc tính thứ 4 của sai số ngẫu nhiên, ta có:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0 \text{ ; Do đó } \lim_{n \to \infty} x = X$$

Nghĩa là: khi số lần đo tăng lên vô hạn thì giá trị trung bình cộng x sẽ xấp xỉ với giá trị thực. Nhưng trong thực tế không thể tiến hành đo vô hạn lần được, vì vậy người ta gọi giá trị trung bình cộng với số lần đo có hạn là giá trị đáng tin cậy nhất hay giá trị xác suất nhất.

Giá trị xác suất nhất tìm được cần thoả mãn nguyên lý bình phương nhỏ nhất (tổng bình phương các hiệu giữa các giá trị xác suất nhất và giá trị đo là nhỏ nhất).

Giả thiết rằng giá trị xác suất nhất của một đại lượng nào đó là x. Các giá trị đo lần lượt là $l_1, l_2, \ldots l_n$. Độ chênh lệch giữa giá trị xác suất và giá trị đo được kí hiệu là v ta có:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}\right\} \qquad \text{(V - 16)}$$

Trong các công thức v_i còn được gọi là số hiệu chỉnh của giá trị đo (sai số xác suất nhất).

Chúng ta dựa vào nguyên lý bình phương nhỏ nhất để tìm một giá trị xác suất nhất x sao cho tổng bình phương các độ chênh lệch giữa x và các giá trị đo l_i là nhỏ nhất, tức là:

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_3^2 = \min \qquad \text{(V - 17)}$$

Để tìm giá trị cực tiểu của hàm trên, ta viết lại quan hệ giữa [vv] và x

$$[vv] = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \ldots.. + (x - l_n)^n = \min \qquad \text{(V - 18)}$$

Lấy đạo hàm bậc nhất đối với biến x sau đã cho bằng 0.

$$\frac{d[vv]}{dx} = (x - l_1) + (x - l_2) + \ldots + (x - l_n) = 0$$

Từ đó ta nhận được: $nx - [l] = 0$ suy ra $x = \dfrac{[l]}{n}$ (V - 19)

Lấy đạo hàm bậc hai ta có: $\dfrac{d^2[vv]}{dx^2} = 2n > 0$

Vì đạo hàm bậc hai dương nên giá trị x tìm được theo công thức (V-19) thoả mãn điều kiện [vv] = min.

Do đó giá trị x tìm được theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất cũng chính là giá trị trung bình cộng. Vì vậy nguyên lý giá trị trung bình cộng và nguyên lý bình phương nhỏ nhất là hoàn toàn thống nhất vì đều cho kết quả như nhau.

b. Sai số trung phương của giá trị trung bình cộng

$$x = \frac{[l]}{n} = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \ldots.. + \frac{1}{n} l_n$$

Vì các giá trị đo đều cùng độ chính xác và đều có sai số trung phương là m, nên sai số trung phương của x là:

$$M_x^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2 + \ldots.. + \left(\frac{1}{n}\right)^2 m^2$$

Hay $$M_x^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 (m^2 + m^2 + ... + m^2) = n\frac{1}{n^2}m^2 = \frac{m^2}{n}$$

$$M_x = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{(V-20)}$$

Tức là sai số trung phương của giá trị trung bình cộng bằng $\frac{1}{\sqrt{n}}$ lần sai số trung phương của giá trị đo.

Chúng ta nghiên cứu quan hệ giữa M_x và n trong điều kiện m không đổi. (ví dụ m = 1).

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
M_x	1.00	0.71	0.58	0.50	0.45	0.41	0.35	0.32	0.22	0.14	0.10

Ta thấy rằng n càng lớn thì M_x càng nhỏ, tức là độ chính xác của giá trị trung bình cộng được nâng cao.

Nhưng sau khi tăng số lần đo lên đến một mức độ nhất định, rồi lại tiếp tục tăng số lần đo thì độ chính xác tăng lên không đáng kể. Ví dụ, số lần đo tăng từ 20-100, độ chính xác cũng chỉ tăng có 2 lần, như vậy là không kinh tế. Cho nên muốn nâng cao độ chính xác của kết quả đo không chỉ đơn giản là tăng số lần đo lên là đạt mục đích, mà phải tìm biện pháp nâng cao độ chính xác do ngắm, điều kiện đo, phương pháp, máy và số lần đo thích hợp.

V-4-2. Sai số trung phương của giá trị đo

a. Công thức Bet-xen

Chúng ta đã biết sai số trung phương của giá trị đo tính theo sai số ngẫu nhiên:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \qquad \text{(V-21)}$$

Vì giá trị thực thường không biết nên các sai số ngẫu nhiêu Δ cũng không thể biết trước, do đó trong thực tế công thức trên ít được ứng dụng.

Khi biết một dãy các giá trị đo l_i ta sẽ tính ngay được giá trị xác suất x của chúng, do đó dễ dàng tính được số hiệu chỉnh v_i, tức là:

$$v_i = x - l_i \ (i = 1 \div n) \qquad \text{(V-22)}$$

Ta hãy thành lập công thức tính sai số trung phương của giá trị đo theo số hiệu chỉnh v_i. Muốn vậy trước tiên chúng ta phải tìm quan hệ giữa Δ và v.

Theo công thức (V-11) $\Delta_i = X - l_i$

Lấy công thức này trừ đi công thức (V-22) theo vế, ta được:

$$\Delta_i - v_i = X - x \qquad \text{(V-23)}$$

Ta đã biết $X - x = \delta$

Vậy $$\Delta_i - v_i = \delta \text{ hay } \Delta_i = v_i + \delta \qquad \text{(V-24)}$$

Bình phương hai vế của (V-24) rồi lấy tổng theo hai vế ta có:

$$[\Delta\Delta] = [vv] + 2\delta[v] + n\delta^2 \qquad \text{(V-25)}$$

Từ công thức (V-22) ta có thể viết được:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ .... \\ v_n = x - l_n \end{array}\right\} \qquad \text{(V - 26)}$$

Lấy tổng theo 2 vế:

$$[v] = n.x - [l] \qquad \text{(V - 27)}$$

Thay $x = \frac{[l]}{n}$ vào (V-27) ta được

$$[v] = n\frac{[l]}{n} - [l] = 0 \qquad \text{(V - 28)}$$

Nghĩa là trong bình sai trực tiếp cùng độ chính xác tổng số hiệu chỉnh bằng 0. Vì vậy công thức (V-25) có dạng:

$$[\Delta\Delta] = [vv] + n\delta \qquad \text{(V - 29)}$$

Chia hai vế của (V-29) cho n ta có:

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[vv]}{n} + \delta \qquad \text{(V - 30)}$$

Từ công thức (V-24) ta viết:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = v_1 + \delta \\ \Delta_2 = v_2 + \delta \\ .... \\ \Delta_n = v_n + \delta \end{array}\right\} \qquad \text{(V - 31)}$$

Lấy tổng 2 vế của (V-31) ta được

$$[\Delta] = [v] + n\delta$$

Theo (V-28) thì $[\Delta] = n\delta$ hay ($\delta = \frac{[V]}{n}$) (V - 32)

Do đó $\delta^2 = \frac{1}{n^2}\left([\Delta\Delta] + 2[\Delta_i\Delta_j]\right)$ $i \neq j$ (V- 33)

Vì tích của 2 sai số ngẫu nhiên vẫn là sai số ngẫu nhiên nên theo tính chất thứ 4 của sai số ngẫu nhiên thì:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_i\Delta]}{n} = 0$$

Như vậy $\delta^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n^2}$ (V- 34)

Thay công thức (V-34) vào (V-30) ta có

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[vv]}{n} + \frac{[\Delta\Delta]}{n^2} \qquad (V - 35)$$

Dựa vào công thức (V-21) thì (V-35) có dạng:

$$m^2 = \frac{[vv]}{n} + \frac{m^2}{n} \text{ hay } m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad (V - 36)$$

Đây chính là công thức tính sai số trung phương của giá trị đo theo số hiệu chỉnh v và gọi là công thức Bet-xen.

Vì số lượng v_i có hạn (số lần đo có hạn) nên bản thân giá trị m tính theo công thức (V-36) và M_x tính theo công thức (V-20) vẫn có sai số. Trong lý thuyết xác suất đã chứng minh được rằng, trong trường hợp v_i có hạn thì sai số trung phương của m và M_x tính theo công thức sau:

$$m_m = \pm\frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad (V\text{-}37)$$

$$m_{Mx} = \pm\frac{m_m}{\sqrt{n}} \qquad (V\text{-}38)$$

b. Công thức Pête

Công thức Bet-xen dùng số hiệu chỉnh v để tính sai số trung phương (m) còn công thức Pête thì dùng v để tính sai số trung bình (θ).

Trong chương I chúng ta đã biết mối quan hệ giữa sai số trung phương và sai số trung bình là:

$$\theta = \frac{4}{5}m$$

hay $\frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ (V - 39)

Khi n đủ lớn thì v có đầy đủ đặc tính của sai số ngẫu nhiên. Do đó theo lý thuyết xác suất thì ta có thể viết được:

$$\frac{[|v|]}{n} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \qquad (V - 40)$$

$$\frac{[|v|]}{n} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{[vv]}{n}} \qquad (V\text{-}40a)$$

Theo công thức Bet-xen thì:

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[vv]}{n-1} \qquad (V - 41)$$

Thay (V - 41) vào (V - 40) ta nhận được

$$\frac{[|v|]}{n} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad (V - 42)$$

Mặt khác công thức (V - 40a) có thể viết dưới dạng:

$$\frac{4}{5}\sqrt{[vv]} = \frac{[|v|]}{\sqrt{n}} \qquad (V - 43)$$

Công thức (V - 42) có thể phân tích:

$$\frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{4}{5}\sqrt{[vv]}.\frac{1}{\sqrt{n-1}} \qquad (V - 44)$$

Thay (V - 43) vào (V - 44) ta nhận được:

$$\frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{[|v|]}{\sqrt{n}}.\frac{1}{\sqrt{n-1}} = \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad (V - 45)$$

Hay $$\theta = \pm \frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad (V - 46)$$

Đây là công thức tính sai số trung bình theo số hiệu chỉnh v, được gọi là công thức Pête.

Khi n đủ lớn, có thể lấy gần đúng

$$(n-1)n \approx n^2 - n + 1/4 = (n-1/2)^2$$

Như vậy công thức (V - 46) có dạng:

$$\theta = \pm \frac{[|v|]}{n - \frac{1}{2}} \qquad (V - 47)$$

Nếu tính sai số trung phương theo công thức $m = \pm\frac{5}{4}\theta$ thì:

$$m = \pm 1{,}253.\frac{[|v|]}{n - \frac{1}{2}} \qquad (V- 48)$$

Trong thực tế thường dùng công thức (V-36) (công thức Bet-xen) để tính sai số trung phương của giá trị đo, còn công thức (V-48) dùng để ước tính sai số trung phương đo góc trong lưới tam giác cấp II, III và IV. Khi n đủ lớn có thể dùng công thức (V-48) để kiểm tra công thức (V-36).

V-4-3. Ví dụ về bình sai trực tiếp các giá trị đo cùng độ chính xác

a. Trình tự các bước tiến hành bình sai trực tiếp cùng độ chính xác như sau:

1. Tính các giá trị xác suất nhất (giá trị trung bình cộng) của tất cả các giá trị đo.

$$x = \frac{[l]}{n}$$

2. Tính các sai số trung phương giá trị đo theo công thức Bet-xen

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

3. Tính sai số trung phương của giá trị trung bình cộng.

$$M_x = \pm\frac{m}{\sqrt{n}} \text{ và } m_{Mx} = \pm\frac{m}{\sqrt{2(n-1)n}}$$

Vì độ chênh giữa các giá trị đo l_i tương đối nhỏ, nên khi tính giá trị trung bình cộng chỉ cần tính giá trị trung bình của các số chênh đó. Nghĩa là trong các giá trị đo l_i, ta chọn một giá trị gần đúng x_o, sau đó lần lượt lấy mỗi giá trị đo l_i trừ đi x_o khi đó ta có các số chênh là:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= l_1 - x_0 \\ \delta_2 &= l_2 - x_0 \\ &\dots \\ \delta_n &= l_n - x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (V-49)$$

Lấy tổng 2 vế:

$$[\delta_i] = [l] - nx_o \qquad (V - 50)$$

Chia 2 vế cho n ta có

$$\frac{[\delta_i]}{n} = \frac{[l]}{n} - x_0 \qquad (V - 51)$$

Đặt $$\frac{[\delta_i]}{n} = \delta_x \qquad (V - 52)$$

Thay (V-52) vào (V-51) và chú ý đến $\frac{[l]}{n} = x$ nên công thức (V -51) có thể viết dưới dạng:

$$\delta_x = x - x_0$$

Hay $$x = x_0 + \delta_x \qquad (V- 53)$$

Khi đó v_i có thể được tính theo công thức: $v_i = \delta_x - \delta_{li}$ (V-53a)

b. Các bước kiểm tra trong quá trình tính toán

1. Tổng các số hiệu chỉnh v thoả mãn điều kiện [v] = 0.
2. Kiểm tra [vv].

Để thành lập công thức kiểm tra [vv] ta biến đổi:

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = v_1(x-l_1) + v_2(x-l_2) + \dots + v_n(x-l_n)$$

$$[vv] = x[v] - [lv] = 0 - [lv]$$

$$[vv] = -[lv] \qquad (V-54)$$

Chú ý: Khi dùng các giá trị đo l_i và các giá trị gần đúng x_o để tính δ_{li} thì công thức (V-54) cần phải biến đổi cho thích hợp.

Muốn vậy ta thay (V-49) vào (V-54) sẽ nhận được

$$[vv] = -[v(x_o + \delta_i)] = -x_o[v] - [v\delta_i]$$

Vì $[v] = 0$ nên $[vv] = -[v\delta_i]$ (V-55)

3. Khi n đủ lớn, ta dùng công thức Pête để kiểm tra công thức Bet-xen.

$$m = \pm 1{,}253 \frac{[|v|]}{n - \frac{1}{2}}$$

Ví dụ: Đoạn thẳng AB được đo 6 lần cùng độ chính xác. Kết quả ghi trong bảng (V-1). Hãy tính:

- Giá trị xác suất của đoạn AB.
- Sai số trung phương của giá trị đo.
- Sai số trung phương của giá trị xác suất nhất.

Kết quả bình sai ghi trong bảng V-1

Bảng V-1

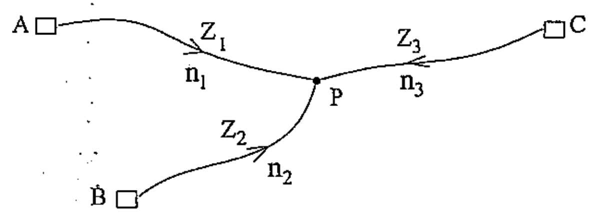
TT	L(m)	δ_i(mm)	V	vv	$v\delta_i$	Chú thích
1	346.535	-5	+4	16	-20	Công thức Bét - xen:
2	346.548	+8	-9	81	72	$m = \pm\sqrt{\frac{632}{6-1}} = \pm 11.2mm$
3	346.520	-20	+19	361	-380	
4	346.546	+6	-7	49	-42	$Mx = \pm\frac{11.2}{\sqrt{6}} = \pm 4.6mm$
5	346.550	+10	-11	121	-110	Công thức kiểm tra:
6	346.537	-3	+2	4	-6	$m = \pm 1.253 \times \frac{52}{6-0.5} =$
$x_0 = 346.540$ $x = x_0 + \delta_x$ $= 346.539$		$[\delta_i] = 4$ $\delta_x = \frac{[\delta_i]}{n}$ $= 0.7 \approx -1$	$[v] = -2$ $[vv] = 52$	$[vv] =$ 632	$[\delta_i] =$ -630	Kết quả cuối cùng: X= 346.539 '0.005

V-5. BÌNH SAI TRỰC TIẾP CÁC GIÁ TRỊ ĐO KHÔNG CÙNG ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA CÙNG MỘT ĐẠI LƯỢNG

V-5-1. Giá trị trung bình cộng có mang trọng số và trọng số

Giả thiết rằng một đại lượng được tiến hành đo n lần không cùng độ chính xác. Như vậy sẽ xảy ra vấn đề làm thế nào dựa vào các giá trị đo không cùng độ chính xác để tìm giá trị xác suất nhất của đại lượng đó.

Ví dụ: Lưới thuỷ chuẩn có một điểm nút (hình V - 2), độ cao của điểm P đo theo 3 tuyến z_1, z_2, z_3 tính đến.



Hình V-2

Xuất phát từ điểm A theo tuyến z_1, người ta tiến hành đo 25 trạm, xác định được độ cao điểm P là H'_p. Từ điểm B theo tuyến z_2 đo 16 trạm xác định được độ cao điểm P là H''_p. Từ điểm C theo tuyến z_3, đo 9 trạm xác định được độ cao điểm P là H'''_p.

Dựa vào nguyên tắc tính sai số trung phương, chúng ta dễ dàng xác định được sai số trung phương độ cao điểm P theo 3 tuyến khác nhau lần lượt là m_1, m_2, m_3.

Giả thiết rằng sai số trung phương đo hiệu độ cao trên mỗi trạm máy đều bằng nhau và bằng m_0 thì:

$$m_1 = m_o\sqrt{25} = 5m_o$$
$$m_2 = m_o\sqrt{16} = 4m_o$$
$$m_3 = m_o\sqrt{9} = 3m_o$$

Như vậy ta thấy rằng độ chính xác về độ cao điểm P do 3 tuyến tính đến hoàn toàn khác nhau, do đó chúng ta gọi nhóm các giá trị đo này là không cùng độ chính xác.

Đối với các giá trị đo không cùng độ chính xác thì áp dụng công thức nào để tính giá trị xác suất nhất x của đại lượng chưa biết? Sau đây chúng ta hãy nghiên cứu vấn đề đó.

Giả sử một đại lượng đo n lần không cùng độ chính xác nhận được các kết quả là l_1, l_2...l_n với các sai số trung phương tương ứng m_1, m_2,..., m_n.

Chúng ta cần tìm một giá trị x sao cho nó có độ chính xác cao nhất nghĩa là sai số trung phương của nó là nhỏ nhất.

Ta hãy biểu thị giá trị xác suất nhất x là hàm của tất cả các giá trị đo trực tiếp, tức là:

$$x = f(l_1, l_2 \dots l_n) \tag{V-56}$$

Dạng cụ thể của hàm (V-56) căn cứ vào các tính chất sau đây để xác định:

a. Khi tăng hay giảm các kết quả đo l_i bao nhiêu lần thì giá trị x cũng sẽ tăng hay giảm bấy nhiêu lần.

$$kx = f(kl_1, kl_2 \dots kl_n) \tag{V-57}$$

Trên cơ sở của định lý Ole về hàm thuần nhất, ta có thể kết luận được hàm (V-57) là tuyến tính và có dạng:

$$x = c_1 l_1 + c_2 l_2 + \dots + c_n l_n \tag{V-58}$$

Trong đó:
$$c_i = \frac{\partial f}{\partial l_i} \tag{V-59}$$

b. Nếu thêm vào mỗi kết quả đo l_i một đại lượng không đổi a, thì đại lượng x cũng sẽ được thêm một đại lượng đúng bằng a, tức là:

$$x + a = c_1(l_1 + a) + c_2(l_2 + a) + \dots + c_n(l_n + a) \tag{V-60}$$

hay
$$[cl] + a[c] = x + a$$

Theo (V-58), ta có $a[c] = a$; tức là $[c] = 1$

Như vậy các hệ số c_i phải thoả mãn điều kiện

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1 \tag{V-61}$$

Trong công thức (V-58) ta thấy với các c_i khác nhau ta sẽ nhận được vô số giá trị x với sai số trung phương khác nhau. Giá trị đáng tin cậy nhất x phải là giá trị có sai số trung phương nhỏ nhất. Vì vậy cần phải tìm một nhóm hệ số c sao cho sai số trung phương của hàm (V-58) là nhỏ nhất, nghĩa là:

$$M_x^2 = c_1^2 m_1^2 + c_2^2 m_2^2 + \dots + c_n^2 m_n^2 = \min \tag{V-62}$$

Như vậy thực chất của vấn đề ở đây là tìm cực trị của hàm (V-62) đồng thời các hệ số c_i phải thoả mãn điều kiện (V-61). Trường hợp như vậy gọi là phương pháp tìm cực trị có điều kiện, muốn vậy ta lập hàm số.

$$\phi = M_x^2 - 2k([c] - 1) = \min \tag{V-63}$$

Trong đó: k - Số nhân chưa xác định Lagrang, lấy đạo hàm riêng theo mỗi biến c_i rồi cho bằng không, ta được:

$$\frac{\partial \phi}{\partial c_i} = 2c_i m_i^2 - 2k = 0\,;\ (i = 1 \div n) \tag{V-64}$$

suy ra:
$$c_i = \frac{k}{m_i^2}$$

vì
$$[c] = 1 = k\left[\frac{1}{m^2}\right] \tag{V-65}$$

Từ (V-65) suy ra:
$$k = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}$$

Vì vậy:
$$c_i = \frac{\frac{1}{m_i^2}}{\left[\frac{1}{m^2}\right]} \tag{V-66}$$

Thay (V-66) vào (V-58) ta có

$$x = \frac{\frac{1}{m_1^2} l_1 + \frac{1}{m_2^2} l_2 + \dots + \frac{1}{m_n^2} l_n}{\left[\frac{1}{m^2}\right]} \tag{V-67}$$

Công thức (V-67) cho phép xác định giá trị xác suất nhất x. Để tính toán thuận lợi, ta nhân cả tử số và mẫu số vế phải công thức đó với μ^2.

$$x = \frac{\left(\frac{\mu}{m_1}\right)^2 l_1 + \left(\frac{\mu}{m_2}\right)^2 l_2 + \dots + \left(\frac{\mu}{m_n}\right)^2 l_n}{\left[\left(\frac{\mu}{m}\right)^2\right]} \tag{V-68}$$

Hệ số μ tuỳ ý sao cho tỷ số $\frac{\mu^2}{m_i^2}$ gần bằng 1.

Trong bình sai người ta thường ký hiệu:

$$\frac{\mu^2}{m_i^2} = p_i \quad \text{(V-69)}$$

và gọi p_i là trọng số của giá trị đo l_i.

Từ công thức (V-69) ta thấy p_i và m_i^2 có quan hệ tỷ lệ nghịch, tức là sai số trung phương càng nhỏ thì trọng số càng lớn và ngược lại. Người ta có thể dùng p_i để so sánh độ chính xác giữa các giá trị đo l_i.

Thay (V-69) và (V-68) ta nhận được.

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + ... + p_n l_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \frac{[pl]}{[p]} \quad \text{(V-70)}$$

Đây chính là công thức tính giá trị xác suất nhất của các giá trị đo trực tiếp không cùng độ chính xác hay còn gọi x là giá trị trung bình cộng có mang trọng số. Nhìn vào công thức (V-70) ta thấy: khi P_i càng lớn thì giá trị đo tương ứng l_i chiếm tỷ trọng càng lớn trong việc tham gia tính giá trị xác suất nhất x. Đó chính là bản chất trọng số của giá trị đo.

Giá trị tuyệt đối của trọng số không giữ vai trò chủ yếu, nó có thể thay đổi. Chủ yếu là quan hệ tỷ số giữa chúng. Tỷ số này phụ thuộc vào độ chính xác của giá trị đo mà không thể tuỳ ý thay đổi được.

Trong trường hợp các giá trị đo l_i cùng độ chính xác, tức là $p_i = p$ thì (V-70) có dạng:

$$x = \frac{p[l]}{np} = \frac{[l]}{n}$$

Đây chính là công thức tính giá trị trung bình cộng của các giá trị đo cùng độ chính xác. Vì vậy ta có thể coi giá trị trung bình cộng của các giá trị đo cùng độ chính xác là trường hợp đặc biệt của giá trị trung bình cộng có mang trọng số.

Phương pháp chứng minh trên xuất phát từ điều kiện sai số trung phương nhỏ nhất hay còn gọi là nguyên lý trọng số lớn nhất.

Mặt khác cũng có thể dựa vào nguyên lý bình phương nhỏ nhất để chứng minh công thức tính giá trị trung bình cộng có mang trọng số. Theo nguyên lý này, giá trị xác suất nhất x tìm được phải thoả mãn điều kiện: [pvv] = min.

Chúng ta hãy giả thiết giá trị xác suất nhất là x, các giá trị đo lần lượt là $l_1, l_2, ..., l_n$ với các trọng số tương ứng là $p_1, p_2, ..., p_n$. Quan hệ giữa giá trị xác suất nhất và giá trị đo là $v_i = x - l_i$.

Bình phương 2 vế công thức trên rồi nhân với p_i tương ứng ta được:

$$p_i v_i^2 = p_i (x - l_i)^2$$

Lấy tổng theo vế: $[pvv] = p_1(x - l_1)^2 + p_2(x - l_2)^2 + ... + p_n(x - l_n)^2$

Lấy đạo hàm với biến x rồi cho bằng 0 ta được:

$$\frac{d[pvv]}{dx} = 2p_1(x - l_1)^2 + 2p_2(x - l_2)^2 + ... + 2p_n(x - l_n)^2 = 0$$

viết gọn lại ta được: $[p]x - [pl] = 0$ suy ra $x = \frac{[pl]}{[p]}$.

Kết quả nhận được cũng giống như công thức (V-70). Trường hợp các giá trị đo cùng độ chính xác, tức là các p_i bằng nhau thì giá trị xác suất nhất x tìm được phải thoả mãn điều kiện [vv] = min. Đây là trường hợp đặc biệt của [pvv] = min.

Từ kết quả chứng minh trên ta thấy: thành lập công thức tính giá trị trung bình cộng theo nguyên lý trọng số lớn nhất (sai số trung phương nhỏ nhất) và nguyên lý bình phương nhỏ nhất là hoàn toàn thống nhất với nhau.

V-5-2. Trọng số và trọng số đơn vị

Nếu biết sai số trung phương của các giá trị đo là $m_1, m_2 ... m_n$ ta có thể dựa vào (V-69) để tính các trọng số tương ứng. Từ mối quan hệ giữa các trọng số và sai số trung phương ta viết được:

$$P_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = ... = p_n m_n^2 = \mu^2 \quad \text{(V-71)}$$

Trong đó μ là hằng số có thể chọn tuỳ ý, nhưng khi đã chọn được μ thì p_i hoàn toàn xác định. Cần chú ý trong một bài toán bình sai thì chỉ được chọn một giá trị μ duy nhất. Trường hợp ngược lại thì quan hệ tỷ lệ giữa các trọng số sẽ không tồn tại nữa. Dưới đây sẽ trình bày phương pháp cơ bản xác định trọng số dựa vào sai số trung phương.

Ví dụ: Bằng phương pháp khác nhau, xác định diện tích hình tròn và nhận được 3 kết quả ghi trong bảng V-2.

Bảng V - 2

N⁰	S(cm²)	m(cm³)	Trọng số
1	45.5	'0.30	P_1
2	45.1	'0.12	P_2
3	44.9	'0.18	P_3

* Nếu ta chọn $\mu = m_2 = \pm 0.12$ thì

$$p_1 = \left(\frac{0.12}{0.30}\right)^2 = 0.16$$

$$p_2 = \left(\frac{0.12}{0.12}\right)^2 = 1.00$$

$$p_3 = \left(\frac{0.12}{0.18}\right)^2 = 0.44$$

Theo công thức (V-70) ta tính được

$$x = 45.0 + \frac{1.16(0.4) + 1(0.1) + 0.44(-0.1)}{0.166 + 1 + 0.44} = 45.0 + \frac{0.12}{1.6}$$

$$x = 45.08\ cm^2$$

* Nếu chọn $\mu = 0.36$ thì

$$p_1 = \left(\frac{0.36}{0.30}\right)^2 = 1.44$$

$$p_2 = \left(\frac{0.36}{0.12}\right)^2 = 9$$

$$p_3 = \left(\frac{0.36}{0.12}\right)^2 = 4$$

và cũng nhận được

$$x = 45.0 + \frac{1.44(0.4) + 9(0.1) + (-0.1)}{1.44 + 9 + 4} = 45.08cm^2$$

Qua ví dụ trên chúng ta rút ra một số khái niệm cơ bản sau:

+ *Trường hợp thứ nhất:* Lấy $\mu = m_2$ ta được $p_2 = 1$ điều đó có nghĩa là trọng số của giá trị đo s_2 bằng đơn vị. Cho nên người ta gọi p = 1 là trọng số đơn vị, còn sai số trung phương ứng với p = 1 gọi là sai số trung phương trọng số đơn vị. Trường hợp này sai số trung phương trọng số đơn vị là '0.12.

+ *Trường hợp thứ hai:* Sai số trung phương trọng số đơn vị sẽ là '0.36. Ta dùng μ để biểu thị sai số trung phương trọng số đơn vị. Trong ví dụ trên ta thấy sai số trung phương trọng số đơn vị μ có thể là sai số trung phương của một giá trị đo nào đó có mặt trong dãy đo. Chẳng

hạn $\mu = m_2$, cũng có thể là sai số trung phương của giá trị đo nào đó không có mặt trong dãy đo, chẳng hạn μ = '0.36, rõ ràng trong dãy đo của ví dụ trên không có giá trị đo nào có sai số trung phương như vậy cả.

V-5-3. Một số phương pháp xác định trọng số

Trên đây đã trình bày phương pháp cơ bản để xác định trọng số theo công thức (V-69). Nhưng trong thực tế nhiều trường hợp cần phải biến đổi công thức (V-69) để tiện cho việc tính toán. Sau đây sẽ giới thiệu một số công thức thường dùng để tính trọng số.

a. Xác định trọng số của giá trị trung bình cộng của các nhóm đo với số lần đo khác nhau.

Ví dụ: Có 2 nhóm cùng tiến hành đo 1 góc. Nhóm một đo 4 lần đo và nhận được giá trị trung bình của góc đo là β_1. Nhóm hai đo 2 lần đo và nhận được giá trị trung bình là β_2. Giả thiết sai số trung phương mỗi lần đo là m.

Như vậy sai số trung phương của góc β_1 sẽ là $m_1 = \pm\frac{m}{\sqrt{4}}$ và của góc β_2 là $m_2 = \pm\frac{m}{\sqrt{2}}$.

Ở đây β_1 và β_2 là 2 kết quả đo không cùng độ chính xác. Để tìm giá trị xác suất nhất của góc đó, trước tiên ta phải tính trọng số của từng kết quả đo góc theo công thức (V-69).

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2} = 4\left(\frac{\mu}{m}\right)^2$$

$$p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2} = 2\left(\frac{\mu}{m}\right)^2$$

Ký hiệu $\frac{\mu^2}{m_1^2} = c$ ta nhận được: $p_1 = 4c$; $p_2 = 2c$.

Số 4 và 2 chính là số lần đo góc β_1 và β_2. Như vậy ta thấy rằng: Trọng số của kết quả đo tỷ lệ thuận với số lần đo.

Trường hợp tổng quát: Giả thiết rằng đối với một đại lượng nào đó tiến hành k nhóm đo và nhận được các kết quả $l_1, l_2, ..., l_k$. Biết rằng các l_i là giá trị trung bình của $n_1, n_2, ..., n_k$ lần đo.

Trọng số tương ứng của chúng sẽ là:

$$P_i = n_i c (i = i \div k) \qquad \text{(V-72)}$$

Trong đó c là hằng số tỷ lệ chọn tuỳ ý, nhưng trong một bài toán bình sai chỉ được chọn 1 giá trị c duy nhất.

Ví dụ: Giả thiết $\beta_1 = 56^0 34'28''$; $\beta_2 = 56^0 34'21''$

Theo (V - 72) ta chọn $c = \frac{1}{2}$. Như vậy ta nhận được:

$$p_1 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Dựa vào công thức (V-70) ta tính được giá trị xác suất nhất của góc đo là

$$\beta = 56°34'2" + \frac{2(8') + 1(1")}{2+1} = 56°34'25",7$$

$$\beta = 56°34'26"$$

Qua ví dụ trên ta thấy: Nếu chọn $c = \frac{1}{2}$ thì $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ có nghĩa là lấy giá trị trung bình của kết quả 2 giá trị đo làm giá trị đo có trọng số bằng đơn vị.

Nếu lấy $c = \frac{1}{4}$ thì $p_1 = 1$ và $p_2 = \frac{1}{2}$, tức trên đã lấy giá trị trung bình của kết quả 4 giá trị đo làm giá trị đo có trọng số bằng đơn vị.

Tóm lại: Trong công thức (V-72), khi chúng ta cho $c = \frac{1}{n}$ tức là đã lấy giá trị trung bình của n giá trị đo làm giá trị đo có trọng số bằng đơn vị. Như vậy sử dụng công thức (V-72) để tính trọng số thuận lợi hơn công thức (V-69), nhưng với điều kiện là tất cả các giá trị đo trong 2 nhóm đều có độ chính xác như nhau. Nếu sai số trung phương của giá trị đo trong các nhóm khác nhau thì không thể áp dụng công thức (V-72) được mà phải tính trọng số theo (V-69).

Ví dụ: Hai giá trị đo của một góc lần lượt là $\beta_1 = 38°50'40"$ và $\beta_2 = 38°50'20"$. Trong đó β_1 là giá trị trung bình của 4 lần đo và sai số trung phương mỗi lần đo là '20". Còn β_2 là giá trị trung bình của 9 lần đo và sai số trung phương của mỗi lần đo là '15". Hãy tính giá trị xác suất nhất của góc đó.

Giá trị β_1 là kết quả trung bình của 4 lần đo với sai số trung phương mỗi lần đo là m_1 = '20". Vậy sai số trung phương của giá trị trung bình cộng β_1 là:

$$M_1 = \frac{m_1}{\sqrt{4}} = \pm\frac{20}{2} = \pm 10"$$

Tương tự sai số trung phương của giá trị trung bình cộng β_2 là:

$$M_2 = \pm\frac{m_1}{\sqrt{9}} = \pm\frac{15"}{3} = \pm 5"$$

chọn $\mu = 10"$ ta có giá trị trọng số

$$p_1 = \frac{\mu^2}{M_1^2} = \frac{10^2}{10^2} = 1$$

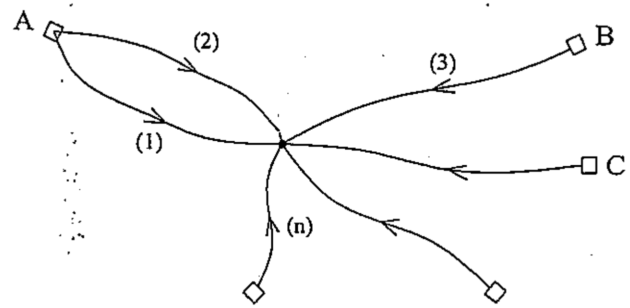
$$p_1 = \frac{\mu^2}{M_2^2} = \frac{10^2}{5^2} = 4$$

Giá trị xác suất nhất của góc đó là:

$$\beta = 38°50' + \frac{1 \times 40" + 4 \times 20"}{1+4} = 38°50'24"$$

b. Xác định trọng số trong đo cao hình học

Giả thiết xuất phát từ các điểm khống chế độ cao cấp cao và dựa vào n tuyến đo để xác định độ cao điểm p (hình V-3).



Hình V-3

Các độ cao nhận được là $H_1, H_2 \ldots H_n$ số trạm đo của các tuyến tương ứng là $N_1, N_2 \ldots N_n$. Biết rằng độ chính xác đo hiệu độ cao trên mỗi trạm máy đều bằng m.

Giả thiết các điểm cấp cao không có sai số. Vậy sai số trung phương xác định độ cao điểm p theo các tuyến là: $m_1 = \pm m\sqrt{N_1}; m_2 = \pm m\sqrt{N_2}; \ldots m_n = \pm m\sqrt{N_n}$.

Theo công thức (V-69) trọng số đo hiệu độ cao trên các tuyến là:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{(m\sqrt{N_1})^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}{N_1}$$

$$p_2 = \frac{\mu^2}{(m\sqrt{N_2})^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}{N_2}$$

....

$$p_n = \frac{\mu^2}{(m\sqrt{N_n})^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}{N_n}$$

Đối với một cấp khống chế độ cao nhất định, m luôn luôn không đổi nhưng $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2$ là một số tuỳ ý. Do đó ta có thể đặt $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 = c$.

Như vậy, trọng số đối với mỗi tuyến đo có dạng:

$$p_i = \frac{c}{N_i}\ (i = i + n) \qquad \text{(V-73)}$$

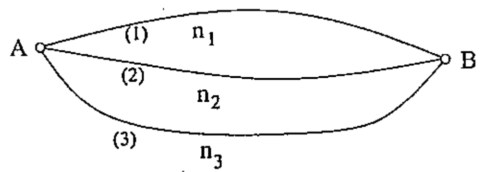
Nghĩa là, khi độ chính xác đo hiệu độ cao trên mỗi trạm máy bằng nhau, thì trọng số của tổng hiệu độ cao của tuyến tỷ lệ nghịch với số trạm đo.

Ví dụ: Xác định hiệu độ cao giữa 2 điểm A, B theo 3 tuyến như hình (V-4) và nhận được kết quả sau:

H_1 = 1.356m; n_1 = 40 trạm đo;

H_2 = 1.362m; n_2 = 25 trạm đo;

H_3 = 1.369m; n_3 = 50 trạm đo.



Hình V-4

Hãy tính hiệu độ cao xác suất nhất giữa 2 điểm A và B. Biết rằng sai số trung phương đo hiệu độ cao trên mỗi trạm máy đều bằng nhau.

Theo công thức (V-73), nếu chọn c = 100 ta sẽ tìm được:

$$p_1 = \frac{100}{40} = 2{,}5;\ p_2 = \frac{100}{25} = 4;\ p_3 = \frac{100}{50} = 2$$

Hiệu độ cao xác suất nhất giữa 2 điểm A và B là

$$h = 1.360 + \frac{2.5(-4) + 4(2) + 2(9)}{2.5 + 4 + 2} = 1.362\text{m}$$

Khi tiến hành đo cao hình học ta có thể dựa vào chiều dài của tuyến để xác định trọng số. Trong thực tế nếu số trạm máy trên 1km bằng nhau thì có thể coi độ chính xác đo hiệu độ cao trên 1km cũng bằng nhau. Giả thiết sai số trung phương đo hiệu độ cao trên 1km là m_0, như vậy sai số trung phương đo hiệu độ cao trên các tuyến có độ dài là $s_1, s_2 \ldots s_n$ (km) lần lượt sẽ là:

$$m_1 = \pm m_0\sqrt{S_1}$$

$$m_2 = \pm m_0\sqrt{S_2}$$

....

$$m_n = \pm m_0\sqrt{S_n}$$

Dựa vào công thức (V-69) ta tính được các giá trị trọng số tương ứng là:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m_0}\right)^2}{s_1}$$

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_2^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m_0}\right)^2}{s_2}$$

....

$$p_n = \frac{\mu^2}{m_2^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m_0}\right)^2}{s_n}$$

Đặt $\left(\frac{\mu}{m_0^2}\right)^2 = c$; thì trọng số hiệu độ cao đo trên các tuyến là:

$$p_i = \frac{c}{s_i}\ (i = i \div n) \qquad \text{(V-74)}$$

Ví dụ: Ta vẫn dùng số liệu của ví dụ trên nhưng biết chiều dài của các tuyến là $s_1 = 4km$; $s_2 = 2.5km$; $s_3 = 5km$ và chọn c = 10 ta có:

$$p_1 = \frac{10}{4} = 2.5;\ p_2 = \frac{10}{2.5} = 4;\ p_3 = \frac{10}{5} = 2$$

Và tìm được giá trị xác suất nhất là h = 1.362m.

Ở đây vấn đề đặt ra là trong điều kiện địa hình nào thì dùng chiều dài S, hay số trạm máy N để tính trọng số P. Điều này trong các quy phạm độ cao đã quy định. Nhưng thông thường ở những khu vực tương đối bằng phẳng thì chiều dài S để tính trọng số vì số trạm máy trên 1km đều như nhau, còn ở khu vực địa hình phức tạp số trạm máy trên 1km chênh nhau nhiều thì dùng số trạm máy để tính trọng số.

Khi dùng các công thức (V-73) và (V-74) và chọn c = 100, điều đó có nghĩa là lấy trọng số đo hiệu độ cao trên 100 trạm máy làm trọng số đơn vị, tức là:

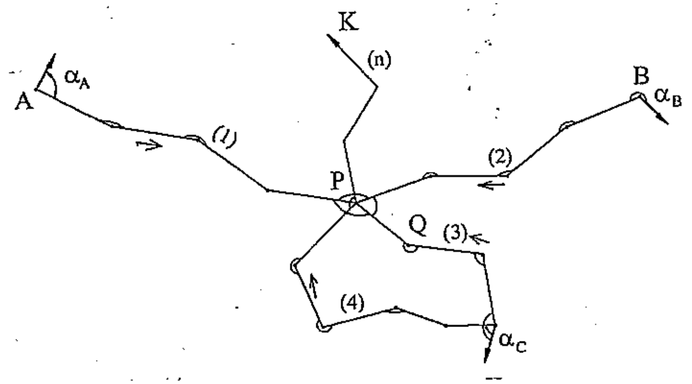
$$P_{100tram} = \frac{100}{100} = 1$$

Để dễ nhớ ta có thể phát biểu: lấy N trạm đo làm trọng số đơn vị, có nghĩa là cần phải chọn c = N.

Tương tự như trên, khi dùng công thức (V-74) thì có thể phát biểu: nếu lấy S km làm trọng số đơn vị, thì cần phải chọn c = S.

c. Xác định trọng số của góc phương vị toạ độ (góc định hướng) cạnh đa giác (đường chuyền)

Xuất phát n điểm lưới khống chế cấp cao A, B, C... tạo thành lưới đường chuyền có 1 điểm nút (hình V-5).



Hình V-5

Từ điểm P ta chọn một cạnh tuỳ ý. Góc phương vị toạ độ của nó lần lượt được xác định từ các góc phương vị α_A, α_B, α_C... tính đến. Ở đây ta lấy góc phương vị cạnh PQ là α_P làm ví dụ:

- Từ điểm A dựa vào N_1 góc của tuyến (1) ta tính được giá trị góc phương vị cạnh PQ là α_{P1}.

- Từ điểm B dựa vào N_2 góc của tuyến (2) ta tính được giá trị góc phương vị cạnh PQ là α_{P2}.

Tương tự, từ điểm K dựa vào N góc của tuyến (n) ta tính được giá trị góc phương vị cạnh PQ là α_{P_n}.

Giả thiết các điểm khống chế cấp cao không có sai số và độ chính xác đo góc đều như nhau và bằng m.

Như vậy sai số trung phương của góc phương vị toạ độ α_P của cạnh PQ do các tuyến tính đến lần lượt sẽ là:

$$m_1 = \pm m\sqrt{N_1}$$

$$m_2 = \pm m\sqrt{N_2}$$

....

$$m_n = \pm m\sqrt{N_n}$$

Theo công thức (V-69) ta có:

$$p_1 = \left(\frac{\mu}{m\sqrt{N_1}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}{N_1}$$

$$p_2 = \left(\frac{\mu}{m\sqrt{N_2}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}{N_2}$$

....

$$p_n = \left(\frac{\mu}{m\sqrt{N_n}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}{N_n}$$

Đặt $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 = c$; cuối cùng nhận được:

$$p_i = \frac{c}{N_i} (i = 1 \div n) \tag{V-75}$$

Trong đó N_i là tổng số góc của tuyến đa giác thứ i.

Như vậy chúng ta đưa ra kết luận là: Khi các góc đo cùng độ chính xác thì trọng số của góc phương vị toạ độ cạnh đa giác tỷ lệ nghịch với tổng số góc của đa giác, kể từ cạnh đã biết đến cạnh cần tính.

d. Xác định trọng số trong đo cao lượng giác

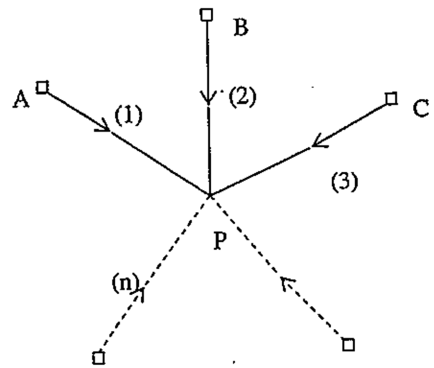
Khi xác định hiệu độ cao giữa điểm P và n điểm lưới tam giác A, B, C...

(Hình V-6) bằng phương pháp đo cao lượng giác thì trọng số của các hiệu độ cao có thể được tính như sau:

Nếu ký hiệu:

v - là góc đứng; s - là khoảng cách ngang; h - là hiệu độ cao thì công thức tổng quát tính h như sau:

$$h = Stgv + (i - l) + f$$



Hình V-6

Hai số hạng sau ảnh hưởng rất nhỏ đến hiệu độ cao h, do đó khi tính trọng số chỉ cần xét ảnh hưởng của số hạng đầu, vì vậy công thức trên có thể viết: h = Stgv. Theo công thức tính sai số trung phương ta có:

$$m_{hi}^2 = \left(\frac{\partial h_i}{\partial s_i}\right)^2 m_{si}^2 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial v_i}\right)^2 \frac{m_{vi}^2}{\rho''^2}$$

hay
$$m_{hi}^2 = \left(s_i \sec^2 v_i \frac{m''_{vi}}{\rho''}\right)^2 + (tgv_i m_{si})^2 \; ; \; (i = i \div n)$$

Trong thực tế đo đạc, m_s so với $\frac{m''_v}{\rho''} s$ rất nhỏ còn v thường nhỏ hơn 5^0. Nên tgv < 0,1, vì vậy số hạng thứ 2 so với số hạng thứ nhất nhỏ hơn nhiều. Ngoài ra trong điều kiện v < 5^0 thì $\sec^2 = 1$ do đó công thức trên có thể viết

$$m_{hi}^2 = s_i^2 \left(\frac{m''_{vi}}{\rho''}\right)^2$$

Vậy trọng số của hiệu độ cao sẽ là:

$$p_i = \left(\frac{\mu}{m_{hi}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\mu}{m_{vi}} \rho''\right)^2}{s_i^2}$$

Trong đó m_{vi} là sai số trung phương đo góc đứng v_i. Trong các hướng nếu đảm bảo độ chính xác đo góc đứng đều như nhau và bằng m_v, khi đó ta đặt:

$\left(\frac{\mu}{m''_v} \rho\right)^2 = c$ gọi là hằng số tỷ lệ, ta nhận được

$$p_i = \frac{c}{s_i^2} \tag{V-76}$$

Ta nhận thấy rằng: trong đo cao lượng giác, nếu các góc đứng đo cùng độ chính xác thì trọng số của hiệu độ cao tỷ lệ nghịch với bình phương chiều dài cạnh, trong công thức (V-76), S thường lấy đơn vị là km.

Nếu ta chọn $c = 10^2$ tức là lấy trọng số do hiệu độ cao trên khoảng cách 10km là trọng số đơn vị thì

$$P_{10km} = \frac{10^2}{10^2} = 1$$

Trên đây là một số phương pháp tính trọng số thường gặp. Còn những trường hợp khác ta cũng có thể lập được các công thức tính trọng số thích hợp dựa trên công thức (V-69) nghĩa là trước tiên tính sai số trung phương sau đó theo quan hệ trọng số tỷ lệ nghịch với bình phương sai số trung phương.

e. Xác định trọng số của hàm các giá trị đo

Chúng ta biết rằng: trọng số có quan hệ với sai số trung phương, do đó có thể dựa vào công thức tính sai số trung phương của hàm các giá trị đo để thành lập công thức tính trọng số của hàm các giá trị đo, tức là cần phải biểu thị quan hệ giữa trọng số của giá trị đo và trọng số của hàm các giá trị đo.

Gọi $x_1, x_2, \ldots x_n$ là các giá trị đo độc lập;

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ là sai số trung phương của các giá trị đo;

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ là trọng số của các giá trị đo tương ứng.

Giả thiết hàm số của các giá trị đo có dạng tổng quát: $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Sai số trung phương của hàm là:

$$m_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2$$

Thay $m_i^2 = \dfrac{\mu^2}{p_i}$ vào công thức trên ta được:

$$\frac{\mu^2}{p_f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \frac{\mu^2}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \frac{\mu^2}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \frac{\mu^2}{p_n}$$

Sau khi khử μ^2 ta có:

$$\frac{1}{p_f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 \frac{1}{p_2} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 \frac{\mu^2}{p_n} \quad \text{(V-77)}$$

Đây chính là quan hệ giữa trọng số của giá trị đo và trọng số của hàm các giá trị đo. Để dễ nhớ công thức, trước tiên viết ra vi phân của hàm số, sau đó chuyển vi phân thành $\dfrac{1}{p}$, còn các đạo hàm riêng đem bình phương lên ta sẽ nhận được công thức (V-77).

Từ công thức tính trọng số của hàm dạng tổng quát, ta có thể vận dụng nó để thành lập công thức tính trọng số của các hàm khác.

Ví dụ: Hàm số của góc phương vị toạ độ cạnh đa giác thứ n có dạng

$$\alpha_n = \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - n \times 180^\circ$$

thay vào công thức (V-77) ta có:

$$\frac{1}{p_{\alpha_n}} = \frac{1}{p_{\alpha_1}} + \frac{1}{p_{\beta_1}} + \ldots + \frac{1}{p_{\beta n}}$$

Trong công thức: α_1 là góc phương vị toạ độ cạnh khởi đầu trọng số số của nó lớn hơn nhiều so với trọng số của góc đo, do đó trọng số đảo của nó rất nhỏ, có thể bỏ qua được. Mặt khác, trọng số của góc đều bằng P, nên ta có: $\dfrac{1}{p_{\alpha_n}} = \dfrac{n}{p}$ hay $p_{\alpha_n} = \dfrac{n}{p}$.

- Nếu chọn p = 1 thì $p_{\alpha_n} = \dfrac{1}{n}$.

- Nếu chọn p = c thì $p_{\alpha_n} = \dfrac{c}{n}$. Công thức này hoàn toàn giống công thức (V-75). Trong công thức (V-75) ý nghĩa của c chính là trọng số của góc đo.

Chú ý rằng: Công thức (V-77) chỉ dùng để tính trọng số của hàm các giá trị đo độc lập. Gặp trường hợp hàm các giá trị đo không độc lập (tương quan) thì ta có thể tìm cách biến đổi hàm của các giá trị đo không độc lập thành hàm của các giá trị đo độc lập rồi áp dụng công thức đã nêu trên. Nhưng trong thực tế việc biến đổi ấy hết sức phức tạp vì vậy người ta đã vận dụng công thức tính trực tiếp số nghịch đảo trọng số của hàm các giá trị đo không độc lập. Phần chứng minh công thức này không trình bày trong giáo trình này.

V-5- 4. Tính sai số trung phương khi đo không cùng độ chính xác

a. Sai số trung phương của giá trị trung bình cộng có mang trọng số và sai số trung phương của giá trị đo

Trong bình sai trực tiếp các giá trị đo cùng độ chính xác, sai số trung phương của giá trị đo tính theo công thức:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

Khi tiến hành bình sai trực tiếp các giá trị đo không cùng độ chính xác, mỗi giá trị đo có độ chính xác khác nhau. Vì vậy ta không thể dùng các công thức trên để tính sai số trung phương của mỗi giá trị đo được.

Trong trường hợp này trước tiên cần phải tính sai số trung phương trọng số đơn vị μ, sau đó dựa vào công thức (V-69) để xác định sai số trung phương của giá trị đo.

Để thành lập công thức tính sai số trung phương của giá trị trung bình cộng có mang trọng số, chúng ta vận dụng quy tắc tính sai số trung phương của hàm số tuyến tính:

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{1}{[p]}(p_1l_1 + p_2l_2 + ... pnl_n)$$

nên
$$M_x^2 = \frac{1}{[p]^2}(p_1^2m_1^2 + p_2^2m_2^2 + ... + p_n^2m_n^2) \quad \text{(V-78)}$$

Thay (V-69) vào (V-78) ta được:

$$M_x^2 = \frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2\frac{\mu^2}{p_1} + p_2^2\frac{\mu^2}{p_2} + ...p_n^2\frac{\mu^2}{p_n}\right)$$

$$M_x^2 = \frac{1}{[p]^2}(p_1 + p_2 + ... + p_n)\mu^2$$

$$M_x^2 = \frac{[p]}{[p]^2} x\ \mu^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$$

cuối cùng ta có
$$M_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \quad \text{(V-79)}$$

Vận dụng công thức (V-69), dễ dàng tính được trọng số của giá trị trung bình cộng có mang trọng số:

$$p_x = \frac{\mu^2}{M_x^2} = \frac{\mu^2}{\frac{\mu^2}{[p]}}$$

hay
$$p_x = [p] \quad \text{(V-80)}$$

Vậy trọng số giá trị trung bình cộng có mang trọng số bằng tổng trọng số các giá trị đo tham gia tính x.

Để tính sai số trung phương của giá trị đo ta áp dụng công thức (V-69) tức là:

$$m_i = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \quad \text{(V-81)}$$

Trong đó p_i là trọng số của giá trị đo l_i.

b. Công thức tính sai số trung phương trọng số đơn vị theo sai số ngẫu nhiên

Theo định nghĩa sai số trung phương: $m^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n}$ (V-82)

Trong đó: Δ là sai số ngẫu nhiên của các giá trị đo cùng độ chính xác. Trong trường hợp đo không cùng độ chính xác các giá trị đo nhận được là l_i với các trọng số tương ứng là p_i. Như vậy không thể dùng sai số ngẫu nhiên thay vào công thức trên để trực tiếp tính ra sai số trung phương trọng số đơn vị μ được.

Để có thể vận dụng được công thức trên để tính sai số trung phương trọng số đơn vị, cần phải có sai số ngẫu nhiên một dãy giá trị đo cùng độ chính xác. Muốn vậy cần phải sử dụng các giá trị đo l_i để thành lập một dãy các giá trị đo đều có trọng số bằng 1 (trường hợp đo cùng độ chính xác). Nội dung cụ thể như sau:

Lấy l_1 nhân với $\sqrt{p_1}$ ta được l'_1

Lấy l_2 nhân với $\sqrt{p_2}$ ta được l'_2

....

Lấy l_n nhân với $\sqrt{p_n}$ ta được l'_n

Như vậy:

$$\left.\begin{array}{l} l'_1 = l_1\sqrt{p_1} \\ l'_2 = l_2\sqrt{p_2} \\ .... \\ l'_n = l_n\sqrt{p_n} \end{array}\right\} \quad \text{(V-83)}$$

Các giá trị $l'_i = l_i\sqrt{p_i}$ là hàm của các giá trị đo l_i ở dạng F = kx vì vậy sai số trung phương của chúng sẽ là:

$$\begin{array}{l} m'_1 = m_1\sqrt{p_1} \\ m'_2 = m_2\sqrt{p_2} \\ .... \\ m'_n = m_n\sqrt{p_n} \end{array}$$

Dựa vào công thức (V-69) ta có:

$$m'_1 = \mu, m'_2 = \mu, ..., m'_n = \mu$$

Như vậy ta có thể coi các giá trị l'_i là cùng độ chính xác vì đều có sai số trung phương bằng μ sai số trung phương trọng số đơn vị. Rõ ràng l'_1, l'_2, ...l'_n là nhóm các giá trị đo cùng trọng số. Đến đây ta có thể dùng sai số ngẫu nhiên của chúng để tính sai số trung phương trọng số đơn vị như sau:

Các sai số ngẫu nhiên tương ứng với giá trị l'_i là:

$$\Delta'_1 = \Delta_1\sqrt{p_1},\ \Delta'_2 = \Delta_2\sqrt{p_2},\ ....\Delta'_n = \Delta_n\sqrt{p_n}$$

Theo công thức (V-82) thì:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + ...\Delta_n'^2}{n}}$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{p_1\Delta_1^2 + p_2\Delta_2^2 + ... + p_n\Delta_n^2}{n}}$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \qquad \text{(V-84)}$$

c. Công thức tính sai số trung phương trọng số đơn vị theo số hiệu chỉnh

Trong trường hợp chưa biết giá trị thực của đại lượng cần tìm người ta tính giá trị xác suất nhất của đại lượng từ các giá trị đo l_i và trọng số P_i. Như vậy các số hiệu chỉnh V_i được tính theo công thức:

$$V_i = x - l_i$$

Theo định nghĩa sai số ngẫu nhiên ta có:

$$\Delta_i = X - l_i$$

Từ đây mối quan hệ Δ_i và V_i là:

$$\Delta_i - V_i = X - x$$

hay

$$\Delta_i = X - x + V_i$$

Trong đó X - x là sai số thực của giá trị trung bình cộng có mang trọng số và ký hiệu là δ.

Như vậy

$$\Delta_i = V_i + \delta$$

Bình phương 2 vế rồi nhân với P_i ta được:

$$P_i.\Delta_i.\Delta_i = P_i.V_i.V_i + 2P_i.V_i.\delta_i + P_i.\delta_i.\delta_i \ (i = 1 \div n)$$

Lấy tổng n giá trị 2 vế ta nhận được:

$$[P\Delta\Delta] = [PVV] + 2\delta[PV] + \delta^2[P] \qquad \text{(V-85)}$$

Số hạng thứ 2 của công thức bằng 0 vì:

$$V = x - l_i$$

Nhân 2 vế với P_i ta được:

$$P_i.V_i = P_i x - P_i l_i \ (i = 1 \div n)$$

Lấy tổng:

$$[PV] = [P]x - [Pl]$$

Ta đã biết $x = \frac{[Pl]}{P}$; Suy ra: $[P]x = [Pl]$

Vì vậy

$$[PV] = [Pl] - [Pl] = 0 \qquad \text{(V-86)}$$

Công thức (V-86) còn dùng để kiểm tra trong quá trình tính toán.

Khi số lần đo đủ lớn thì sai số δ sẽ rất nhỏ lúc đó có thể thay $\delta = M_x$ và công thức (V-85) có dạng:

$$[p\Delta\Delta] = [pvv] + [p].M_x^2$$

theo công thức (V-79) thì $M_x^2 = \frac{\mu^2}{[p]}$

nên ta có $[p\Delta\Delta] = [pvv] + \mu^2$

$$(n-1)\mu^2 = [pvv]$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \qquad \text{(V-87)}$$

Vì số lần đo có hạn, nên ta cần xác định sai số trung phương của μ và M_x.

$$m_\mu = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} \qquad \text{(V-88)}$$

và

$$m_{M_x} = \pm\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad \text{(V-89)}$$

V-5-5. Ví dụ bình sai trực tiếp các giá trị đo không cùng độ chính xác

Trình tự tính toán bình sai như sau:

a. Tính trọng số p_i

b. Tính giá trị xác suất nhất x

$$x = \frac{[pl]}{p} = x_0 + \frac{p_1\delta l_1 + p_2\delta l_2 + ... + p_n\delta l_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

$$x = x_0 + \frac{[p.\delta l]}{[p]} \qquad (V\text{-}90)$$

$$x = x_0 + \delta_x$$

Trong đó: $\delta l_i = l_i - x_0$

c. Kiểm tra theo công thức

$$[pv] = 0$$

$$[pvv] = -[pv\delta l]$$

ta chứng minh công thức như sau:

$$v_i = x - l_i = (x_0 + \delta_x) - l_i$$

$$v_i = \delta_x - (l_i - x_0) = \delta_x - \delta_{li}$$

$$p_i v_i v_i = p_i v_i(\delta_x - \delta_{li}) = p_i v_i \delta_x - p_i v_i \delta_{li}$$

$$[pvv] = [pv]\,\delta_x - [pv\delta l]$$

vì $[pv] = 0$; nên: $[pvv] = -[pv\delta l]$

d. Đánh giá độ chính xác

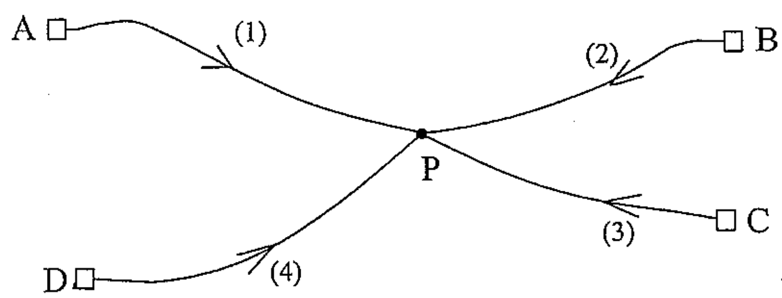
1. Sai số trung phương trọng số đơn vị

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \text{ mà } m_\mu = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$$

2. Sai số trung phương của giá trị xác suất nhất

$$M_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \text{ và } m_{M_x} = \pm\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}}$$

Ví dụ: Hãy tính sai lưới độ cao có 1 điểm nút (hình V-7). Các kết quả đo ghi trong bảng V-3.



Hình V-7

Bảng V-3

Điểm đã biết	Độ cao đã biết (m)	Tuyến đo	Hiệu độ cao đo được (m)	Chiều dài tuyến km
A	57.964	1	-9.201	45.6
B	40.460	2	+8.324	32.8
C	41.202	3	+7.566	40.3
D	57.060	4	-8.293	51.4

Bảng V-4

Tuyến đo	Độ cao điểm P(m)	Chiều dài tuyến (km)	$P = \frac{100}{s}$	δ_{li} (mm)	$p_i\delta_{li}$	V_i	p_iv_i	$p_iv_iV_i$	$p_iv_i\delta_{li}$
1	48.759	45.6	2.19	+1	2.2	+9	+19	177	+20
2	48.748	32.8	3.05	+26	79.3	16	-48.8	781	-1269
3	48.758	40.3	2.48	0	0	10	+24.8	248	0
4	48.767	51.4	1.95	+9	17.6	1	+2.0	2	+18
			9.67		99.1		-2.3	1208	-1231
	x_0 = 48.758	δ_x	$\frac{[p\delta_1]}{[p]}$	$= \frac{99.1}{9.67}$	= 10.2	≅	10mm		-23

Kết quả tính toán được ghi trong bảng V-4.

Đánh giá độ chính xác:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{1208}{3}} = \pm 20mm$$

$$m\mu = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm\frac{20}{\sqrt{6}} = \pm 8mm$$

Ở đây chọn c = 100 và đơn vị của s là km, do đó μ tính được chính là sai số trung phương đo hiệu độ cao trên tuyến dài 100km. Nếu cần tính sai số trung phương đo hiệu độ cao trên tuyến dài 1km ta dựa vào công thức:

$p = 100/S$; Như vậy: $p_{1km} = \frac{100}{1} = 100$

$$m_{1km} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{p_{1km}}} = \pm\sqrt{\frac{20}{100}} = \pm 0{,}4mm$$

Sai số trung phương độ cao xác suất nhất của điểm P

$$M_x = \pm\frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{20}{\sqrt{9.67}} = \pm 6.5mm$$

$$m_{Mx} = \pm\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{8}{\sqrt{9.67}} = \pm 2.6mm$$

Vậy x = 48.768' 6,5mm ($m_{M_x} = \pm 2.6mm$).

V-6. ĐÁNH GIÁ ĐỘ CHÍNH XÁC CỦA MỘT DÃY CÁC GIÁ TRỊ ĐO KÉP

Trong trắc địa thông thường người ta tiến hành đo đồng thời nhiều đại lượng cùng loại. Để kiểm tra và đánh giá độ chính xác, mỗi đại lượng người ta đo không ít hơn 2 lần.

Cũng có trường hợp do yêu cầu về độ chính xác cần thiết, người ta chỉ đo mỗi đại lượng 2 lần, phương pháp đo như vậy gọi là đo kép.

Ví dụ:

- Chiều dài cạnh đa giác đo 2 lần
- Mỗi đoạn trên tuyến độ cao được đo 2 lần: đi và về.
- Khi đo các góc đa giác, mỗi góc được 2 vị trí bàn độ (vị trí thuận và vị trí đảo kính).
- Trên mỗi hướng, việc ngắm chuẩn được tiến hành 2 lần.

Trong đó kép, mỗi cặp l'_i và l''_i của một đại lượng X_i là những giá trị cùng độ chính xác, nên có thể áp dụng phương pháp bình sai trực tiếp cùng độ chính xác để tính giá trị trung bình cộng.

$$x_i = \frac{l'_i + l''_i}{2}$$

và coi x_i là giá trị xác suất của X_i, nhưng chỉ sử dụng 2 số hiệu chỉnh

$$v'_i = x_i - l'_i,\ v''_i = x_i - l''_i$$

Để tính sai số trung phương của mỗi giá trị đo theo công thức Bét-xen:

$$m_{li} = \pm\sqrt{\frac{[v_i v_i]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{v_i'^2 + v_i''^2}{2-1}},$$

thì số lượng đo thừa rất ít (chỉ bằng 2-1=1), do đó độ tin cậy thấp. Mặt khác bản thân

$$m_{mli} = \pm\frac{m_{li}}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 0{,}7m_{li}$$

Vì vậy trong trường hợp đo kép, để đánh giá độ chính xác người ta tính sai số trung bình theo hiệu của kết quả đo kép của tất cả những đại lượng đo cùng loại.

Trong đo kép cũng xảy ra 2 trường hợp là đo kép cùng độ chính xác và không cùng độ chính xác. Một dãy các đại lượng đo kép được gọi là cùng độ chính xác: Khi 2 giá trị đo trong một cặp (1 đại lượng) có cùng độ chính xác và giữa các cặp đo cũng có cùng độ chính xác. Một dãy các đại lượng do kép gọi là không cùng độ chính xác: Khi 2 giá trị đo trong một cặp có cùng độ chính xác còn giữa các cặp đo không cùng độ chính xác.

V-6-1. Tính sai số trung phương theo các hiệu của kết quả đo kép cùng độ chính xác

Giả sử tiến hành đo n đại lượng. Trong đó mỗi đại lượng đo 2 lần được kết quả: lần 1: $l'_1, l'_2 \ldots l'_n$; lần 2: $l''_1, l''_2 \ldots l''_n$.

Biết rằng l'_i và l''_i đo cùng độ chính xác. Trong trường hợp các giá trị đo chỉ chứa sai số ngẫu nhiên thì sai số của l'_i và l''_i lần lượt là:

$$\Delta'_i = X_i - l'_i$$

$$\Delta''_i = X_i - l''_i \quad (i = 1 \div n)$$

Độ chênh giữa mỗi cặp giá trị đo là:

$$d_i = l'_i - l''_i = \Delta'_i - \Delta''_i \qquad \text{(V-91)}$$

Nếu giá trị đo đều chính xác thì $d_i = 0$, tức là giá trị thực của $d_i = 0$, và như vậy sai số cả độ chệch d_i là:

$$\Delta_{di} = 0 - d_i = -d_i = \Delta'_i - \Delta''_i \qquad \text{(V-92)}$$

Các hiệu nhận được theo công thức (V-92) chính là các sai số ngẫu nhiên của các hiệu tương ứng. Vì vậy chúng ta có thể tính sai số trung phương của hiệu d_i theo sai số ngẫu nhiên của nó.

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[\Delta_d\Delta_d]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{n}} \qquad \text{(V-93)}$$

Trong đó: n là tổng số các hiệu d_i.

Nếu kí hiệu m_l là sai số trung phương của l'_i hoặc l''_i thì:

$$m_d = \pm m_l\sqrt{2} \text{ và } m_l = \pm\frac{m_d}{\sqrt{2}}$$

hay

$$m_l = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \qquad \text{(V - 94)}$$

Sai số trung phương của giá trị trung bình cộng sẽ là:

$$m_x = \pm\frac{m_l}{\sqrt{2}}$$

hay

$$m_x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}} \qquad \text{(V - 95)}$$

V-6-2. Tính sai số trung theo các hiệu của kết quả đo kép không cùng độ chính xác

Giả sử mỗi đại lượng cùng loại X_i ($i = 1 \div n$) được tiến hành đo 2 lần cùng độ chính xác, nhưng giữa các cặp đo là không cùng độ chính xác. Như vậy trọng số của các giá trị đo l'_i và l''_i trong mỗi cặp sẽ là:

$$P'_i = p''_i = p_i$$

và trọng số của các hiệu

$$P_{di} = \frac{p_i}{2} \qquad \text{(V - 96)}$$

Biết rằng d_i là sai số ngẫu nhiên của hiệu thuộc cặp thứ i vì vậy theo công thức (V- 84), sai số trung phương trọng số đơn vị là:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\frac{p_1}{2}d_1^2 + \frac{p_2}{2}d_2^2 + .. \frac{p_n}{2}d_n^2}{n}}$$

hay

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} \qquad \text{(V-97)}$$

Trong đó p_i là trọng số của kết quả một lần đo trong cặp đo thứ i.

Sai số trung phương của kết quả đo l_i một lần có trọng số p_i sẽ được tính theo công thức:

$$m_{l_i} = \pm\frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \qquad \text{(V-98)}$$

Sai số trung phương của giá trị trung bình cộng từ 2 giá trị đo của mỗi cặp

$$m_{x_i} = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2p_i}} \qquad \text{(V-99)}$$

Chương VI

PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI GIÁN TIẾP

VI-1. KHÁI NIỆM VỀ BÌNH SAI GIÁN TIẾP

Trong thực tế chúng ta thường gặp những đại lượng cần tìm không phải là những giá trị đo trực tiếp, mà là hàm của một số giá trị đo trực tiếp. Những đại lượng được xác định như vậy gọi là giá trị đo gián tiếp.

Ví dụ: Trong mặt phẳng chúng ta đã biết tọa độ của 3 điểm A, B, C lần lượt là: (x_A, y_A), (x_B, y_B); (x_C, y_C), cần xác định toạ độ điểm P (x_P, y_P) (hình VI-1). Muốn vậy chỉ cần đo hai cạnh S_{AP} và S_{BP}. Rõ ràng các giá trị đo trực tiếp liên hệ với toạ độ cần tìm bằng những hàm số được xác định như sau:

$$\left.\begin{aligned} S_{AP} &= \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} \\ S_{BP} &= \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-1)}$$

Giải hệ (VI-1) ta sẽ nhận được toạ độ của điểm P tức là 2 ẩn x_p, y_p. Vì không có trị đo thừa nên chỉ xác định được tọa độ cần thiết của điểm P.

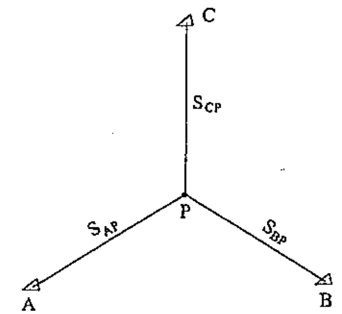
Nếu tiến hành đo thêm S_{CP} thì sẽ thành lập được 1 phương trình nữa là:

$$S_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} \qquad \text{(VI-2)}$$

Đến đây chúng ta nhận được 3 phương trình với 2 ẩn số. Nếu kết hợp giải từng cặp hệ phương trình thì sẽ nhận được 3 cặp giá trị toạ độ điểm P. Ta biết rằng, các giá trị đo S_{AP}, S_{BP}, S_{CP} luôn luôn tồn tại sai số, nên các cặp toạ độ tìm được cũng sẽ khác nhau.

Để giải quyết mâu thuẫn trên cần thiết phải tiến hành bình sai để tìm ra toạ độ xác suất nhất của điểm P.

Phương pháp bình sai để tìm ra một số các ẩn số như vậy người ta gọi là bình sai gián tiếp.



Hình VI-1

VI-2. LÝ THUYẾT VỀ BÌNH SAI GIÁN TIẾP

VI-2-1. Cơ sở lý thuyết

Giải sử trong một bài toán bình sai cần xác định giá trị xác suất của t ẩn số độc lập x, y, z... từ n đại lượng đo l_i, với trọng số P_i ($i = 1 \div n$). Chúng ta cần biểu thị giá trị xác suất nhất của đại lượng đo ($H_i = l_i + v_i$) là hàm của các ẩn số đã chọn tức là:

$$l_i + v_i = f_i(x, y, z, ...v) \qquad \text{(VI-3)}$$

Trong đó v_i là số hiệu chỉnh của giá trị đo l_i. Từ (VI-3) ta nhận được dạng tổng quát của phương trình số hiệu chỉnh:

$$v_i = f_i(x, y, z... v) - l_i \qquad \text{(VI-4)}$$

Trong hệ phương trình (VI-4) số đại lượng chưa biết là (n+t) và n>t. Để xác định chúng cần phải áp dụng nguyên lý số bình phương nhỏ nhất. Tức là tìm các ẩn số x, y, z,...,u thoả mãn điều kiện:

$$[pvv] = \min \qquad \text{(VI-5)}$$

Khi bình sai cần chuyển (VI-4) về dạng tuyến tính. Muốn vậy ta đặt:

$$\left.\begin{aligned} X &= x_o + \delta_x \\ Y &= x_o + \delta_y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U &= u_o + \delta_u \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-6)}$$

Trong đó: x_0, y_0,....., u_0 - Giá trị gần đúng của các ẩn số

δ_x, δ_y,....δ_u - Số hiệu chỉnh giá trị gần đúng của các ẩn số.

Thay (VI-6) và (VI-4) sẽ có:

$$v_i = f_i(x_o + \delta_x ; y_o + \delta_y ;... u_o + \delta_u) - l_i \quad \text{(VI-7)}$$

Các giá trị gần đúng x_0, y_0,......, u_0 có thể tìm được bằng cách giải một số phương trình lấy tuỳ ý trong (VI-4), nếu coi các v_i trong các phương trình đó đều bằng không.

Khai triển số hạng đầu vế phải (VI-7) theo chuỗi Taylor và chỉ giữ lại những số hạng bậc nhất sẽ được.

$$v_i = f_i(x_o, y_o, ..., v_o) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial_x}\right)\delta_x + \left(\frac{\partial f_i}{\partial_y}\right)\delta_y + ... \left(\frac{\partial f_i}{\partial_u}\right)\delta_u - l_i \quad \text{(VI-8)}$$

Trong đó:

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial_x}\right)_0 ; \left(\frac{\partial f_i}{\partial_y}\right)_0 ; ... \left(\frac{\partial f_i}{\partial_u}\right)_0$ là đạo hàm riêng của hàm tính với giá trị gần đúng của các ẩn số và là các hệ số.

Ta ký hiệu:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial f_i}{\partial_x}\right)_0 = a_i \\ &\left(\frac{\partial f_i}{\partial_u}\right)_0 = b_i \\ &.................. \\ &\left(\frac{\partial f_t}{\partial_u}\right)_0 = t_i \\ &f_i(x_o, y_o, ... u_o) - l_i = L_i \end{aligned}\right\}$$

$$v_i = a_i\delta_x + b_i\delta_y + ... + t_i\delta_u + L_i \quad \text{(VI-10)}$$

Đây là hệ phương trình số hiệu chỉnh dạng tuyến tính.

Để xác định δ_x, δ_y,....,δ_u thoả mãn điều kiện (VI-5), ta lập hàm số:

$$F = [pvv] = \sum p_i(a_i\delta_x + b_i\delta_y + ... + t_i\delta_u + L_i)^2 = \min \quad \text{(VI-11)}$$

Để tìm giá trị cực tiểu của hàm số (VI-11) ta lấy đạo hàm riêng của hàm theo từng biến, rồi cho bằng không và nhận được là:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial \delta_x} = 2\sum_{i=1} p_i a_i(a_i\delta_x + b_i\delta_y + ... + t_i\delta_u + L_i) = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial \delta_y} = 2\sum_{i=1} p_i b_i(a_i\delta_x + b_i\delta_y + ... + t_i\delta_u + L_i) = 0 \\ &.. \\ &\frac{\partial F}{\partial \delta_u} = 2\sum_{i=1} p_i t_i(a_i\delta_x + b_i\delta_y + ... + t_i\delta_u + L_i) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI-12)}$$

hay viết theo kí hiệu tổng Gauss sẽ được:

$$\left.\begin{aligned} &[paa]\delta_x + [pab]\delta_y + [pac]\delta_z + ... + [pat]\delta_u + [pal] = 0 \\ &[pab]\delta_x + [pbb]\delta_y + [pbc]\delta_z + ... + [pbt]\delta_u + [pbl] = 0 \\ &[pac]\delta_x + [pbc]\delta_y + [pcc]\delta_z + ... + [pct]\delta_u + [pcl] = 0 \\ &.. \\ &[pat]\delta_x + [pbb]\delta_y + [pct]\delta_z + ... + [ptt]\delta_u + [ptl] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI-13)}$$

Hệ (VI-13) gọi là hệ phương trình chuẩn trong bình sai gián tiếp. Hệ phương trình chuẩn này có những tính chất đặc biệt như sau:

- Mỗi phương trình trong hệ đều là tuyến tính, số phương trình bằng số ẩn số.
- Có một đường chéo chính đi qua hệ số bình phương tức là: [paa]; [pbb];... [ptt].
- Các hệ số không bình phương đối xứng qua đường chéo chính bằng nhau từng đôi một.

Dựa trên cơ sở công thức (VI-10) và (VI-13), ta có:

$$\left.\begin{aligned} &[pav] = [paa]\delta_x + [pab]\delta_y + ... + [pat]\delta_u + [pal] = 0 \\ &[pbv] = [pab]\delta_x + [pbb]\delta_y + ... + [pbt]\delta_u + [pbl] = 0 \\ &.............. \\ &[ptv] = [pat]\delta_x + [ptb]\delta_y + ... + [ptt]\delta_u + [ptl] = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(VI-14)}$$

Qua (VI-14), ta dễ dàng nhận thấy tính chất của số hiệu chỉnh v_i:

$$[pav] = [pbv] = ... [ptv] = 0 \quad \text{(VI-15)}$$

Trong trường hợp đo cùng độ chính xác, tức là $p_1 = p_2 = ... = p_n = p$ thì hệ phương trình chuẩn (VI-13) có dạng:

$$
\left.\begin{aligned}
&[aa]\delta_x + [ab]\delta_y + [ac]\delta_z + \ldots + [at]\delta_u + [al] = 0\\
&[ab]\delta_x + [bb]\delta_y + [bc]\delta_z + \ldots + [bt]\delta_u + [bl] = 0\\
&[ac]\delta_x + [cb]\delta_y + [cc]\delta_z + \ldots + [ct]\delta_u + [cl] = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[at]\delta_x + [bt]\delta_y + [ct]\delta_z + \ldots + [tt]\delta_u + [tl] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-16)}
$$

và $[av] = [cv] = ... = [tv] = 0$

Do tính chất đối xứng của hệ phương trình chuẩn, cho nên hệ (VI-13) có thể viết gọn dưới dạng:

$$
\left.\begin{aligned}
&[paa]\delta_x + [pab]\delta_y + [pac]\delta_z + \ldots + [pat]\delta_u + [pal] = 0\\
&[pbb]\delta_y + [pbc]\delta_z + \ldots + [pbt]\delta_u + [pbl] = 0\\
&[pcc]\delta_z + \ldots + [pct]\delta_u + [pcl] = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[ptt]\delta_u + [ptl] = 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-17)}
$$

Dưới đây chúng ta tóm tắt trình tự bình sai gián tiếp để tìm ẩn số:

a. Căn cứ vào quan hệ giữa giá trị đo và ẩn số để thành lập hệ phương trình số hiệu chỉnh dạng (VI - 10) ta chú ý rằng trong bình sai gián tiếp số lượng các phương trình số hiệu chỉnh đúng bằng tổng các giá trị đo n.

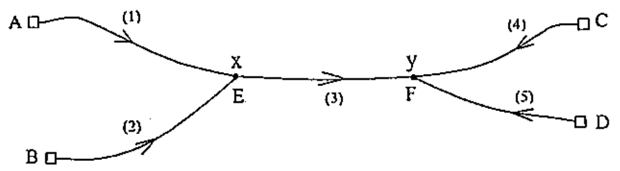
b. Dựa vào hệ số và số hạng tự do của phương trình số hiệu chỉnh để thành lập các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn dạng (VI-13). Số lượng phương trình trong hệ phương trình chuẩn đúng bằng số ẩn số t.

c. Giải hệ phương trình chuẩn để tìm ra các ẩn số.

d. Thay các ẩn số tìm được vào phương trình số hiệu chỉnh để tìm các v_i và giá trị xác suất của đại lượng đo $H_i = l_i + v_i$, $(i=1 \div n)$.

VI-2-2. Ví dụ áp dụng

Cho lưới đo cao như hình (VI.2).



Hình VI-2

Kết quả đo lần lượt là:

$h_1 = +5.974\text{m} \quad s_1 = 40.0\text{km}$

$h_2 = +7.630\text{m} \quad s_2 = 66.7\text{km}$

$h_3 = +2.468\text{m} \quad s_3 = 55.0\text{km}$

$h_4 = 0.066\text{m} \quad s_4 = 50.5\text{km}$

$h_5 = -5.896\text{m} \quad s_5 = 40.0\text{km}$

Độ cao các điểm gốc:

$H_A = 70.000\text{m}$

$H_B = 68.594\text{m}$

$H_C = 78.476\text{m}$

$H_D = -84.318\text{m}$

Trong lưới độ cao này số điểm cần phải xác định độ cao là 2, chính là độ cao xác suất nhất của điểm E và F.

Đặt $x = H_E$; $y = H_F$

Từ hình (VI-2) ta viết được:

$$
\begin{aligned}
&h_1 + v_1 = x - H_A && \text{Hay} && V_1 = x - H_A - h_1\\
&h_2 + v_2 = x - H_B && && V_2 = x - H_B - h_2\\
&h_3 + v_3 = -x + y && && V_3 = -x + y - h_3 \qquad \text{(a)}\\
&h_4 + v_4 = y - H_C && && V_4 = y - H_C - h_4\\
&h_5 + v_5 = y - H_D && && V_5 = y - H_D - h_5
\end{aligned}
$$

Mỗi phương trình số hiệu chỉnh đều có dạng tuyến tính. Dựa vào hệ phương trình số hiệu chỉnh để thành lập hệ phương trình chuẩn. Phương pháp thành lập như vậy sẽ nhận được giá trị tuyệt đối của số hạng tự do trong hệ phương trình chuẩn quá lớn, không tiện trong quá trình tính toán, bình sai. Để khắc phục nhược điểm này chúng ta thay:

$$
\begin{aligned}
&x = x_0 + \delta_x\\
&y = y_0 + \delta_y \qquad \text{(b)}
\end{aligned}
$$

Trong đó x_0, y_0 được tính:

$x_0 = H_A + h_1$

$y_0 = H_C + h_4$

Thay (b) vào (a) và biến đổi ta nhận được:

$$V_1 = \delta_x + 0$$
$$V_2 = \delta_x + 20$$
$$V_3 = \delta_x + \delta_y - 32$$
$$V_4 = \delta_y + 0$$
$$V_5 = \delta_y - 12$$

Các số hạng tự do trong hệ phương trình số hiệu chỉnh tính bằng đơn vị mm.

Dựa vào (VI-10) ta xác định được các hệ số:

$a_1 = +1;\ b_1 = 0;\quad L_1 = 0$

$a_2 = +1;\ b_2 = 0;\quad L_2 = +20$

$a_3 = -1;\ b_3 = +1;\quad L_2 = -32$

$a_4 = 0;\ b_4 = +1;\quad L_4 = 0$

$a_5 = 0;\ b_5 = +1;\quad L_5 = -12$

Các trọng số tương ứng tính theo công thức $p_i = \dfrac{100}{s_i}$ và lần lượt nhận được.

$$P_1 = 2.50;\ P_2 = 1.50;\ P_3 = 1.82;\ P_4 = 2.00;\ P_5 = 2.50$$

Chúng ta thành lập được các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn:

$$[paa] = p_1a_1a_1 + p_2a_2a_2 + \dots\dots + p_5a_5a_5 = +5.82$$
$$[pab] = p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + \dots\dots + p_5a_5b_5 = -1.82$$
$$[pbb] = p_1b_1b_1 + p_2b_2b_2 + \dots\dots + p_5b_5b_5 = +6.32$$
$$[paL] = p_1a_1L_1 + p_2a_2L_2 + \dots\dots + p_5a_5L_5 = +88.24$$
$$[pbL] = p_1b_1L_1 + p_2b_2L_2 + \dots\dots + p_5b_5L_5 = -88.24$$

và hệ phương trình chuẩn có dạng:

$$5.82\delta_x - 1.82\,\delta_y + 88.24 = 0$$
$$-1.82\delta_x + 6.32\delta_y - 88.24 = 0$$

Giải hệ phương trình trên nhận được:

$$\delta_x = -12\text{mm}$$
$$\delta_y = +10\text{mm}$$

Độ cao xác suất nhất của điểm E và F là:

$$x = H_E = x_0 + \delta_x = +75.962\text{m}$$

$$y = H_F = y_0 + \delta_y = +78.420\text{m}$$

Thay δ_x và δ_y vào các phương trình số hiệu chỉnh sẽ tính được:

$$v_1 = -12\text{mm};\ v_2 = +8\text{mm};\ v_3 = -10\text{mm}$$
$$v_4 = +10\text{mm};\ v_4 = -2\text{mm}$$

Hiệu độ cao xác suất nhất của các tuyến đo:

$$\overline{h_1} = h_1 + v_1 = +5.962\,\text{m}$$
$$\overline{h_2} = h_2 + v_2 = +7.368\,\text{m}$$
$$\overline{h_3} = h_3 + v_3 = +2.458\,\text{m}$$
$$\overline{h_4} = h_4 + v_4 = -0.056\,\text{m}$$
$$\overline{h_5} = h_5 + v_5 = -5898\,\text{m}$$

Trong thực tế ngoài nhiệm vụ tìm ra các giá trị xác suất nhất, còn phải tiến hành đánh giá độ chính xác các giá trị đo, các ẩn số tìm được và hàm các giá trị sau khi bình sai.

VI-3. TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT CỦA BÌNH SAI GIÁN TIẾP

Trong bình sai trực tiếp quan hệ giữa ẩn số và hiệu chỉnh được biểu thị bằng công thức:

$$v_i = x - l_i \quad (i = 1 \div n)$$

Nếu đặt: $x = x_0 + \delta_x$

$$v_i = x_0 + \delta_x - l_i \qquad (*)$$

Kí hiệu: $x - l_i = L_i$ thì

$$v_i = \delta_x + l_i \qquad (**)$$

Nếu so sánh với (VI-10) thì (**) là trường hợp đặc biệt của (VI-10) vì chỉ có 1 ẩn số duy nhất.

Để tiện so sánh với bình sai trực tiếp ta biến đổi số hạng tự do trong (*) như sau:

$$v_i = (x_0 - l_i) + \delta_x$$

Đặt: $x_0 - l_i = \delta_{li}$ sẽ nhận được $v_i = \delta_x + \delta_{li}$

Rõ ràng các hệ số của δ_x đều bằng +1, tức là $a_i = 1$ còn $b_i = c_i = 0$ và số hạng $L_i = \delta_{li}$.

Do đó các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn là:

$$[paa] = p_1a_1a_1 + p_2a_2a_2 + ... + p_na_na_n = p_1.1.1 + p_2.1.1 + ... + p_n.1.1$$
$$[pab] = p_1a_1b_1 + p_2a_2b_2 + ... + p_na_nb_n = p_1.1.0 + p_2.0.0 + ... + p_n.1.0 = 0$$
$$[pac] = p_1a_1c_1 + p_2a_2c_2 + ... + p_na_nc_n = p_1.1.0 + p_2.1.0 + ... + p_n.1.0 = 0$$
$$[paL] = -[pa\delta_l] = -p_1.1.\delta_{l_1} - p_2.1.\delta_{l_2} - ... - p_n.1.\delta_{l_n} = -[p\delta_l]$$

Phương trình có dạng:

$$[p]\delta_x - [p\delta_l] = 0$$
$$\delta_x = \frac{[p\delta_l]}{[p]}$$

So sánh với (V-90) dễ dàng nhận thấy: Bình sai trực tiếp là trường hợp đặc biệt của phương pháp bình sai gián tiếp.

VI-4. PHƯƠNG TRÌNH SỐ HIỆU CHỈNH

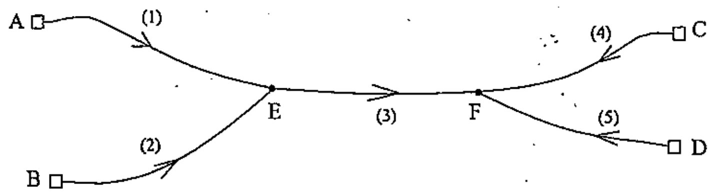
Chúng ta đã biết công việc đầu tiên để tiến hành bình sai là viết phương trình tính giá trị xác suất nhất của đại lượng đo và phương trình số hiệu chỉnh vì cả 2 loại phương trình này đều là hàm của các ẩn số x, y, z.... do đó khi viết phương trình số hiệu chỉnh chúng ta cần xác định ẩn số và dùng đại lượng nào làm ẩn số trong bài toán bình sai.

VI-4-1. Xác định số lượng các ẩn số

Số lượng các ẩn số t không phụ thuộc vào số đo mà phụ thuộc vào bài toán bình sai.

Ví dụ:

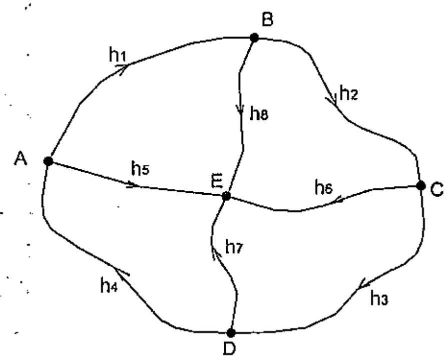
* Lưới độ cao như hình VI-3



Hình VI-3

Có 4 điểm đã biết độ cao và 2 điểm chưa biết độ cao là E và F. Đối với lưới này mục đích của bình sai là tìm độ cao xác suất của 2 điểm E và F. Do đó số ẩn số t = 2.

* Lưới độ cao như hình VI-4



Hình VI - 4

Lưới gồm 5 điểm chưa biết toạ độ A, B, C, D, E. Vì trong lưới chưa có điểm nào đã biết độ cao, do đó để có thể xác định được hiệu độ cao giữa 5 điểm đó, hoặc có thể lấy 1 điểm nào đó làm chuẩn để xác định độ cao tương đối của 4 điểm còn lại so với điểm chuẩn đó (độ cao giả định) cho nên ẩn số là t =4.

Giả thiết rằng, trong lưới độ cao hình (VI-4) có 1 điểm đã biết độ cao (điểm A). Như vậy cần xác định độ cao tuyệt đối của 4 điểm còn lại, cho nên số ẩn số vẫn là t = 4. Rõ ràng là cùng một lưới độ cao nếu có 1 điểm đã biết hoặc chưa có điểm nào đã biết độ cao thì đều có số ẩn số như nhau.

Tóm lại, cả hai trường hợp lưới độ cao hình (VI-4) có thể đưa ra công thức tính số ẩn số như sau:

a. Trong lưới có điểm đã biết:

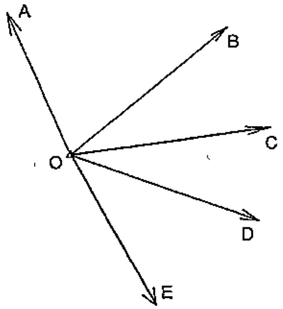
$$t = p \qquad \text{(VI-18)}$$

b. Trong lưới chưa có điểm nào đã biết:

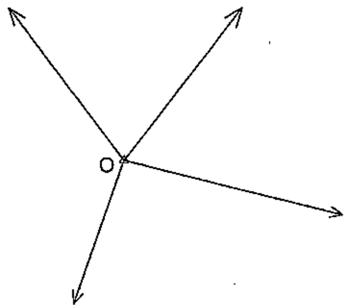
$$t = p-1 \qquad \text{(VI-19)}$$

Trong đó: p - Số lượng điểm chưa biết độ cao.

Đối với một trạm đo góc bằng cũng đưa ra được những kết luận tương tự.



Hình VI-5



Hình VI-6

Hình (VI-5) trong 5 hướng đã biết (tức là đã biết góc phương vị toạ độ của 2 hướng đó) OC và OE còn lại 3 hướng chưa biết. Ở đây cần phải xác định góc phương vị toạ độ của những hướng đó hoặc xác định vị trí tương đối của nó so với những hướng đã biết nên ẩn số t = 3.

Hình VI-6, tất cả các hướng đo đều chưa biết góc phương vị toạ độ của nó, trong trường hợp này chỉ có thể xác định vị trí tương đối giữa chúng, do đó chỉ cần 3 góc là có thể liên hệ chúng với nhau, nên số ẩn số vẫn là t = 3.

Tóm lại, trên một trạm đo góc bằng, nếu có những hướng đã biết thì số ẩn số sẽ là được xác định theo công thức sau:

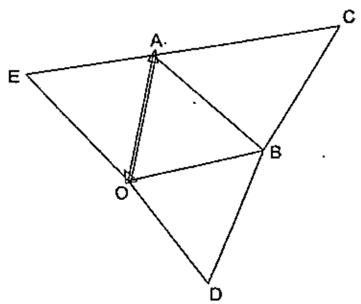
* Trên trạm đo có hướng đã biết:

$$t = s \qquad \text{(VI-20)}$$

* Trên trạm đo chưa có hướng nào đã biết:

$$t = s - 1 \qquad \text{(VI- 21)}$$

Trong đó: s - Số hướng chưa biết góc phương vị toạ độ.



Hình VI - 7

Đối với lưới tam giác đo góc như hình VI-7, O và A là 2 điểm đã biết toạ độ, các điểm còn lại đều chưa biết.

Mỗi điểm chưa biết có 2 ẩn số x và y, do đó số ẩn số t = 2. (p-2) = 2.4=8, trong đó p - tổng số điểm trong lưới. Nếu điểm B cũng biết toạ độ thì số ẩn số là t = 2(p-3) = 2.3 = 6.

Trường hợp lưới tam giác chưa có 1 điểm nào đã biết toạ độ, như vậy chỉ có thể xác định được hình dạng của lưới, mà không thể xác định được sự lớn nhỏ và phương vị của nó. Đối với trường này mỗi hình tam giác chỉ cần xác định 2 góc, như vậy số ẩn số sẽ là t = 2.4 = 8. Hoặc có thể chọn 1 cạnh nào làm cạnh cố định (tức là giả định toạ độ điểm đầu của cạnh đó, chiều dài và phương vị tọa độ của cạnh đó đã biết) để xác định vị trí tương đối của các điểm khác. Do đó số ẩn số vẫn là:

$$T = 2(p-2) = 2.4 = 8$$

Ta có thể tóm tắt công thức ẩn số như sau:

* Trong lưới tam giác đã có điểm biết toạ độ:

$$t = 2(p-k) \text{ khi } k > 2 \qquad \text{(VI-22)}$$

* Trong lưới tam giác chưa có điểm nào đã biết tọa độ.

$$T = 2(p-2) \text{ khi } k \le 2 \qquad \text{(VI-23)}$$

Trong đó: p - Tổng số điểm trong lưới tam giác (kể cả điểm đã biết và điểm chưa biết toạ độ);

k - Số điểm đã biết toạ độ trong lưới.

Thông qua một số ví dụ ta thấy rằng: số lượng các ẩn số không phụ thuộc vào số các đại lượng đo, mà chủ yếu phụ thuộc vào vấn đề bình sai. Đối với ví dụ trên thì ẩn số phụ thuộc vào hoàn toàn vào đồ hình. Do đó chúng ta cần phải nắm vững nội dung của từng bài toán bình sai cụ thể để xác định đúng số lượng ẩn số.

VI-4-2. Chọn ẩn số

Sau khi xác định xong số lượng các ẩn số, công việc tiếp theo là chọn những giá trị xác suất đại lượng nào để làm ẩn số?

Trong bình sai gián tiếp ẩn số được chọn phải độc lập với nhau. Nếu giữa các ẩn số được chọn tồn tại quan hệ hàm số nào đó, thì những ẩn số đó không phải là độc lập.

Ví dụ: Hình VI-3 với t= 2 có nhiều phương án chọn ẩn số vì mỗi cặp ẩn số được chọn cũng đều là ẩn số độc lập

$$(1)\ \begin{cases} x = H_E \\ y = H_F \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x = \overline{h}_1 \\ y = \overline{h}_4 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}x = H_E\\ y = \overline{h}_5\end{cases} \quad (4)\begin{cases}x = \overline{h}_2\\ y = \overline{h}_3\end{cases}$$

Trong đó: $\overline{h_i} = h_i + V_i$.

Chú ý rằng: đối với lưới độ cao tạo thành những vòng khép kín, nếu chọn những điểm chưa biết độ cao là ẩn số thì chúng đều là những ẩn số độc lập.

$$(1)\begin{cases}x = \overline{h}_1\\ y = \overline{h}_2\end{cases} \quad (2)\begin{cases}x = \overline{h}_4\\ y = \overline{h}_5\end{cases}$$

Đối với (1) thì: $H_A + x = H_B + y$ tức là: $x - y + H_A - H_B = 0$. Còn đối với (2) thì: $H_C + x = H_D + y$ tức là $x - y + H_C - H_D = 0$.

Như vậy giữa x và y tồn tại quan hệ phụ thuộc. Điều này có nghĩa là khi biết một trong 2 ẩn số đó có thể tìm ra được ẩn số thứ 2, với cách chọn như vậy trên thực tế đã thiếu 1 ẩn số.

Xét hình VI-4 với t = 4 ta chọn:

$$x = \overline{h}_{AE};\ y = \overline{h}_{BE};\ z = \overline{h}_{CE};\ t = \overline{h}_{DE}$$

Ký hiệu: $\overline{h}_{ij}$ - Hiệu độ cao xác suất nhất giữa điểm i và j, các ẩn số được chọn đều độc lập hoặc chọn:

$$x = \overline{h}_{AB};\ y = \overline{h}_{AE};\ z = \overline{h}_{AD};\ t = \overline{h}_{EC}$$

thì các ẩn số đều vẫn độc lập.

Đối với loại đồ hình này cũng có thể chọn độ cao làm ẩn số. Muốn vậy chỉ cần giả định 1 điểm nào đó đã biết độ cao làm cơ sở, 4 điểm còn lại đều đặt là ẩn số.

Trường hợp chọn $x = \overline{h}_{AE};\ y = \overline{h}_{BE};\ z = \overline{h}_{CE};\ t = \overline{h}_{DE}$, chúng không độc lập vì: $t + z = y$.

Tóm lại: đối với cả 2 loại lưới thủy chuẩn tự do và không tự do, thuận tiện nhất chọn các điểm chưa biết độ cao làm ẩn số.

Xét hình VI-5 với t =3, ta chọn:

x = COA y = COB Z = COD

Các ẩn số đều độc lập, hoặc chọn:

X = EOA y = EOB z = EOD

thì chúng vẫn độc lập

Các trường hợp chọn ẩn số như sau thì giữa chúng tồn tại quan hệ phụ thuộc:

X= COA y = EOD z = AOB

vì x = y + z như vậy trên thực tế vẫn thiếu 1 ẩn số, do đó OD không xác định được.

Hoặc chọn: x = COD y= EOD z = COB

Thì các ẩn số vẫn không độc lập vì: x+ y = COE (góc đã biết trước).

Đối lưới tam giác hình VI-7, thường chọn toạ độ của những điểm cần xác định làm ẩn số. Liên hệ với hình VI-7 thì tất cả có 4 cặp ẩn số là:

$$(x_B, y_B); (x_C, y_C); (x_D, y_D); (x_E, y_E);$$

Tóm lại: Trong phương pháp bình sai gián tiếp các ẩn số được chọn phải thoả mãn 2 yêu cầu: đủ và độc lập. Nếu chọn thiếu ẩn số thì sau khi bình sai một số đại lượng cần tìm nào đó vẫn không được xác định, tức là không thể loại trừ được những mâu thuẫn trong bài toán bình sai, do đó mục đích bình sai không thực hiện được. Ngược lại, nếu chọn ẩn số thì trong đó chắc chắn sẽ có ẩn số giả và giữa chúng tồn tại quan hệ phụ thuộc.

Vấn đề chọn nhóm đại lượng chưa biết nào làm ẩn số là tuỳ thuộc vào nội dung cụ thể của từng bài toán và mức độ thuận lợi trong tính toán để quyết định.

VI-4-3. Thành lập phương trình giá trị đo và phương trình số hiệu chỉnh

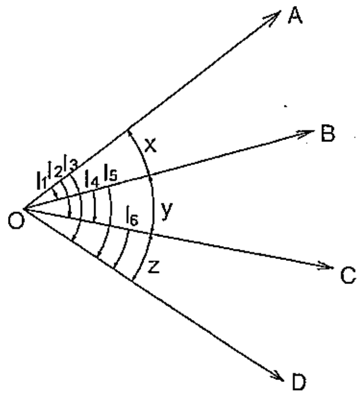
Sau khi chọn xong ẩn số, căn cứ vào nội dung của bài toán và đồ hình để biểu diễn giá trị xác suất nhất của đại lượng đo $(l_i + v_i)$ dưới dạng của các ẩn số, tức là: $l_i + v_i = f_i(x, y, z,...u)$ và gọi là phương trình giá trị đo thứ i ($i = 1 \div n$).

Như vậy, nếu có n giá trị đo thì sẽ có n phương trình. Chuyển giá trị đo sang bên phải chúng ta nhận được n phương trình số hiệu chỉnh.

Ví dụ 1: Trên trạm đo O (hình VI-8) có 4 hướng, tiến hành đo 6 góc và nhận được kết quả:

$$I_1 = 48°17'01''$$
$$I_2 = 96°52'19''$$
$$I_3 = 152°54'10''$$
$$I_4 = 48°35'12''$$
$$I_5 = 104°37'07''$$
$$I_6 = 56°01'49''$$

Hãy viết phương trình số hiệu chỉnh?



Hình VI - 8

Giải: Trước tiên xác định số ẩn số t theo công thức (III-21) ta có t = 4-1= 3

Chọn ẩn số là x, y, z như đã biểu diễn trên hình vẽ.

- Các phương trình giá trị đo là:

$$l_1 + v_1 = x$$
$$l_2 + v_2 = x + y$$
$$l_3 + v_3 = x + y + z$$
$$l_4 + v_4 = y$$
$$l_5 + v_5 = y + z$$
$$l_6 + v_6 = z$$

Chuyển các giá trị đo l_i sang bên phải sẽ nhận được phương trình số hiệu chỉnh.

$$v_1 = x - l_1$$
$$v_2 = x + y - l_2$$
$$v_3 = x + y + z - l_3$$
$$v_4 = y - l_4$$
$$v_5 = y + z - l_5$$
$$v_6 = z - l_6$$

Đặt

$$x = x_o + \delta_x$$
$$y = y_o + \delta_y$$
$$z = z_o + \delta_y$$

Chọn:

$$x_o = l_1 = 48°17'01''$$
$$y_o = l_4 = 48°35'12''$$
$$z_o = l_6 = 56°01'49''$$

Thay vào phương trình số hiệu chỉnh sẽ nhận được dạng:

$$v_1 = \delta_x + 0$$
$$v_2 = \delta_x + \delta_y - 6$$
$$v_3 = \delta_x + \delta_y + 0$$
$$v_4 = \delta_y + 0$$
$$v_5 = \delta_x + \delta_z - 6$$
$$v_6 = \delta_z + 0$$

Số hạng tự do lấy đơn vị là giây.

Ví dụ 2: Trong lưới đo cao (hình VI-9) các hiệu độ cao đo được và chiều dài các tuyến tương ứng như sau:

$h_1 = +0.023m$; $S_{AB} = 5km$

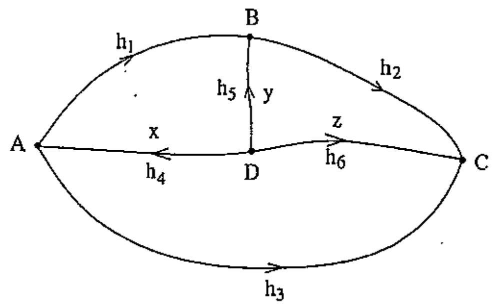
$h_2 = +1.114m$; $S_{BC} = 5km$

$h_3 = +1.142m$; $S_{AC} = 5km$

$h_4 = +0.078m$; $S_{AD} = 2km$

$h_5 = +0.099m$; $S_{BD} = 2km$

$h_2 = +1.216m$; $S_{DC} = 2km$



Hình VI - 9

Hãy thành lập phương trình số hiệu chỉnh.

Giải:

Theo công thức (VI-19) ta có: $t = 4-1 = 3$.

Ta chọn hiệu độ cao xác suất nhất giữa các điểm D - A; D - B; D - C làm ẩn số và lần lượt biểu diễn bằng x, y, z.

- Dựa vào đồ hình viết các phương trình giá trị đo:

$$h_1 + v_1 = -x + y$$
$$h_2 + v_2 = -y + z$$
$$h_3 + v_3 = -x + z$$
$$h_4 + v_4 = x$$
$$h_5 + v_5 = +y$$
$$h_6 + v_6 = +z$$

- Chuyển thành phương trình số hiệu chỉnh:

$$v_1 = -x + y - h_1$$
$$v_2 = -y + z - h_2$$
$$v_3 = -x + z - h_3$$
$$v_4 = x - h_4$$
$$v_5 = y - h_5$$
$$v_6 = z - h_6$$

và

$$x = x_0 + \delta_x$$
$$y = y_0 + \delta_y$$
$$z = z_0 + \delta_z$$

Chọn giá trị gần đúng của ẩn số là:

$$x_0 = h_4 = +0.078\text{m}$$
$$y_0 = h_5 = +0.099\text{m}$$
$$z_0 = h_6 = +1.216\text{m}$$

Thay vào phương trình số hiệu chỉnh trên sẽ nhận được dạng cuối cùng là:

$$v_1 = -\delta_x + \delta_y - 2 \qquad v_4 = +\delta_x + 0$$
$$v_2 = -\delta_y + \delta_z + 3 \qquad v_5 = +\delta_y + 0$$

$$v_3 = -\delta_x + \delta_z - 4 \qquad v_6 = +\delta_z + 0$$

Số hạng tự do lấy đơn vị là mm.

Qua 2 ví dụ trên có thể đưa ra trình tự các bước thành lập phương trình số hiệu chỉnh và những điều cần chú ý trong quá trình thành lập như sau:

a. Dựa vào nội dung cụ thể của bài toán bình sai để xác định số lượng các ẩn số.

b. Chọn ẩn số phải thoả mãn hai yêu cầu: đủ và độc lập.

c. Viết các phương trình giá trị đo, biết rằng có n giá trị đo sẽ thành lập được n phương trình.

Nếu số ẩn số bằng t thì dạng của phương trình giá trị đo sẽ là:

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + \dots + t_i u + d_i$$

$$d_i = f_i(x_0, y_0, \dots u_0) \text{ - hằng số } (i = 1 \div n)$$

d. Chuyển thành phương trình số hiệu chỉnh dạng:

$$v_i = a_i x + b_i y + \dots + t_i u + d_i - l_i$$

e. Dựa vào giá trị đo để tính các giá trị gần đúng của ẩn số: $x_0, y_0, \dots u_0$ và đặt:

$$\begin{cases} x = x_o + \delta_x \\ y = y_o + \delta_y \\ \dots\dots\dots \\ u = u_o + \delta_u \end{cases}$$

Thay vào phương trình số hiệu chỉnh được:

$$v_i = a_i\delta_x + b_i\delta_y + \dots + t_i\delta_u + (a_i x_o + b_i y_o + \dots + d_i - l_i)$$

Đặt $$L_i = a_i x_0 + b_i y_o + \dots + d_i - l_i$$

và nhận được phương trình số hiệu chỉnh cuối cùng:

$$v_i = a_i\delta_x + b_i\delta_y + \dots + t_i\delta_u + L_i$$

Chú ý: L_i và l_i có độ chính xác như nhau vì trọng số của nó đều là p_i.

Dựa vào hệ số và hạng tự do của hệ phương trình số hiệu chỉnh, đồng thời chú ý đến trọng số của các giá trị đo để thành lập hệ phương trình chuẩn có dạng:

$$[paa]\delta_x + [pab]\delta_y + ... + [pat]\delta_u + [paL] = 0$$
$$[pab]\delta_x + [pbb]\delta_y + ... + [pbt]\delta_u + [pbL] = 0$$
$$..$$
$$[pat]\delta_x + [pbt]\delta_y + ... + [ptt]\delta_u + [ptL] = 0$$

Sau khi giải hệ phương trình chuẩn sẽ nhận được các giá trị δ_x, δ_y.... δ_u và lần lượt với giá trị gần đúng x_0, y_0.... u_0 ta sẽ nhận được giá trị xác suất nhất x, y,....u.

Chú ý:

- Trong quá trình tính toán bình sai chỉ được sử dụng 1 nhóm duy nhất các giá trị gần đúng của ẩn số.

- Vì dùng các giá trị gần đúng của ẩn số để tính, nên giá trị của số hạng tự do L_i trong phương trình số hiệu chỉnh tương đối nhỏ. Do đó đơn vị của nó sẽ lấy bằng đơn vị cuối cùng của giá trị đo.

VI-5. KIỂM TRA VÀ THÀNH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Trong bình sai gián tiếp, sau khi thành lập được dạng cuối cùng của phương trình số hiệu chỉnh, công việc tiếp theo là thành lập hệ phương trình chuẩn. Giả thiết bài toán bình sai bao gồm n giá trị đo với t ẩn số thì hệ phương trình chuẩn có dạng:

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]\delta_x + [pab]\delta_y + [pac]\delta_z + ... + [pat]\delta_u + [paL] = 0\\
&[pab]\delta_x + [pbb]\delta_y + [pbc]\delta_z + ... + [pbt]\delta_u + [pbL] = 0\\
&[pac]\delta_x + [pbc]\delta_y + [pcc]\delta_z + ... + [pct]\delta_u + [pcL] = 0\\
&..........\\
&[pat]\delta_x + [pbt]\delta_y + [pct]\delta_z + ... + [ptt]\delta_u + [ptL] = 0
\end{aligned}\right\}$$

Để tránh sai sót trong quá trình thành lập hệ phương trình chuẩn, cần phải tính toán kiểm tra như sau:

* Kiểm tra các hệ số và số hạng tự do trong các phương trình số hiệu chỉnh theo công thức sau:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 + b_1 + c_1 + ... + t_1 + L_1 = s_1\\
&a_2 + b_2 + c_2 + ... + t_2 + L_2 = s_2\\
&..\\
&a_n + b_n + c_n + ... + t_n + L_n = s_n
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-24)}$$

Tính dòng tổng bằng cách cộng theo các cột dọc của hệ (VI-24). Nếu tính đúng thì phải có:

$$[a] + [b] + [c] + ... + [t] + [L] = [s] \qquad \text{(VI-25)}$$

* Kiểm tra hệ số của hệ phương trình chuẩn

Sau khi kiểm tra các hệ số và số hạng tự do của phương trình số hiệu chỉnh, tiếp tục tính các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn. Kiểm tra các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chuẩn theo công thức sau:

$$\left.\begin{aligned}
&[paa] + [pab] + [pac] + ... + [paL] = [paS]\\
&[pab] + [pbb] + [pbc] + ... + [pbL] = [pbS]\\
&[pac] + [pbc] + [pcc] + ... + [pcL] = [pcS]\\
&.........\\
&[pat] + [pbt] + [pct] + ... + [ptL] = [ptS]\\
&[paL] + [pbL] + [pcL] + ... + [pLL] = [pLS]
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-26)}$$

Tính dòng tổng bằng cách cộng theo các cột dọc của hệ (VI-26). Nếu đúng phải có:

$$[paS] + [pbS] + [pcS] + ... + [pLS] = [pSS] \qquad \text{(VI-27)}$$

Các công thức (VI-24), (VI-25), (VI-27) sử dụng để tính kiểm tra trên bảng VI-1.

Bảng VI-1

TT	P	Hệ phương trình số hiệu chỉnh					S]
		a]	b]	c]	...	L]	
1	P_1	a_1	b_1	c_1		L_1	S_1
2	P_2	a_2	b_2	c_2		L_2	S_2
3	P_3	a_3	b_3	c_3		L_3	S_3
.	. .	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.		.	.
n	P_n	a_n	b_n	c_n		L_n	S_n
[	[P]	[a]	[b]	[c]		[L]	[S]
Hệ phương trình chuẩn	[Pa [Pb [Pc ..... [PL	[Paa]	[Pab] [Pbb]	[Pac] [Pbc] [Pcc]	....	[PaL] [PbL] [PcL] ..... [PLL]	[PaS] [PbS] [PcS] .... [PSS]

VI-6. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN THEO PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Phương pháp Gauss dựa trên cơ sở khử dần các ẩn số trong hệ.

Ví dụ:

$$\left.\begin{aligned}&[Paa]\delta_x + [Pab]\delta_y + [Pac]\delta_z + [PaL] = 0 \ \text{(a)}\\&[Pab]\delta_x + [Pbb]\delta_y + [Pbc]\delta_z + [PbL] = 0 \ \text{(b)}\\&[Pac]\delta_x + [Pbc]\delta_y + [Pcc]\delta_z + [PcL] = 0 \ \text{(c)}\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI-28)}$$

Từ phương trình (a):

$$\delta_x = -\frac{[Pab]}{[paa]}\delta_y - \frac{[Pac]}{[Paa]}\delta_z - \frac{[PaL]}{[Paa]} \ \text{(e)} \quad \text{(VI-29)}$$

Phương trình (VI - 29) gọi là phương trình khử thứ nhất (e)

Thay δ_x từ (VI - 29) vào hai phương trình (b) và (c) của hệ (VI- 28) ta có

$$\left.\begin{aligned}&\left([Pbb] - \frac{[Pab][Pab]}{[Paa]}\right)\delta_y + \left([Pbc] - \frac{[Pab][Pac]}{[Paa]}\right)\delta_z + \left([PbL] - \frac{[Pab][PaL]}{[Paa]}\right) = 0\\&\left([Pbc] - \frac{[Pab][Pac]}{[Paa]}\right)\delta_y + \left([Pcc] - \frac{[Pac][Pac]}{[Paa]}\right)\delta_z + \left([PcL] - \frac{[Pac][PaL]}{[Paa]}\right) = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI-30)}$$

Ký hiệu:

$$\left.\begin{aligned}&[Pbb] - \frac{[Pab][Pab]}{[Paa]} = [Pbb.1]\\&[Pbc] - \frac{[Pab][Pac]}{[Paa]} = [Pbc.1]\\&[Pcc] - \frac{[Pac][Pac]}{[Paa]} = [Pcc.1]\\&[PbL] - \frac{[Pab][PaL]}{[Paa]} = [PcL.1]\\&[PcL] - \frac{[Pac][PaL]}{[Paa]} = [PcL.1]\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI -31)}$$

Vì vậy (VI - 30) có dạng

$$\left.\begin{aligned}&([Pbb.1]\delta_y + [Pbc.1]\delta_z + [PbL.1] = 0(b_1)\\&([Pbc.1]\delta_y + [Pcc.1]\delta_z + [PcL.1] = 0(c_1)\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI-32)}$$

(VI -32) gọi là phương trình biến đổi lần thứ nhất.

Từ phương tình (b_1) của hệ (VI - 32) xác định ẩn số δ_y

$$\delta_y = -\frac{[Pbc.1]}{[pbb.1]}\delta_z - \frac{[PbL.1]}{[Pbb.1]}(e_1)$$

Phương trình (VI - 33) gọi là phương trình khử lần thứ hai ký hiệu e_1.

Thay δ_Y vào (C_1) của hệ (VI - 32) ta được:

$$\left([Pcc.1] - \frac{[Pbc.1].[Pbc.1]}{[Pbb.1]}\right)\delta_z + \left([PcL.1] - \frac{[Pbc.1].[PbL.1]}{[Pbb.1]}\right) = 0 \quad \text{(VI - 34)}$$

Ký hiệu:

$$\left.\begin{aligned}&\left([Pcc.1] - \frac{[Pbc.1].[Pbc.1]}{[Pbb.1]}\right) = [Pcc.2]\\&\left([PcL.1] - \frac{[Pbc.1].[PbL.1]}{[Pbb.1]}\right) = [PcL.2]\end{aligned}\right\} \quad \text{(VI - 35)}$$

Do đó(VI - 34) có dạng:

$$[Pcc.2]\delta_z + [PcL.2] = 0 \ (c_2) \quad \text{(VI-36)}$$

Phương trình (c_2) là phương trình biến đổi lần thứ hai trong đó đã khử cả ẩn số thứ 2 δy. Từ phương trình (VI-36) ta có:

$$\delta_z = -\frac{[PcL.2]}{[Pcc.2]}(e_2) \quad \text{(VI-37)}$$

(VI-37) gọi là phương trình khử lần thứ 3.

Qua biến đổi ta thấy rằng số phương trình khử luôn đúng bằng số ẩn trong hệ phương trình chuẩn (VI-28). Như vậy hệ phương trình chuẩn (VI-28) có thể thay bằng một hệ phương trình tương đương:

$$\begin{aligned}&[paa]\delta_x + [pab]\delta_y + [pac]\delta_z + [paL] = 0\\&[Pbb.1]\delta_y + [pbc.1]\delta_z + [PbL.1] = 0\\&[pcc.2]\delta_z + [PcL.2] = 0\end{aligned}$$

Từ hệ phương trình trên dễ dàng xác định được các ẩn số $\delta_x, \delta_Y, \delta_z$.

VI-7. TÍNH SAI SỐ TRUNG PHƯƠNG TRỌNG SỐ ĐƠN VỊ

Sai số trung phương của đại lượng bất kỳ nào đó có thể xác định theo công thức:

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{P_i}} \text{ hay } m_i = \mu\sqrt{\frac{1}{P_i}}$$

Trong đó:

μ - Sai số trung phương trọng số đơn vị;

P_i - Trọng số đại lượng cần đánh giá độ chính xác.

Như vậy việc đánh giá độ chính xác gồm 2 vấn đề cụ thể:

- Xác định sai số trung phương trọng số đơn vị.
- Xác định trọng số của đại lượng cần đánh giá độ chính xác.

Sai số trung phương trọng số đơn vị:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{n-t}} \qquad \text{(VI-38)}$$

Trong đó: $n - t = r$ - Số đại lượng đo thừa;

v_i - Số hiệu chỉnh của đại lượng đo;

p_i - Trọng số của đại lượng đo.

Nếu t = 1 thì công thức (VI-38) có dạng:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{n-1}}$$

Đây là công thức tính μ trong bình sai trực tiếp không cùng độ chính xác một đại lượng. Từ công thức (VI-38) ta thấy muốn tính μ thì trước tiên phải tính [Pvv]. Các phương pháp tính [Pvv] như sau:

a. Thay các ẩn số vào phương trình số hiệu chỉnh sẽ tìm được v_i bình phương v_i sau đó nhân với P_i tương ứng và lấy tổng ta nhận được [Pvv].

b. Xuất phát từ công thức

$$v_i = a_i\delta_x + b_i\delta_y + \ldots + t_i\delta_u + L_i \qquad \text{(VI-39)}$$

Nhân 2 vế của công thức (VI-39) với $p_i v_i$ rồi lấy tổng nhận được:

$$[Pvv] = [PvL] \qquad \text{(VI-40)}$$

Trong đó:

$$[PLv] = [PaL]\delta_x + [PbL]\delta_y + \ldots + [Ptv]\delta_u + [PLL] \qquad \text{(VI-41)}$$

VI-8. TÍNH SAI SỐ TRUNG PHƯƠNG CỦA CÁC ẨN SỐ NHẬN ĐƯỢC SAU BÌNH SAI

Để tính sai số trung phương của các ẩn số trước hết phải biến đổi mỗi ẩn số là hàm các giá trị trực tiếp l_i.

Trong bình sai gián tiếp $l_i = f_i(x_0, y_0, \ldots u_0)$ $(i = 1 \div n)$ nên $m_{Li} = m_{li}$

Mặt khác ta lại có:

$$x = x_0 + \delta_x$$
$$y = y_0 + \delta_y$$
$$\ldots\ldots$$
$$u = u_0 + \delta_u$$

Cho nên

$$m_x = m_{\delta x}$$
$$m_Y = m_{\delta y}$$
$$\ldots\ldots$$
$$m_u = m_{\delta u}$$

Điều đó có nghĩa là hoàn toàn có thể biểu diễn mỗi ẩn số ở dạng hàm của số hạng tự do L_i và chỉ cần thành lập công thức tính sai số trung phương của các số hiệu chỉnh ẩn số.

Muốn lập hàm của một ẩn số nào đó chỉ phụ thuộc và đại lượng L_i có thể thực hiện bằng cách khử đồng thời các ẩn số khác trong hệ phương trình chuẩn. Nội dung của phương pháp là dựa vào hệ số nhân chưa xác định Q_{ij}, trong đó i dùng để chỉ số thứ tự ẩn số cần giữ lại trong hệ phương trình chuẩn còn j là số thứ tự phương trình của hệ.

Ví dụ: Có hệ phương trình (VI-42)

$$\left.\begin{array}{l}[paa]\delta_x + [pab]\delta_y + \ldots + [pat]\delta_u + [paL] = 0 \\ [pab]\delta_x + [pbb]\delta_y + \ldots + [pbt]\delta_u + [pbL] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [pat]\delta_x + [pbt]\delta_y + \ldots + [ptt]\delta_u + [ptL] = 0\end{array}\right\} \qquad \text{(VI-42)}$$

Muốn cho δ_x là hàm của các đại lượng L_i ta nhân mỗi phương trình trong hệ với một số nhân chưa xác định Q_{ij} $(j = 1,2,\ldots t)$ rồi cộng lại ta được:

$$\left.\begin{array}{l}
\left([paa]Q_{11}+[pab]Q_{12}+....+[pat]Q_{1t}\right)\delta_x+\\
\left([pab]Q_{11}+[pbb]Q_{12}+....+[pbt]Q_{1t}\right)\delta_y+\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left([pat]Q_{11}+[pbt]Q_{12}+....+[ptt]Q_{1t}\right)\delta_u+\\
\left([paL]Q_{11}+[pbL]Q_{12}+....+[ptL]Q_{1t}\right)=0
\end{array}\right\} \quad \text{(VI-43)}$$

Các hệ số Q_{ij} chưa xác định, nên có thể đặt điều kiện.

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]Q_{11}+[pab]Q_{12}+....+[pat]Q_{1t}=1\\
[pab]Q_{11}+[pbb]Q_{12}+....+[pbt]Q_{1t}=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
[pat]Q_{11}+[pbt]Q_{12}+....+[ptt]Q_{1t}=0
\end{array}\right\} \quad \text{(VI-44)}$$

Hệ (VI-44) gọi là hệ phương trình trọng số đối với ẩn số thứ nhất với điều kiện (VI-44) ta có:

$$-\delta_x=[paL]Q_{11}+[pbL]Q_{12}+.....+[ptL]Q_{1t} \quad \text{(VI-45)}$$

Đây là phương trình số hiệu chỉnh cho ẩn số thứ nhất.

Khai triển (VI-45) sẽ nhận được:

$$-\delta_x=(p_1a_1Q_{11}+p_1b_1Q_{12}+....+p_1t_1Q_{1t})L_1+$$

$$(p_2a_2Q_{11}+p_2b_2Q_{12}+....+p_2t_2Q_{1t})L_2+$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(p_na_nQ_{11}+p_nb_nQ_{12}+....+p_nt_nQ_{1t})L_n$$

Đặt

$$\alpha_i=p_i(a_iQ_{11}+b_iQ_{12}+......+t_iQ_{1t}) \quad \text{(VI-46)}$$
$$t=1,2...n$$

Như vậy $-\delta_x=\alpha_1L_1+\alpha_2L_2+....+\alpha_nL_n$ (VI-47)

Ta nhận thấy δ_x là hàm của các số hạng tự do L_i và sẽ tìm được:

$$\frac{1}{p_{\delta_x}}=\frac{\alpha_1^2}{p_1}+\frac{\alpha_2^2}{p_2}+.....+\frac{\alpha_n^2}{p_n} \quad \text{(VI-48)}$$

Hay $$\frac{1}{p_{\delta_x}}=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] \quad \text{(VI-49)}$$

Để tính $\frac{1}{p_{\delta_x}}$ dễ dàng, ta biến đổi vế phải của công thức (VI-49). Muốn vậy lần lượt nhân (VI-46) với a_i, b_i, t_i và $\frac{\alpha_i}{p_i}$ rồi lấy tổng đồng thời chú ý đến (VI-44) ta sẽ nhận được:

$$\left.\begin{array}{l}
[a\alpha]=1\\
[b\alpha]=0\\
\dots\dots\\
[t\alpha]=0\\
\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]=Q_{11}
\end{array}\right\} \quad \text{(VI-50)}$$

Do đó $$\frac{1}{p_{\delta_x}}=Q_{11} \quad \text{(VI-51)}$$

và $$m_{\delta_x}=\mu\sqrt{\frac{1}{p_{\delta_x}}}=\mu\sqrt{Q_{11}}$$

Đây là công thức tính sai số trung phương của ẩn số thứ nhất sau khi bình sai.

Ta cũng làm tương tự như trên đối với các ẩn số còn lại, cụ thể là lần lượt đem $Q_{2j}, Q_{3j}...Q_{tj}(j=1,2....t)$ nhân với hệ phương trình chuẩn (VI-42). Trọng số đảo của các ẩn số còn lại là:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{p_{\delta_y}}=Q_{22}\\
\frac{1}{p_{\delta_z}}=Q_{33}\\
\dots\dots\\
\frac{1}{p_{\delta_u}}=Q_{tt}
\end{array}\right\} \quad \text{(VI-53)}$$

và sai số trung phương của các ẩn số còn lại sẽ là:

$$\left.\begin{aligned} m_{\delta_y} &= \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\delta_y}}} = \mu\sqrt{Q_{22}} \\ m_{\delta_z} &= \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\delta_z}}} = \mu\sqrt{Q_{33}} \\ m_{\delta_u} &= \mu\sqrt{\frac{1}{P_{\delta_u}}} = \mu\sqrt{Q_{tt}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VI-54)}$$

Q_{11}, Q_{22},..... Q_{tt}, bằng trọng số đảo của các ẩn số nhận được sau bình sai vì thế gọi chúng là hệ số trọng số. Các hệ số này có thể tính được bằng cách giải các hệ phương trình (VI-44) và các hệ phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned} &[paa]Q_{21} + [pab]Q_{22} + ... + [pat]Q_{2t} = 0 \\ &[pab]Q_{21} + [pbb]Q_{22} + ... + [pbt]Q_{2t} = 1 \\ &[pac]Q_{21} + [pbc]Q_{22} + ... + [pct]Q_{2t} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[pat]Q_{21} + [pbt]Q_{22} + ... + [ptt]Q_{2t} = 0 \end{aligned}\right\}$$

(VI-55)

.

.

.

$$\left.\begin{aligned} &[paa]Q_{t1} + [pab]Q_{t2} + ... + [pat]Q_{tt} = 0 \\ &[pab]Q_{t1} + [pbb]Q_{t2} + ... + [pbt]Q_{tt} = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &[pat]Q_{t1} + [pbt]Q_{t2} + ... + [ptt]Q_{tt} = 1 \end{aligned}\right\}$$

Các hệ số của các hệ phương trình này hoàn toàn giống như hệ số của hệ phương trình chuẩn (VI-42) chỉ khác nhau về ẩn số và số hạng tự do.

Do đó việc giải hệ phương trình trọng số tương tự như giải hệ phương trình chuẩn đã trình bày ở trên.

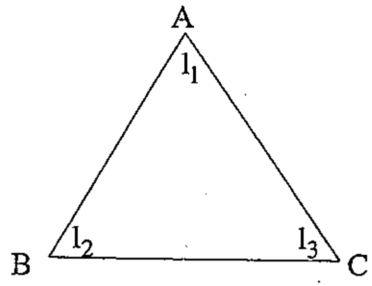
Chương VII

PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN

VII-1. KHÁI NIỆM VỀ BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN

Để có điều kiện kiểm tra kết quả đo và nâng cao độ chính xác các yếu tố cần xác định, người ta tiến hành đo thừa.

Ví dụ: Muốn xác định hình dạng của một tam giác như hình VII-1 ngoài yếu tố về chiều dài cạnh đã biết, chỉ cần đo 2 góc, nhưng trong thực tế người ta đo cả 3 góc.



Hình VII-1

Như vậy là có một đại lượng đo thừa.

Do có một đại lượng đo thừa ấy nên có một điều kiện hình học cần phải được thoả mãn là tổng 3 góc trong một tam giác phải bằng 180^0. Những điều kiện hình học hoặc vật lý thường được biểu diễn dưới dạng các phương trình toán học nên gọi là phương trình điều kiện.

Gọi A, B và C là giá trị thực của 3 góc trong một tam giác thì phương trình điều kiện là:

$$A + B + C - 180^0 = 0 \qquad \text{(VII- 1)}$$

Thực tế không biết giá trị thực của đại lượng đo mà dùng phương pháp bình sai, chỉnh lý thuyết kết quả đo để tìm giá trị xác suất nhất của chúng. Nếu ký hiệu giá trị xác suất nhất của 3 góc trong tam giác là x_1, x_2, x_3 ta cũng có phương trình điều kiện

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180^0 = 0 \qquad \text{(VII -2)}$$

Trong đó giá trị xác xuất nhất và giá trị đo, số hiệu chỉnh có quan hệ với nhau là:

$$x_i = l_i + v_i \qquad \text{(VII - 3)}$$

Vì vậy ta viết phương trình (VII - 2) dưới dạng:

$$(l_1+v_1)+(l_2+v_2)+(l_3+v_3)-180^0=0$$

hay
$$v_1+v_2+v_3+(l_1+l_2+l_3)-180^0=0 \qquad \text{(VII- 4)}$$

Trong phương trình điều kiện (VII- 4) số hạng tự do bằng hiệu số giá trị đo và giá trị lý thuyết, thường gọi là sai số khép và ký hiệu là W. Trong trường hợp này

$$W=(l_1+l_2+l_3)-180^0 \qquad \text{(VII- 5)}$$

Như vậy phương trình điều kiện (VII- 4) sẽ có dạng:

$$v_1+v_2+v_3+W=0 \qquad \text{(VII- 6)}$$

Tổng quát hoá cho trường hợp có n đại lượng đo, trong đó có r đại lượng thừa thì sẽ có r phương trình điều kiện.

Vấn đề đặt ra là phải giải bài toán để tìm ra các số hiệu chỉnh v_i theo nguyên lý số bình phương nhỏ nhất, tức là [pvv]= min, đồng thời phải thoả mãn r phương trình điều kiện đã lập ra. Đây là thực chất của phương pháp bình sai điều kiện.

VII-2. LÝ THUYẾT BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN

Giả thiết phải giải một bài toán trong đó có n đại lượng đo có các giá trị là $l_1, l_2, l_3...l_n$ với các trọng số tương ứng là $P_1, P_2, P_1...P_n$.

Số các đại lượng đo cần thiết tối thiểu là t, còn số các đại lượng đo thừa là r= n-t. Như vậy sẽ có r phương trình điều kiện độc lập.

Nếu ký hiệu giá trị bình sai của các đại lượng đo là $x_1, x_2, x_3...x_n$ thì dạng tổng quát của phương trình điều kiện là:

$$F_j(x_1,x_2,x_3...x_n)=0 \qquad \text{(VII-7)}$$

$$(j=a, b, c,...r)$$

Thay (VII- 3) vào (VII- 7) và nếu phương trình điều kiện có dạng phi tuyến tính thì khai triển theo chuỗi Taylor tới các số hạng bậc nhất sẽ được phương trình điều kiện dạng tuyến tính:

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1+a_2v_2+...a_nv_n+W_a=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+...b_nv_n+W_b=0 \\ \\ r_1v_1+r_2v_2+...r_nv_n+W_r=0 \end{array}\right\} \qquad \text{(VII-8)}$$

Trong đó:
$$a_i=\frac{\partial F_a}{\partial l_i}\ ;\ b_i=\frac{\partial F_b}{\partial l_i}\ ;\ r_i=\frac{\partial F_r}{\partial l_i}$$

$W_j=F_j(l_1, l_2,...l_n)$ là sai số khép.

Theo phương pháp bình phương nhỏ nhất [Pvv] = min đồng thời điều kiện (VII-8) cũng phải được thoả mãn, chúng ta phải giải một bài toán cực trị có điều kiện. Theo Lagrang, bài toán này tương đương với bài toán tìm cực trị bình thường của hàm.

$$\phi=[Pvv]-2K_a.F_a-2K_b.F_b-...-2K_r.F_r=\min \qquad \text{(VII-9)}$$

Trong đó: K_j (j=a,b,...,r) là các hệ số nhân cần tìm, được gọi là các hệ số Lagrange và trong trắc địa gọi là các số liên hệ.

Để tìm cực tiểu của hàm (VII-9) ta lần lượt lấy các đạo hàm riêng của ϕ theo v_i rồi cho bằng không.

$$\frac{\partial\phi}{\partial V_i}=2P_iV_i-2K_aa_i-2K_bb_i-...-2K_ir_i=0 \qquad \text{(VII-10)}$$

Do đó
$$V_i=\frac{1}{P_i}(a_iK_a+b_iK_b+...+r_iK_r) \qquad \text{(VII-11)}$$

Từ (VII-11) ta thấy để tính số hiệu chỉnh V_i trước hết phải biết các số liên hệ K_j. Muốn vậy ta lập hệ phương trình để giải K_j.

Thay các V_i từ (VII-11) vào từng phương trình điều kiện trong hệ (VII-8) và sắp xếp lại ta có:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{aa}{P}\right]K_a+\left[\frac{ab}{P}\right]K_b+.....+\left[\frac{ar}{P}\right]K_r+W_b=0 \\ \left[\frac{ab}{P}\right]K_a+\left[\frac{bb}{P}\right]K_b+.....+\left[\frac{br}{P}\right]K_r+W_b=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\frac{ar}{P}\right]K_a+\left[\frac{br}{P}\right]K_b+.....+\left[\frac{rr}{P}\right]K_r+W_r=0 \end{array}\right\} \qquad \text{(VII-12)}$$

Hệ (VII-12) là hệ phương trình chuẩn số liên hệ. Hệ phương trình chuẩn số liên hệ có số phương trình bằng số đại lượng đo thừa (r), mỗi phương trình trong hệ đều có dạng tuyến tính. Hệ có một đường chéo chính đi qua các hệ số bình phương, còn các hệ số khác bằng nhau từng đôi một và đối xứng qua đường chéo chính.

VII-3. PHƯƠNG TRÌNH ĐIỀU KIỆN SỐ HIỆU CHỈNH

Lập phương trình điều kiện số hiệu chỉnh là khâu đầu tiên có ý nghĩa quyết định trong bình sai điều kiện. Cần phải lập đủ số lượng và bảo đảm tính chất độc lập của các phương trình điều kiện lập ra. Tính chất độc lập ở đây là độc lập tuyến tính, tức là một phương trình điều kiện này không thể được suy ra từ các phương trình điều kiện khác. Hay nói cách khác, một phương trình điều kiện nào đó không phải là tổ hợp tuyến tính của các phương trình điều kiện còn lại.

Tuỳ theo từng trường hợp cụ thể, phương trình điều kiện có những loại khác nhau. Xác định đúng số lượng của từng loại là điều quan trọng để xác định đúng tổng số phương trình điều kiện và tính chất độc lập của chúng.

Ta biết rằng: Tổng số phương trình điều kiện độc lập luôn luôn bằng số lượng đo thừa và được xác định theo công thức: $r = n - t$.

Trong đó: t là số lượng đo cần thiết, đúng bằng số ẩn số độc lập khi bình sai theo phương pháp gián tiếp.

Trong trắc địa chúng ta thường tiếp xúc với lưới mặt bằng và lưới độ cao. Hai loại lưới này đều có thể là lưới tự do hoặc lưới phụ thuộc, tuỳ theo số liệu gốc trong lưới.

Lưới tự do là lưới chỉ có số liệu gốc tối thiểu, vừa đủ để xác định vị trí và kích thước của nó trong một hệ toạ độ nhất định. Lưới có số liệu gốc nhiều hơn số liệu tối thiểu thì gọi là lưới phụ thuộc.

Đối với lưới có độ cao, số liệu gốc tối thiểu là độ cao của một điểm. Còn đối với lưới mặt bằng, đo góc số liệu gốc tối thiểu là toạ độ của một điểm, chiều dài của một cạnh và phương vị toạ độ của một cạnh, hoặc thay cho hai yếu tố sau là một toạ độ của một điểm nữa, tức là tọa độ của hai điểm. Đối với lưới mặt bằng đo góc cạnh, thì số liệu gốc tối thiểu là toạ độ của một điểm và phương vị của một cạnh.

Trường hợp trong lưới không có (hoặc còn thiếu) các yếu tố đã biết dùng làm số liệu gốc thì phải giả định hoặc đo để có số liệu tối thiểu.

Sau đây chúng ta sẽ xác định tổng số phương trình điều kiện cho lưới toạ độ và lưới mặt bằng tự do và phụ thuộc.

Nếu dùng cho các kí hiệu.

p - Tổng số điểm trong lưới;

k - Số điểm đã biết;

a. Lưới độ cao tự do: $r = n - (p-1)$ (VII-13)

b. Lưới độ cao phụ thuộc: $r = n-(p-k)$ (IV-14)

c. Lưới mặt bằng tự do: $r=n-2(p-2)$ (IV-15)

d. Lưới mặt bằng phụ thuộc: $r = n - 2(p - k)$ (IV-16)

VII-3-1. Phương trình điều kiện trong lưới độ cao

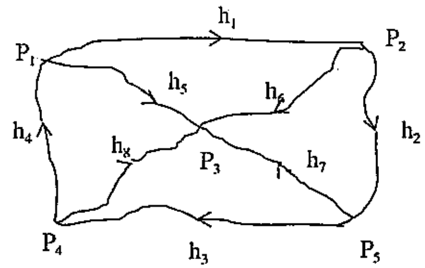
Ví dụ 1: Xét lưới tự do (hình VII-2). Trong trường hợp này ta có n=8, p= 5. Vậy tổng số phương trình điều kiện là:

$$r = 8 - (5 - 1) = 4$$

Để viết các phương trình điều kiện ta kí hiệu.

x_i- giá trị hình sai của hiệu độ cao trên đường đo thứ i.

h_i- giá trị đo của hiệu độ cao.

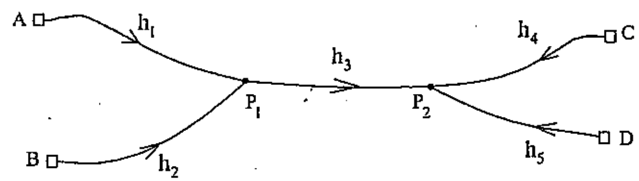


Hình VII-2

- Với các kí hiệu trên và chú ý đến hướng của đường đo ta viết được 4 phương trình điều kiện giá trị bình sai.

$$x_1 + x_6 - x_5 = 0$$
$$x_2 + x_7 - x_6 = 0$$
$$x_3 + x_8 - x_7 = 0$$
$$x_4 + x_5 - x_8 = 0$$

- Chuyển thành phương trình điều kiện số hiệu chỉnh.



Hình VII-3

$$\begin{aligned}
v_1 \qquad\qquad & - v_5 + v_6 \qquad + W_a = 0 \\
v_2 \qquad\qquad & - v_6 + v_7 \qquad + W_b = 0 \\
v_3 \qquad\qquad & - v_7 + v_8 + W_c = 0 \\
v_4 + v_5 \qquad & - v_8 + W_d = 0
\end{aligned}$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned}
W_a &= h_1 - h_5 + h_6 \\
W_b &= h_2 - h_6 + h_7 \\
W_c &= h_3 - h_7 + h_8 \\
W_d &= h_4 + h_5 - h_8
\end{aligned}\right\}$$

Ví dụ 2: Xét lưới phụ thuộc (hình VII - 3) trong trường hợp này ta có: n = 5; p = 6; k = 4.

Vậy tổng số phương trình điều kiện là: r = 5 (6 - 4) = 3.

Nếu ta kí hiệu độ cao đã biết các điểm A, B, C, D là: H_A, H_B, H_C, H_D.

Ta viết được các phương trình điều kiện giá trị bình sai.

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + H_A - H_B &= 0 \\
x_4 - x_5 + H_C - H_D &= 0 \\
x_1 + x_3 - x_4 + H_A - H_C &= 0
\end{aligned}$$

Chuyển thành phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

$$\begin{aligned}
v_1 - v_2 \qquad\qquad & + W_a = 0 \\
v_4 - v_5 & + W_b = 0 \\
v_1 \qquad + v_3 - v_4 & + W_c = 0
\end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
W_a &= h_1 - h_2 + H_A - H_B \\
W_b &= h_4 - h_5 + H_C - H_D \\
W_c &= h_1 + h_3 - h_4 + H_A - H_C
\end{aligned}$$

Nhận xét:

- Phương trình điều kiện trong lưới độ cao có dạng tuyến tính rất đơn giản, ý nghĩa của nó là tổng giá trị bình sai của các hiệu độ cao trên một đường đo khép kín phải bằng không; hoặc xuất phát từ độ cao của một điểm gốc thông qua giá trị bình sai của các hiệu độ cao trên một đường, tính đến một điểm gốc khác thì độ cao tính được phải khép với độ cao đã biết của điểm gốc ấy.

- Các phương trình điều kiện cũng có thể viết theo các đường đo cao khác nhau, nhưng phải đảm bảo tính chất độc lập tuyến tính và đơn giản, tiện tính toán.

VII-3-2. Phương trình điều kiện trong lưới tam giác đo góc

Trong lưới tam giác đo góc có thể được bình sai theo góc hoặc theo hướng. Sau đây ta xét phương trình điều kiện trong lưới đo góc.

a. Lưới tam giác tự do

Trong thực tế chúng ta thường gặp các lưới tự do có dạng như hình (VII-4) trong đó:

Các điểm được đánh dấu bằng Δ là các điểm gốc đã biết toạ độ. Trong lưới cũng có thể có những điểm không đặt được máy và có cạnh chỉ đo một hướng.

Chúng ta vẫn dùng kí hiệu ở phần trên và thêm các kí hiệu:

p' - Số điểm không đặt máy được.

L - Tổng số cạnh tam giác trong lưới.

L' - Số cạnh tam giác chỉ đo một hướng.

Chúng ta có thể xác định số lượng từng loại phương trình điều kiện thường gặp trong lưới tam giác tự do theo các công thức sau đây:

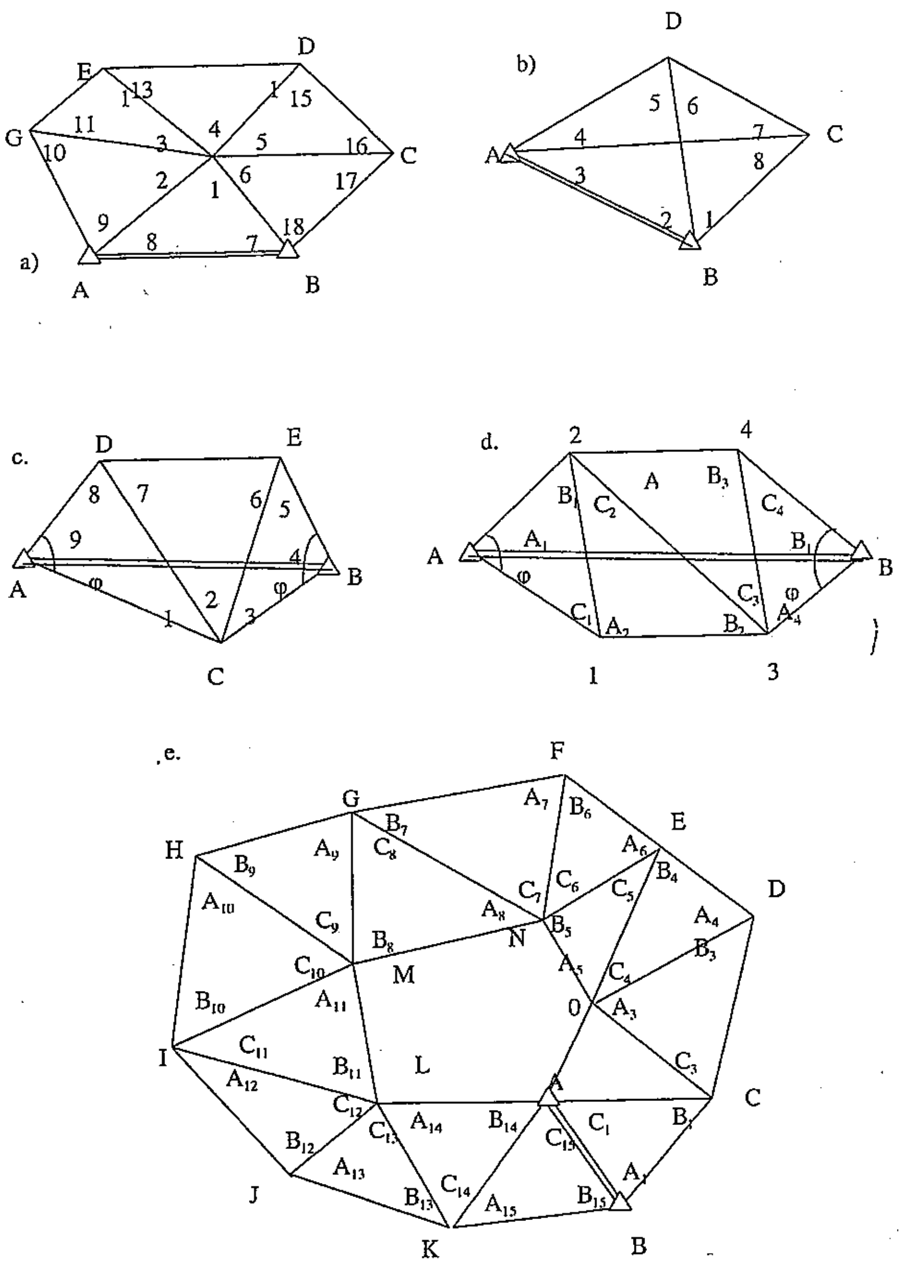
** Phương trình điều kiện hình*

Ý nghĩa của phương trình điều kiện hình là tổng các giá trị bình sai của các góc trong một đa giác phải bằng giá trị lý thuyết của nó là (n-2)180^0, trong đó n là số cạnh đa giác.

Chúng ta nhận thấy rằng chỉ có những cạnh tam giác được đo 2 hướng mới có thể tạo thành phương trình điều kiện hình. Số lượng những cạnh đó là (L-L'). Nhưng những cạnh đó phải đủ để nối các điểm tam giác có đặt máy thành một đường khép kín. Số điểm có đặt máy là (P-P'), do đó số cạnh vừa đủ để nối những điểm đó thành một đường không khép kín là ((p-p')-1). Số lượng cạnh còn thừa chính là số phương trình điều kiện hình.

$$R_H = (L - L') - \{(p - p') - 1\}$$

Hay: $$R_H = (L - L') - (p - p') + 1 \qquad \text{(VII-18)}$$



Hình VII-4

Ví dụ: Đối với lưới (hình VII-4a) ta có p=7, p'= 0, L=12, L'=0.

Vậy $$R_4 = 12 - 7 + 1 = 6$$

Đó chính là 6 phương trình điều kiện hình tam giác. Ta có thể viết được phương trình điều kiện số hiệu chỉnh cho một trong các hình tam giác của lưới, chẳng hạn tam giác ABO.

$$v_1 + v_7 + v_8 + W_a = 0$$

Trong đó: $w_a = \beta_1 + \beta_7 + \beta_8 - 180^\circ$; β - là giá trị thứ i.

Đối với lưới (hình VII-4b) ta có P=4, P'=0, L=6, L'=0.

Vậy $$R_H = 6 - 4 + 1 = 3$$

Đối với lưới (hình VII-4d) ta có P=6; P'=0; L=10; L'=0.

Vậy $$R_H = 10 - 6 + 1 = 5.$$

Để đơn giản ta chọn 4 phương trình điều kiện hình tam giác và một phương trình điều kiện hình đa giác AB31.

Đối với lưới hình (VII-4e) ta có P=15; P'= 0;:L=30; L'=0.

Vậy $R_H = 30 - 15 + 1 = 16$. Trong đó 15 phương trình điều kiện hình tam giác và một phương trình điều kiện đa giác mười cạnh BCDEFGHIJK.

* *Phương trình điều kiện vòng*

Ý nghĩa hình học của phương trình điều kiện vòng là trên một trạm máy có n' hướng, thì giá trị bình sai của tổng n' góc có đỉnh là trạm máy ấy phải bằng 360°.

Nếu chỉ đo có (n' - 1) góc thì trạm máy không có phương trình điều kiện vòng. Trong toàn lưới có (2L-L') hướng, nếu mỗi trạm máy bớt đi một góc thì toàn lưới chỉ đo: $\{(2L - L') - (P - P')\}$ góc thì lưới không có phương trình điều kiện vòng. Số góc thừa chính bằng số phương trình điều kiện vòng:

$$R_v = n - \{(2L - L') - (P - P')\} = n - (2L - L') + (P - P') \qquad \text{(VII-9)}$$

Ta nhận thấy rằng phương trình điều kiện vòng chỉ xuất hiện trong đa giác trung tâm có đo tất cả các góc ở điểm trung tâm ấy.

Đối với lưới (hình VII-4a) chỉ có một phương trình điều kiện vòng là:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + W_v = 0$$

Trong đó: $$w_v = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 - 360^\circ$$

** Phương trình điều kiện cực*

Ý nghĩa hình học của phương trình điều kiện cực là xuất phát từ một cạnh nào đó thông qua giá trị bình sai của các góc, tính chuyển chiều dài qua các cạnh xoay quanh một cực và trở về cạnh xuất phát phải nhận được chiều dài đúng bằng chiều dài ban đầu của nó.

Ta nhận thấy rằng cạnh tam giác do cả hai hướng hay chỉ một hướng cũng có thể tham gia vào phương trình điều kiện cực. Nhưng nếu số lượng cạnh tam giác chỉ vừa đủ để nối các điểm tam giác thành một chuỗi tam giác đơn thì cũng không có phương trình điều kiện cực. Muốn nối các điểm tam giác thành một chuỗi đơn thì ba điểm đầu cần ba cạnh, (P-3) điểm còn lại cứ mỗi điểm cần 2 cạnh do đó cần tất cả $\{3 + 2(P - 3)\}$ cạnh.

Số cạnh còn thừa chính bằng số phương trình điều kiện cực:

$$R_c = L - \{3 - 2(P - 3)\} = L - 2P + 3 \qquad \text{(VII-20)}$$

Đối với lưới hình VII-4a L=12; P=7; Vậy $R_c = 12 - 2x7 + 3 = 1$.

Nếu xuất phát từ cạnh $\overline{OA}$, dùng giá trị bình sai của các góc tính chuyển chiều dài theo một vòng khép kín thuận chiều kim đồng hồ trở về cạnh $\overline{OA}$ sẽ được:

$$\left(\overline{OA}\right)_T = \overline{OA}\frac{\sin x_9.\sin x_{11}.\sin x_{13}.\sin x_{15}.\sin x_{17}.\sin x_7}{\sin x_{10}.\sin x_{12}.\sin x_{14}.\sin x_{16}.\sin x_{18}.\sin x_8} = \overline{OA} \qquad \text{(VII-21a)}$$

Điều kiện đặt ra là $(\overline{OA})_T$ tính được phải đúng bằng cạnh $\overline{OA}$ ban đầu tức là:

$$\overline{OA}\frac{\sin x_9.\sin x_{11}.\sin x_{13}.\sin x_{15}.\sin x_{17}.\sin x_7}{\sin x_{10}.\sin x_{12}.\sin x_{14}.\sin x_{16}.\sin x_{18}.\sin x_8} = \overline{OA} \qquad \text{(VII-21b)}$$

hoặc

$$\frac{\sin x_9.\sin x_{11}.\sin x_{13}.\sin x_{15}.\sin x_{17}.\sin x_7}{\sin x_{10}.\sin x_{12}.\sin x_{14}.\sin x_{16}.\sin x_{18}.\sin x_8} = 1 \qquad \text{(VII-22)}$$

Đối với lưới tứ giác trắc địa (hình VII-4b) cũng có một phương trình điều kiện cực. Ta có thể chọn một trong bốn đỉnh của tứ giác làm điểm cực hoặc có thể chọn giao điểm của hai đường chéo làm cực.

Nếu lấy A làm điểm cực và xuất phát từ cạnh $\overline{AB}$ thì phương trình điều kiện cực là

$$\frac{\sin x_2 . \sin(x_5 + x_6). \sin x_8}{\sin x_5 .\sin x_7 .\sin(x_1 + x_2)} = 1 \qquad \text{(VII-23)}$$

Ta cần chú ý một số trường hợp, trong phương trình điều kiện cực có một số góc vừa xuất hiện ở tử số vừa xuất hiện ở mẫu số; sau khi triển khai thành dạng tuyến tính cần tập hợp các hệ số của chúng lại và lấy các hệ số hiệu chỉnh của các góc đo ra làm thừa số chung.

Đối với hình quạt (hình VII-4c) cũng có một phương trình điều kiện cực trong trường hợp này chỉ có thể dùng điểm C là đỉnh chung của các hình tam giác làm điểm cực.

Trong chuỗi tam giác vòng (hình VII-4c) tồn tại một phương trình điều kiện có ý nghĩa hình học giống như điều kiện cực, tức là xuất phát từ bất kỳ một cạnh nào đó (chẳng hạn AB), dùng giá trị bình sai của các góc tính chuyển chiều dài ban đầu. Nhưng ở đây không tồn tại một cực cụ thể như trong các hình đa thức trung tâm, tứ giác trắc địa và hình quạt, mà có thể xem như một phương trình điều kiện cực "nghĩa rộng" hoặc phương trình điều kiện chiều dài.

** Phương trình điều kiện hoành độ giả định*

Trong chuỗi tam giác giữa 2 điểm gốc, có đo hai gốc nối (hình VII-4d) chúng ta chưa có chiều dài gốc của một cạnh tam giác để chuyển chiều dài sang cạnh khác, do đó thường phải giả định chiều cao của một cạnh, vì vậy kích thước của lưới cũng là giả định. Khi đó không thể đặt điều kiện là toạ độ tính được của điểm B phải đúng bằng toạ độ đã có của nó, mà chỉ có thể đặt điều kiện điểm B tính được phải nằm trên đường chéo AB. Chỉ cần như vậy, khi ta thay chiều dài giả định của cạnh mở đầu bằng chiều dài chính thức của nó là có thể đưa điểm tính được về trùng với điểm B đã tính trước.

Nếu chọn hệ toạ độ giả định có trục x' trùng với AB, điều kiện trên có nghĩa là hoành độ y' của điểm B' (tức B tính được) phải bằng không tức là:

$$y'_B = 0 \qquad \text{(VII-24)}$$

(IV-24) là phương trình điều kiện hoành độ giả định. Để viết phương trình điều kiện ta chọn đường tính chuyển A1234B, cạnh mở đầu A1 có chiều dài giả định S_0, góc tính chuyển phương vị toạ độ là C, góc tính chuyển chiều dài trước là B, góc tính chuyển chiều dài sau là A và kí hiệu chiều dài có cạnh trên đường tính chuyển là S_0, S_1, S_3, S_4 phương vị toạ độ các cạnh trên đường tính chuyển là α_0, α_1, α_3, α_4. Phương trình điều kiện (VII-24) sẽ có dạng:

$$\sum_{i=0}^{4} S_i \sin\alpha_i = 0 \qquad \text{(VII-25)}$$

Trong đó S_i là chiều dài cạnh thứ i tính được qua S_0 và giá trị bình sai của các góc α_i là phương vị toạ độ cạnh thứ i tính được qua giá trị bình sai của các góc.

Từ hình VII-4d ta có:

$$S_i = S_0\prod_{j=i}^{i}\frac{\sin A_j}{\sin B_j} \qquad \text{(VII-26)}$$

Và

$$\alpha_i = \alpha_{AB} + \varphi + \sum_{j=1}^{i}(\pm)C_j \mp i.180^0 \qquad \text{(VII-27}$$

Trong đó φ, A_i, B_i, C_i là giá trị bình sai của các góc tương ứng ấy. Chúng ta thấy rằng các phương trình điều kiện hoành độ giả định có dạng phi tuyến tính khá phức tạp cần phải khai triển Taylor để chuyển về dạng tuyến tính theo nguyên tắc chung.

** Phương trình điều kiện toạ độ vòng*

Trong chuỗi tam giác vòng (hình VII-4c) tồn tại hai phương trình điều kiện toạ độ. Ý nghĩa hình học của nó xuất phát từ một điểm bất kì tính chuyển toạ độ theo một vòng trở về xuất phát phải nhận được đúng giá trị của toạ độ ban đầu. Để tiện tính toán thường xuất phát từ điểm gốc A, dùng chiều dài và phương vị toạ độ của cạnh AB làm chiều dài và phương vị mở đầu.

Trong trường hợp này phương trình điều kiện toạ độ có thể viết dưới dạng tổng số gia toạ độ trên một đường khép kín phải bằng không.

$$x_A + \Delta x_{A-A} = x_A \rightarrow \sum_{1}^{n} \Delta_x = 0 \qquad \text{(VII-28)}$$

$$y_A + \Delta y_{A-A} = y_A \rightarrow \sum_{1}^{n} \Delta_y = 0 \qquad \text{(VII-29)}$$

Chọn đường tính chuyển và dùng các kí hiệu tương tự như trên thì 2 phương trình điều kiện tọa độ sẽ có dạng:

$$\sum_{i}^{n} S_i \cos\alpha_i = 0 \qquad \text{(VII-30)}$$

$$\sum_{i}^{n} S_i \sin\alpha_i = 0 \qquad \text{(VII-31)}$$

Trong đó: $$S_i = S_{AB} \prod_{j=1}^{i} \frac{\sin A_j}{\sin B_j}$$

$$\alpha_i = \alpha_{AB} + \sum_{j=1}^{i} (\pm) C_j \,.\, \pm 180^{\circ}\,.\, i \qquad \text{(VII-33)}$$

Phương trình điều kiện toạ độ cũng có toạ độ cũng có dạng phi tuyến tính khác phức tạp, cần phải chuyển về dạng tuyến tính bằng cách khai triển Taylor và giữ lại đến số hạng bậc nhất của các số hiệu chỉnh.

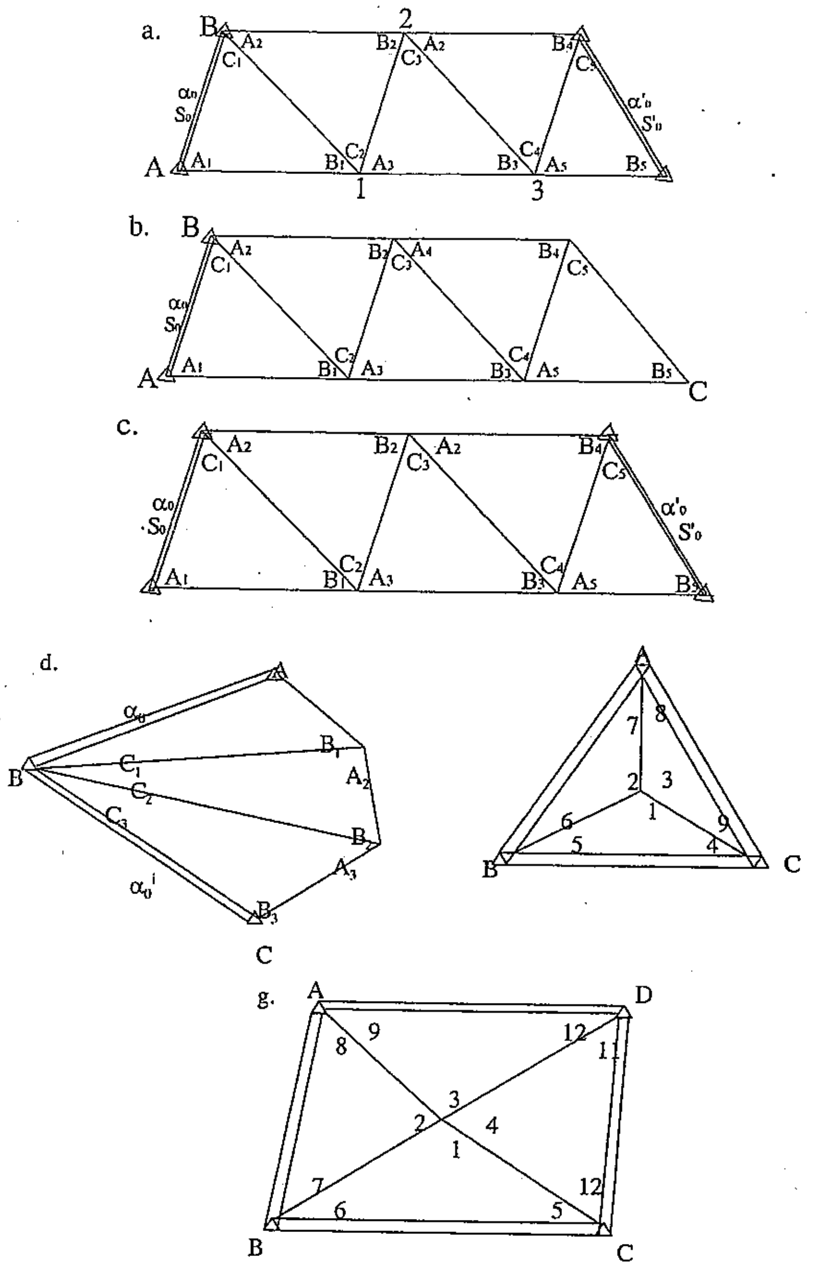
b. Lưới tam giác phụ thuộc

Các loại lưới phụ thuộc chúng ta thường gặp như (hình VII-5) trong đó S_0, α_0, α'_0, S'_0 là các chiều dài và các phương vị đã biết.

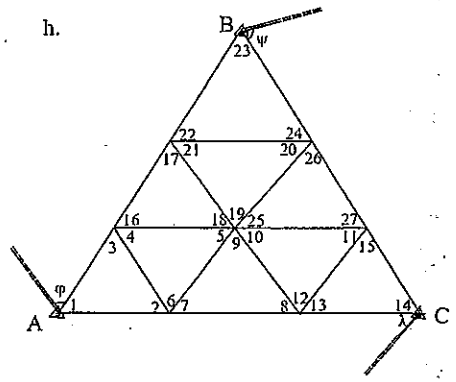
Trong lưới phụ thuộc, ngoài các phương trình điều kiện của lưới tự do, chúng ta sẽ gặp các loại phương trình sau:

- Phương trình điều kiện phương vị tọa độ.
- Phương trình điều kiện chiều dài.
- Phương trình điều kiện toạ độ.

** Phương trình điều kiện phương vị toạ độ*



h.



Hình VII-5

Trong lưới tam giác nếu có hai phương vị tọa độ đã biết thì điều kiện đặt ra là nếu xuất phát từ phương vị gốc α_0, dùng giá trị bình sai của các góc trung gian tính chuyển phương vị đến $\alpha_0^{'}$ thì phải đúng bằng phương vị đã cho. Dễ dàng ta nhận thấy rằng số phương trình điều kiện phương vị bằng số phương vị gốc thừa.

Đối với chuỗi tam giác (hình VII-5a) phương trình điều kiện phương vị có dạng:

$$\alpha_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - C_5 \pm 5.180^0 = \alpha_0^{'} \quad \text{(VII-34)}$$

Trong loại lưới phụ thuộc nằm giữa các góc cố định như hình (VII-5d), hình (VII-5e), hình (VII-5g) cũng tồn tại phương trình điều kiện phương vị.

Phương trình điều kiện phương vị trong hình VII-5d có dạng:

$$\alpha_0 + C_1 + C_2 + C_3 = \alpha_0^{'} \quad \text{(VII-35)}$$

Chuyển α_0 sang bên phải của phương trình trên thì:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \alpha_0^{'} - \alpha_0 \quad \text{(VII-36)}$$

Ta thấy rằng: $\alpha_0^{'} - \alpha_0 =$ góc ABC

Do đó phương trình điều kiện trên có thể viết thành:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \text{góc ABC} \quad \text{(VII-37)}$$

Trong đó góc ABC là góc cố định, cho nên trong trường hợp này phương trình điều kiện phương vị còn được gọi là phương trình điều kiện góc cố định.

Lưới phụ thuộc như hình (VII-5e) và (VII-5g) là lưới có các điểm góc tạo thành các cạnh và phương vị đã biết bao kín hình. Trong lưới (VII-5e), các điểm gốc tạo thành một tam giác cố định. Ngoài các phương trình điều kiện của một lưới tự do, tam-giác cố định này hoàn toàn

được thoả mãn khi giá trị bình sai của các góc thoả mãn hai phương trình điều kiện góc cố định, chẳng hạn:

$$x_5 + x_6 = \text{ABC và } x_4 + x_9 = \text{BCA}$$

Trong lưới (hình VII-5g), các điểm gốc tạo thành một tứ giác cố định. Ta có thể xác định được số lượng phương trình điều kiện góc cố định trong lưới này là 3.

Tóm lại: Nếu trong lưới phụ thuộc mà các điểm góc tạo thành các phương vị và cạnh đã biết bao kín hình thành số lượng phương trình điều kiện phải bằng số cạnh đa giác trừ đi 1.

Lưới phụ thuộc như hình (IV-5h) có 3 điểm gốc nhưng ở cách xa nhau, không tạo thành các cạnh đã biết của lưới tam giác bao kín hình, nhưng trên thực tế 3 điểm ấy cũng tạo một tam giác cố định, cũng có hai phương trình điều kiện góc cố định.

Hai phương trình điều kiện góc cố định này đảm bảo cho tam giác ABC sau khi bình sai đồng dạng với tam giác cố định ABC đã biết.

Nếu kí hiệu AB'C' là tam giác ABC sau khi bình sai và ABC là tam giác cố định đã biết trước thì:

$$B'AC' = BAC \quad \text{(VII-38)}$$

$$AB'C' = ABC \quad \text{(VII-39)}$$

Hoặc:

$$\operatorname{arctg}\frac{\Delta y_{AC'}}{\Delta x_{AC'}} - \operatorname{arctg}\frac{\Delta y_{AB'}}{\Delta x_{AB'}} = BAC \quad \text{(VII-40)}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{\Delta y_{B'A}}{\Delta x_{AC'}} - \operatorname{arctg}\frac{\Delta y_{B'C'}}{\Delta x_{B'C'}} = ABC \quad \text{(VII-41)}$$

Trong đó: Δx và Δy là số gia toạ độ tính được bằng giá trị bình sai của các góc và gọi là giá trị bình sai của số gia toạ độ.

Ta vẫn dùng các kí hiệu như đã quy định ở chuỗi tam giác bố trí giữa hai điểm gốc, ta có:

$$\Delta x_{AC'} = \sum_{i=0}^{5} S_i \cos\alpha_i \quad \text{(VII-42)}$$

$$\Delta y_{AC'} = \sum_{i=0}^{5} S_i \sin\alpha_i \quad \text{(VII-43)}$$

Trong đó S_i và α_i là giá trị bình sai của chiều dài và phương vị của cạnh tính chuyển thứ i.

$$S_i = S_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\sin A_j}{\sin B_j} \quad \text{(VII-44)}$$

$$\alpha_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{i}(\pm 1)C_j \mp i.180^0 \qquad \text{(VII-45)}$$

Như vậy phương trình điều kiện góc cố định trong trường hợp này cũng có dạng phi tuyến tính khá phức tạp cần phải chuyển về dạng tuyến tính theo nguyên tắc chung.

** Phương trình điều kiện chiều dài*

Trong lưới tam giác đã có 2 cạnh đã biết chiều dài ở tách biệt nhau như hình (VII-5a), (VII-5c) hoặc ở liền nhau như hình (VII-5d), nếu xuất phát từ cạnh S_0 dùng giá trị bình sai của các góc, tính chuyển chiều dài đến S_0 phải đúng bằng chiều dài đã cho.

Đối với chuỗi tam giác (hình VII-5a), phương trình điều kiện chiều có dạng:

$$S_0 \frac{\sin A_1 . \sin A_2 . \sin A_3 . \sin A_4 . \sin A_5}{\sin B_1 . \sin B_2 . \sin B_3 . \sin B_4 . \sin B_5} = S_0^{'} \qquad \text{(IV-46)}$$

Suy rộng ra là: nếu trong lưới có n cạnh đã biết chiều dài ở tách biệt nhau hoặc ở liền nhau nhưng không phải do các điểm cố định đã biết tạo thành hình khép kín (hình VII-5e, hình VII-5g) thì số lượng phương trình điều kiện chiều dài bằng n-1.

Đối với lưới như (hình VII-5e) ngoài các phương trình điều kiện của lưới tự do chỉ cần 2 phương trình điều kiện góc cố định thì tam giác ABC được xác định hoàn toàn. Nhưng đối với lưới như (hình VII-5g) thì phải có một phương trình điều kiện chiều dài cùng với 3 phương trình điều kiện góc cố định. Khi đó tứ giác ABCD mới được xác định hoàn toàn.

Vậy trong các lưới có các điểm gốc cố định tạo thành các cạnh có chiều dài đã biết bao kín hình thì số lượng phương trình điều kiện chiều dài bằng số cạnh đã biết chiều dài trừ đi 3.

** Phương trình điều kiện toạ độ*

Trong lưới tam giác, ngoài số liệu gốc tối thiểu là hai điểm kề nhau đã biết toạ độ, nếu có một điểm gốc thừa không nối với điểm gốc tối thiểu qua một cạnh tam giác của lưới thì sẽ có hai phương trình điều kiện toạ độ. Điều chú ý điểm gốc thừa phải không nối với điểm gốc tối thiểu và hai điểm gốc tối thiểu phải kề nhau.

Tương tự như điều kiện toạ độ vòng trong lưới tự do, nếu xuất phát từ toạ độ của điểm gốc đã biết, dùng các góc đã bình sai tính chuyển toạ độ đến một điểm gốc thừa thì phải bằng đúng toạ độ đã cho của nó.

Ví dụ: Đối với lưới như hình (VII-5b) thì phương trình điều kiện toạ độ có dạng:

$$x_A + \sum_{i=0}^{5} S_i . \cos\alpha_i = x_C \qquad \text{(IV-47)}$$

$$y_A + \sum_{i=0}^{5} S_i . \sin\alpha_i = y_C \qquad \text{(IV-48)}$$

Trong đó:

$$S_i = S_0 \prod_{j=1}^{i} \frac{\sin A_j}{\sin B_j}$$

$$\alpha_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{i} (\pm) C_j . \mp i.180^0$$

Theo nguyên lý bình phương nhỏ nhất, bình sai theo góc các lưới tam giác đo hướng là không chặt chẽ. Vì vậy đối với lưới tam giác nhà nước hạng I, hạng II và các lưới có độ chính xác tương đương thường phải bình sai theo hướng.

Ta biết rằng giữa góc và hướng có mối quan hệ rất đơn giản là giá trị bình sai của góc bằng hiệu số giá trị bình sai của hai hướng kẹp góc ấy. Vì vậy thì khi thay góc bằng các hướng thì ta nhận thấy rằng phương trình điều kiện luôn luôn được thoả mãn. Điều đó nghĩa là khi bình sai theo hướng thì phương trình điều kiện vòng không tồn tại nữa, còn các phương trình điều kiện khác vẫn giữ nguyên ý nghĩa của chúng. Muốn lập các phương trình điều kiện ấy chỉ cần thay góc bằng hiệu của hai hướng có liên quan là được.

VII-4. LẬP VÀ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHUẨN SỐ LIÊN HỆ

VII-4-1. Lập hệ phương trình chuẩn

Phương pháp lập hệ phương trình chuẩn, trên cơ bản giống như trong bình sai gián tiếp. Nhưng hệ số trong hệ phương trình chuẩn là:

$$\left[\frac{aa}{p}\right]; \left[\frac{ab}{p}\right]; \left[\frac{ac}{p}\right]; \ldots$$

Trong đó: P_i nằm ở mẫu số, do đó khi lập các hệ số của phương trình chuẩn sẽ dùng $\frac{1}{P_i}$ nhân với a_i, b_i, c_i....

Số hạng tự do trong hệ phương trình chuẩn chính là số hạng tự do trong phương trình điều kiện: W_a, W_b, W_c....

Vì vậy hệ phương trình chuẩn số liên hệ với dạng:

$$\begin{aligned} \left[\frac{aa}{P}\right]K_a + \left[\frac{ab}{P}\right]K_b + \ldots + \left[\frac{ar}{P}\right]K_r + W_a &= 0 \\ \left[\frac{ab}{P}\right]K_a + \left[\frac{bb}{P}\right]K_b + \ldots + \left[\frac{br}{P}\right]K_r + W_b &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-49)}$$

$$\left[\frac{ar}{P}\right]K_a + \left[\frac{br}{P}\right]K_b + \ldots + \left[\frac{rr}{P}\right]K_r + W_r = 0$$

VII-4-2. Giải hệ phương trình chuẩn

- Phương pháp giải hệ phương trình chuẩn trong bình sai điều kiện hoàn toàn giống như trong bình sai gián tiếp. Trong trường hợp này ẩn số K_j và các số hạng tự do là W_j.

- Sau khi tính được các giá trị của K_j tính số hiệu chỉnh theo công thức:

$$V_i = \frac{1}{P_i}(a_iK_a + b_iK_b + \ldots + r_iK_r)$$

- Kiểm tra các số hiệu chỉnh tính được theo công thức:

$$[PV] = [a]K_a + [b]K_b \ldots + [r]K_r$$

- Tính giá trị bình sai của các đại lượng đo theo công thức:

$$x_i = l_i + V_i$$

VII-4-3. Đánh giá độ chính xác

a. Tính sai số trung phương trọng số đơn vị

Sai số trung phương trong số đơn vị trong bình sai điều kiện giống như trong bình sai gián tiếp, nhưng ở đây n - t = r.

Do đó công thức có dạng:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[Pvv]}{r}} \qquad \text{(VII-50)}$$

Tính [Pvv] bằng cách tính trực tiếp dùng các số hiệu chỉnh V_i.

- Tính theo công thức:

$$[Pvv] = [av]K_a + [bv]K_b + \ldots + [rv]K_r$$

Trong đó:

$$[av] = -W_a$$
$$[bv] = -W_b$$
$$[rv] = -W_r$$

Do đó:

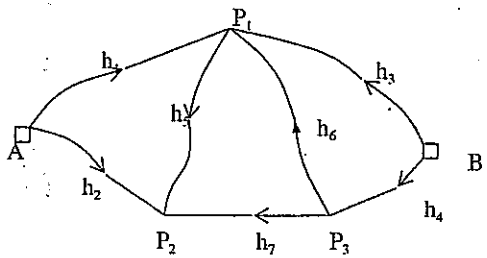
$$[Pvv] = -W_a.K_a - W_b.K_b - \ldots - W_r.K_r \qquad \text{(VII-51)}$$

b. Tính sai số trung phương của hàm các giá trị sau khi bình sai

$$m_F = \mu\sqrt{\frac{1}{P_F}}$$

Ví dụ: Bình sai điều kiện:

Cho một lưới độ cao như hình vẽ. Hai điểm A và B đã biết độ cao, hiệu độ cao đo được và chiều dài các tuyến ghi trong bảng sau:



STT Tuyến đo	Hiệu độ cao đo được (m)	Chiều dài (Km)	V_i (mm)	Hiệu độ cao sau bình sai
1	+1.359	1	-0.43	+1.59
2	+2.009	1	+2.78	+2.024
3	+0.363	2	-4.42	+0.359
4	-0.640	2	-0.28	-0.640
5	+0.657	1	-5.80	+0.653
6	+1.000	1	-1.16	+0.998
7	1.650	2	+2.04	+1.652

Hãy tính độ cao xác suất nhất của các điểm P_1, P_2, P_3.

$H_A = 35.000$m; $H_B = 36.000$m

Giải:

** Số lượng phương trình điều kiện:*

$$r = n - (P - K) = 7 - (5 - 2) = 4$$

* *Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh*

Nếu kí hiệu $x_1, x_2, ..., x_7$ là giá trị bình sai của hiệu độ cao các tuyến 1,2... 7 ta có thể viết phương trình điều kiện:

$$x_1 + x_5 - x_2 = 0$$
$$x_7 - x_5 - x_6 = 0$$
$$x_4 + x_6 - x_3 = 0$$
$$x_2 - x_7 - x_4 - (H_B - H_A) = 0$$
$$h_1 + V_1 - h_2 - V_2 + h_5 + V_5 = 0$$
$$-h_5 - V_5 - h_6 - V_6 + h_7 + V_7 = 0$$
$$-h_3 - V_3 + h_4 + V_4 + h_6 + V_6 = 0$$
$$h_2 + V_2 - h_4 - V_4 - h_7 - V_7 - (H_B - H_A) = 0$$
$$V_1 - V_2 + V_5 + W_a = 0$$
$$-V_5 - V_6 + V_7 + W_b = 0$$
$$-V_3 + V_4 + V_6 + W_c = 0$$
$$V_2 - V_4 - V_7 + W_d = 0$$
$$W_a = h_1 - h_2 + h_5 = 7$$
$$W_b = -h_5 - h_6 + h_7 = -7$$
$$W_c = -h_3 + h_4 + h_6 = -3$$
$$W_d = h_2 - h_4 - h_7 - H_B + H_A = -1$$

Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh là:

$$V_1 - V_2 + V_5 + 7 = 0$$
$$-V_5 - V_6 + V_7 - 7 = 0$$
$$-V_3 + V_4 + V_6 - 3 = 0$$
$$V_2 - V_4 - V_7 - 1 = 0$$

$a_1 = +1$	$b_1 = 0$	$c_1 = 0$	$d_1 = 0$
$a_2 = -1$	$b_2 = 0$	$c_2 = 0$	$d_2 = -1$
$a_3 = 0$	$b_3 = 0$	$c_3 = -1$	$d_3 = 0$
$a_4 = 0$	$b_4 = 0$	$c_4 = +1$	$d_4 = -1$
$a_5 = +1$	$b_5 = -1$	$c_5 = 0$	$d_5 = 0$
$a_6 = 0$	$b_6 = -1$	$c_6 = 1$	$d_6 = 0$
$a_7 = 0$	$b_7 = +1$	$c_7 = 0$	$d_7 = -1$

Tính trọng số của các hiệu độ cao đo:

$$P_i = \frac{C}{S_i} \text{ chọn } C = 1$$

$$P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = \frac{1}{2}$$

$$P_4 = \frac{1}{2}, P_5 = 1, P_6 = 1, P_7 = \frac{1}{2}$$

* *Thành lập hệ phương trình chuẩn số liên hệ.*

$$\left[\frac{aa}{P}\right]K_a + \left[\frac{ab}{P}\right]K_b + \left[\frac{ac}{P}\right]K_c + \left[\frac{ad}{P}\right]K_d + W_a = 0$$

$$\left[\frac{ab}{P}\right]K_a + \left[\frac{bb}{P}\right]K_b + \left[\frac{bc}{P}\right]K_c + \left[\frac{bd}{P}\right]K_d + W_b = 0$$

$$\left[\frac{ac}{P}\right]K_a + \left[\frac{bc}{P}\right]K_b + \left[\frac{cc}{P}\right]K_c + \left[\frac{cd}{P}\right]K_d + W_c = 0$$

$$\left[\frac{ad}{P}\right]K_a + \left[\frac{bd}{P}\right]K_b + \left[\frac{cd}{P}\right]K_c + \left[\frac{dd}{P}\right]K_d + W_d = 0$$

Tính các hệ số của phương trình chuẩn

$$\left[\frac{aa}{P}\right] = \frac{1}{1}.1 + \frac{(-1)}{1}.(-1) + \frac{1}{1}.1 = 3$$

$$\left[\frac{ab}{P}\right] = \frac{1}{1}(-1) = -1$$

$$\left[\frac{ac}{P}\right] = 0$$

$$\left[\frac{ad}{P}\right] = \frac{(-1)}{1}.1 = -1$$

$$\left[\frac{bb}{P}\right] = \frac{-1}{1}.1 + \frac{-1}{2}(-1) + \frac{1}{\frac{1}{2}}(1) = 4$$

$$\left[\frac{bc}{P}\right] = \frac{-1}{1}.1 = -1$$

$$\left[\frac{bd}{P}\right] = \frac{1}{\frac{1}{2}}(-1) = -2$$

$$\left[\frac{cc}{P}\right] = \frac{-1}{1}(-1) + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{1}.1 = 5$$

$$\left[\frac{cd}{P}\right] = \frac{1}{\frac{1}{2}}(-1) = -2$$

$$\left[\frac{dd}{P}\right] = \frac{1}{1}.1 + \frac{-1}{\frac{1}{2}} + \frac{-1}{\frac{1}{2}}(-1) = 5$$

Hệ phương trình chuẩn số liên hệ là:

$$\begin{aligned}
3K_a \ - K_b \qquad\quad - K_d \ + 7 &= 0\\
-K_a + 4K_b - K_c \ - 2K_d - 7 &= 0\\
- K_b \ - 5K_c - 2K_d - 3 &= 0\\
-K_a \ - 2K_b - 2K_c + 5K_d - 1 &= 0
\end{aligned}$$

* Giải hệ phương trình chuẩn: theo phương pháp Gauss

$$K_d = +2{,}348\ ;\ K_c = 2{,}212\ ,\ K_b = 3{,}370\ ;\ K_a = -0{,}429$$

Kiểm tra số liên hệ K đã giải được thay giá trị K vào hệ phương trình chuẩn tính số hiệu chỉnh theo công thức:

$$V_i = \frac{1}{P_i}(a_iK_a + b_iK_b + c_iK_c + d_iK_d)$$

Giá trị V_i tính được ghi trong bảng.

Tính trực tiếp $[PVV] = 35{,}58$

Kiểm tra theo công thức: $[PVV] = -[WK] = 35{,}58$

Tính giá trị hiệu độ cao bình sai kết quả ghi trong bảng.

Thay các kết quả này vào phương trình điều kiện ban đầu để kiểm tra ta được:

$$x_1 + x_5 - x_2 = 1{,}359 + 0{,}653 - 2{,}012 = 0$$
$$x_7 - x_5 - x_6 = 1{,}652 + 0{,}653 - 0{,}999 = 0$$
$$x_2 - x_7 - x_4 - (H_B - H_A) = 2{,}012 - 1{,}655 + 0{,}640 - (36.000 - 35.000) = 0$$

** Đánh giá độ chính xác*

Sai số trung phương trong số đơn vị:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[PVV]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{35{,}58}{4}} = \pm 3{,}0\text{mm}$$

Độ cao xác suất của các điểm P_1, P_2, P_3:

$$H_{P1} = H_A + x_1 = 36{,}359\,(m)$$
$$H_{P2} = H_A + x_2 = 37{,}012\,(m)$$
$$H_{P3} = H_B + x_4 = 35{,}360\,(m)$$