

## CHƯƠNG 1: ÔN TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

### 1.1. Ma trận - Định thức

#### 1.1.1. Định nghĩa ma trận, các khái niệm khác liên quan

- **Định nghĩa ma trận:** Ma trận là một bảng số thực có m dòng n cột. Ma trận thường được ký hiệu bằng các chữ cái : A , B , ..., X, Y,... ; còn các phần tử (các số thực) thường được ký hiệu bằng các chữ thường : a , b , ..., x , y , ....

Phần tử hàng i (từ trên xuống), cột j (từ trái qua phải) ta ký hiệu :  $a_{ij}$  – chỉ số hàng trước, chỉ số cột sau. Các phần tử của ma trận được nằm trong dấu [ ], hoặc ( ), hoặc || , nó có dạng:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,2 & \frac{1}{4} \\ 3 & \sqrt{2} & -5 \\ \sin \frac{7\pi}{2} & 0 & e^3 \end{pmatrix} \quad A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

- Cỡ, cấp, đường chéo chính: Ma trận có m hàng và n cột thì **cỡ** của ma trận là  $m \times n$ . Khi  $m = n$  (số hàng bằng số cột) thì A gọi là **ma trận vuông cấp n**.

Cho *ma trận A vuông cấp n*. Khi đó các phần tử  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  nằm trên một đường thẳng gọi là *đường chéo chính* của A, các phần tử  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  gọi là các *phần tử chéo*.

(Chú ý : Khái niệm về đường chéo chính **chỉ có trong ma trận vuông**)

- Ma trận tam giác: trên, dưới, ma trận chéo, ma trận đơn vị

Cho ma trận A vuông cấp n:

**Ma trận tam giác trên:** Nếu A có các phần tử phía dưới đường chéo chính đều bằng 0 (tức là:  $a_{ij} = 0$  với mọi  $i > j$ ). Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -5 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

**Ma trận tam giác dưới:** Nếu A có các phần tử phía trên đường chéo chính đều bằng 0 (tức là:  $a_{ij} = 0$  với mọi  $i < j$ ). Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sin \frac{7\pi}{2} & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

***Ma trận chéo:*** Nếu A có các phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0. Ma trận chéo vừa là ma trận tam giác trên vừa là ma trận tam giác dưới. Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

***Ma trận đơn vị:*** là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.

Ký hiệu:  $I_n$  là ma trận đơn vị cấp n. Ví dụ:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận chuyển vị, ma trận đối xứng:

Ma trận A vuông cấp n gọi là ***ma trận đối xứng*** nếu  $a_{ij} = a_{ji}$ , với mọi  $i, j = 1...n$  (các cặp phần tử đối xứng qua đường chéo chính thì bằng nhau). Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} -1 & 20 & 10 \\ 20 & \sqrt{2} & -5 \\ 10 & -5 & e^3 \end{pmatrix}$$

Cho A là ma trận cỡ  $m \times n$ . ***Ma trận chuyển vị*** của A là ma trận cỡ  $n \times m$  có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột, chuyển cột thành hàng, ký hiệu  $A^T$ . Ví dụ:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

***Nhận xét:*** A là ma trận đối xứng khi và chỉ khi  $A = A^T$ .

- Ma trận con

Ma trận B gọi là **ma trận con** của A nếu B có được từ A bằng cách bỏ đi một số hàng, một số cột. Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ bỏ đi hàng 2 cột 3 ta được ma trận con } B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ma trận hàng:** Là ma trận chỉ có một hàng:  $A_{1 \times n} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$

**Ma trận cột.** Là ma trận chỉ có một cột:  $B_{m \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

### 1.1.2. Các phép toán trên ma trận

- Phép bằng nhau: Hai ma trận gọi là bằng nhau nếu chúng **cùng cỡ (cùng cấp)** và các phần tử tương ứng ở cùng vị trí thì bằng nhau. Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = B \Leftrightarrow a = 0, b = 4, c = 2, d = -1$$

- Phép cộng, trừ: Cho A và B là hai ma trận **cùng cỡ**  $m \times n$ ,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ . Tổng của hai ma trận A và B là ma trận cùng cỡ  $A+B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ . Tương tự, hiệu của 2 ma trận là  $A-B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$

Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A-B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$$

**Cộng (hoặc trừ) hai ma trận cùng cỡ: ta cộng (hoặc trừ) các phần tử ở vị trí tương ứng với nhau.**

**Tính chất.**

Giả sử A, B, C là các ma trận cùng cỡ. Khi đó:

$$1) A + B = B + A$$

$$2) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$3) A + \theta = \theta + A = A$$

$$4) A + (-A) = (-A) + A = \theta$$

- Phép nhân ma trận với một số thực: Cho ma trận  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  và số thực  $k$ . Khi đó, tích của số thực  $k$  với ma trận  $A$  là ma trận  $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$ .  
(*Tức là: muốn thực hiện phép nhân ma trận với một số thực  $k$ , ta nhân tất cả các phần tử của ma trận với  $k$ .*)

**Ví dụ:**  $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

### Tính chất

Giả sử  $A, B$  là các ma trận cùng cỡ và  $k, t$  là các số thực bất kì. Khi đó:

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + t)A = kA + tA$
- $k(tA) = kt(A)$
- $1.A = A$
- $0.A = \theta$
- Phép nhân 2 ma trận: Cho hai ma trận  $A = (a_{ij})_{m \times p}$  và  $B = (b_{ij})_{p \times n}$  (số cột của ma trận  $A$  bằng số hàng của ma trận  $B$ ). Khi đó, tích của hai ma trận  $A$  và  $B$  là ma trận  $C = (c_{ij})_{m \times n}$  trong đó: 
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

**Ví dụ:**

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 9) = (13)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

### Tính chất

- Phép nhân hai ma trận nói chung không có tính chất giao hoán.

- $A ( B + C ) = AB + AC$
- $( A + B ) C = AC + BC$
- $( AB )C = A ( BC )$
- $( kA ) B = A ( kB ) = k ( AB )$
- $AI = IA = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$

- Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận:
  1. Đổi chỗ hai hàng (hai cột) cho nhau.

2. Nhân một hàng (một cột) với một số khác không.

3. Nhân một hàng (một cột) với một số rồi đem cộng vào một hàng khác (cột khác).

**Chú ý:** Các phép biến đổi sơ cấp của ma trận đóng vai trò rất quan trọng khi tính định thức, khi giải hệ phương trình đại số tuyến tính...

### 1.1.3. Định thức

- Định nghĩa: Cho ma trận vuông cấp  $n$ :  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ .  
Kí hiệu  $M_{ij}$  là ma trận con cấp  $(n - 1)$  có được từ ma trận  $A$  khi bỏ đi hàng  $i$ , cột  $j$ .

( khi đó  $M_{ij}$  được gọi là ma trận con của  $A$  ứng với phần tử  $a_{ij}$  )

**Ví dụ:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Khi đó, **định thức cấp  $n$  của ma trận vuông**  $A$ , kí hiệu là:  $\det(A)$  hay  $|A|$ , là một số thực được định nghĩa một cách qui nạp như sau:

a) **Định thức cấp 2.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b) **Định thức cấp 3 :**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

c) *Định thức cấp n:*

- Công thức khai triển định thức theo hàng thứ  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\det(A) = |A| = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(M_{in})$$

- Công thức khai triển định thức theo cột thứ  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$$\det(A) = |A| = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(M_{nj})$$

Trong đó  $M_{ij}$  là ma trận vuông con cấp  $(n - 1)$  có được từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $i$ , cột thứ  $j$ .

**Ví dụ:**

*Khai triển theo hàng 2:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 36 = -36$$

- Các tính chất cơ bản của định thức:

**Tính chất 1:**  $\det(A) = \det(A^T)$

**Hệ quả:** Mọi tính chất của định thức nếu đúng cho hàng thì cũng đúng cho cột và ngược lại.

**Tính chất 2:** Đổi chỗ hai hàng (hai cột) của định thức cho nhau thì định thức đổi dấu.

**Tính chất 3:** Khi nhân các phần tử của một hàng (một cột) với cùng một số  $k$  thì định thức được nhân lên  $k$  lần.

**Hệ quả.** Nếu các phần tử của một hàng (một cột) có thừa số chung thì có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

**Tính chất 4:** Khi tất cả các phần tử của một hàng (một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng của hai định thức như sau:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**Tính chất 5:** Định thức của ma trận sẽ bằng không nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau:

- Có một hàng (một cột) gồm toàn là số không.
- Có hai hàng (hai cột) giống nhau.
- Có một hàng (một cột) là **tổ hợp tuyến tính** của các hàng khác (cột khác):

(Đại lượng  $a$  là tổ hợp tuyến tính của các đại lượng  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , nếu tồn tại  $n$  số thực  $k_1, k_2, \dots, k_n$  để cho  $a = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n$ )

**Tính chất 6:** Định thức của ma trận sẽ không thay đổi nếu nhân  $k$  vào một hàng (một cột) rồi đem cộng vào một hàng khác (cột khác).

**Tính chất 7:** Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo

**Tính chất 8:** Nếu  $A, B$  là hai ma trận vuông cấp  $n$  thì  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

• **Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp**

**Biến đổi sơ cấp**

1. Nhân một hàng với một số  $k \neq 0$

2. Đổi chỗ 2 hàng

3. Nhân  $k$  với hàng  $x$  rồi đem cộng vào hàng  $y$

**Tác dụng**

Định thức nhân  $k$

Định thức đổi dấu

Định thức không đổi

**Nhận xét :** Nếu tính định thức bằng việc sử dụng công thức khai triển theo hàng (hay cột) thì khối lượng tính sẽ rất lớn ( khi  $n \geq 4$  ). Vì vậy ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận để đưa ma trận về dạng tam giác, khi đó định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên chéo chính. Các bước tính định thức như sau:

**Bước 1:** Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức về dạng định thức ma trận tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của các phép biến đổi sơ cấp được sử dụng.

**Bước 2:** Tính giá trị định thức dạng tam giác và kể cả tác dụng tổng hợp của các phép biến đổi sơ cấp để sử dụng.

#### 1.1.4. Phần phụ đại số của một phần tử, ma trận phụ hợp

Cho ma trận  $A$  vuông cấp  $n$ . Đặt:

- $M_{ij}$  là ma trận có được từ ma trận  $A$  khi bỏ đi hàng  $i$ , cột  $j$
- $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$   
 $A_{ij}$  gọi là **phần phụ đại số** của phần tử  $a_{ij}$ .

**Ma trận phụ hợp** của ma trận  $A$  là ma trận  $\tilde{A} = (A_{ij})^T$  với  $A_{ij}$  là phần phụ đại số của phần tử  $a_{ij}$  trong ma trận  $A$ .

**Ví dụ :** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**Giải:**

Tìm các phần phụ đại số:  $A_{11} = 4$ ,  $A_{12} = -3$ ,  $A_{21} = -2$ ,  $A_{22} = 1$ .

Suy ra ma trận phụ hợp của  $A$  là:  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

**Ghi nhớ :** Nếu  $A$  là ma trận vuông **cấp 2** thì ma trận phụ hợp của  $A$  là  $\tilde{A}$  sẽ có được từ  $A$  khi các phần tử **chéo chính đổi chỗ**, các phần tử **chéo phụ đổi dấu**.

**Ví dụ :** Tìm ma trận phụ hợp của ma trận sau  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

**Giải:**



$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, A_{12} = 38, A_{13} = -27, \dots$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

### 1.1.5. Ma trận nghịch đảo

- Định nghĩa ma trận nghịch đảo:

Cho  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ . Nghịch đảo của ma trận  $A$  (nếu tồn tại) là một ma trận vuông cấp  $n$  được ký hiệu là  $A^{-1}$ , sao cho  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$  (trong đó  $I_n$  là ma trận đơn vị cấp  $n$ ), khi đó nói rằng ma trận  $A$  là **khả đảo**.

#### Tính chất:

Nếu  $A$  có ma trận nghịch đảo là  $A^{-1}$  thì  $A^{-1}$  cũng khả đảo và nghịch đảo của  $A^{-1}$  là  $(A^{-1})^{-1} = A$

Nghịch đảo của một ma trận vuông nếu có là duy nhất.

Nếu  $A$  và  $B$  đều có nghịch đảo thì:

$$+) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$+) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$+) (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

- Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo

**Định lý:** Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông khả đảo là định thức của nó khác không.

- Cách tìm ma trận nghịch đảo: dùng ma trận phụ hợp và phương pháp Gauss – Jordan

**Phương pháp ma trận phụ hợp.**

**Định lý:** Nếu ma trận vuông  $A$  có  $\det(A) \neq 0$  thì  $A$  có ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$  được tính bởi

$$\text{công thức: } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

**Ví dụ:** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

**Giải:** Có  $\det(A) = 4 - 6 = -2$

**Chú ý:** Phương pháp này được áp dụng để tìm ma trận nghịch đảo của những ma trận cấp nhỏ (cấp  $n \leq 3$ ).

Để tìm ma trận nghịch đảo của A ta làm như sau:

- Ví dụ :** Tìm ma trận nghịch đảo của  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  theo phương pháp Gauss – Jordan.

Hàng thứ 1:                    1 2 3                    1 0 0

Hàng thứ 2:                      2 5 3                      0 1 0

Hàng thứ 3:                    1 0 8            0 0 1

Hàng thứ 1:                    1 2 3        1 0 0

$$(-2) \times \text{hàng 1} + \text{hàng 2} \quad 0 \ 1 \ -3 \quad -2 \ 1 \ 0$$
$$(-1) \times \text{hàng } 1 + \text{hàng } 3 \quad 0 \ -2 \ 5 \quad -1 \ 0 \ 1$$

|            |       |       |
|------------|-------|-------|
| Hàng thứ 1 | 1 2 3 | 1 0 0 |
|------------|-------|-------|

|            |        |        |
|------------|--------|--------|
| Hàng thứ 2 | 0 1 -3 | -2 1 0 |
|------------|--------|--------|

$$(2) * \text{hàng } 2 + \text{hàng } 3 \quad \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \begin{array}{cc} -1 & -5 \end{array} \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array}$$

|            |        |        |
|------------|--------|--------|
| Hàng thứ 1 | 1 2 3  | 1 0 0  |
| Hàng thứ 2 | 0 1 -3 | -2 1 0 |
| Hàng thứ 3 | 0 0 -1 | -5 2 1 |

|                          |        |          |
|--------------------------|--------|----------|
| ( 3 ) * hàng 3 + hàng 1  | 1 2 0  | -14 6 3  |
| ( -3 ) * hàng 3 + hàng 2 | 0 1 0  | 13 -5 -3 |
| Hàng 3                   | 0 0 -1 | -5 2 1   |

|                          |        |          |
|--------------------------|--------|----------|
| ( -2 ) * hàng 2 + hàng 1 | 1 0 0  | -40 16 9 |
| Hàng 2                   | 0 1 0  | 13 -5 -3 |
| Hàng 3                   | 0 0 -1 | -5 2 1   |

|                   |       |          |
|-------------------|-------|----------|
| ( 1 ) * hàng 1    | 1 0 0 | -40 16 9 |
| ( 1 ) * hàng 2    | 0 1 0 | 13 -5 -3 |
| ( 1/-1 ) * hàng 3 | 0 0 1 | 5 -2 -1  |

$$\text{Vậy } A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Chú ý:** Phương pháp này đặc biệt hiệu quả đối với ma trận cấp  $\geq 4$ .

- **Ứng dụng ma trận nghịch đảo giải phương trình ma trận**

**Bài toán 1:** Tìm ma trận X thỏa mãn  $AX = B$  biết  $\det(A) \neq 0$

Phương pháp: Do  $\det(A) \neq 0$  nên tồn tại  $A^{-1}$ . Nhân vào bên trái cả hai vế của phương trình với  $A^{-1}$ , ta được:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow I X = X = A^{-1}B \text{ do đó } X = A^{-1}B.$$

**Bài toán 2:** Tìm ma trận  $X$  thỏa mãn  $XA = B$  biết  $\det(A) \neq 0$

Tương tự như trên, nhân vào bên phải cả hai vế với ma trận  $A^{-1}$ , do đó  $X = BA^{-1}$ .

**Ví dụ:** Giải phương trình ma trận:  $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

### 1.1.6. Hạng của ma trận

- Định nghĩa: Hạng của ma trận  $A$  là **cấp cao nhất của các ma trận con (của  $A$ ) có định thức khác không.**

- **Ma trận hình thang**

Khái niệm về hàng không và hàng khác không :

- Hàng không là hàng có tất cả các phần tử đều bằng 0
- Hàng khác không là hàng có ít nhất một phần tử khác 0

**Định nghĩa:** Ma trận hình thang là ma trận thỏa mãn 2 tính chất sau:

- Các hàng khác không luôn ở phía trên các hàng không.
- Phần tử khác không đầu tiên ở hàng thứ  $i$  (kể từ trái sang phải) phải là ở cột thứ  $i$ .

**Hạng của ma trận hình thang** bằng số hàng khác không của nó.

- Phương pháp tìm hạng của ma trận
  - Dùng các phép biến đổi sơ cấp, đưa ma trận về dạng ma trận hình thang.
  - Khi đó hạng của ma trận sẽ bằng hạng ma trận hình thang và bằng số hàng khác không của ma trận hình thang.

**Ví dụ** : Tìm hạng của ma trận :  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 9 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Hàng thứ 1                      1 2 5 -1 3

Hàng thứ 2                      2 3 -1 4 2

Hàng thứ 3                      4 7 9 2 1

Hàng thứ 4                      -1 0 3 2 1

|                          |                |
|--------------------------|----------------|
| Hàng thứ 1               | 1 2 5 -1 3     |
| ( -2 ) * hàng 1 + hàng 2 | 0 -1 -11 6 -4  |
| ( -4 ) * hàng 1 + hàng 3 | 0 -1 -11 6 -11 |
| ( 1 ) * hàng 1 + hàng 4  | 0 2 8 1 4      |

|                          |               |
|--------------------------|---------------|
| Hàng thứ 1               | 1 2 5 -1 3    |
| hàng 2                   | 0 -1 -11 6 -4 |
| ( -1 ) * hàng 2 + hàng 3 | 0 0 0 0 -7    |
| ( 2 ) * hàng 2 + hàng 4  | 0 0 -14 13 -4 |

|            |               |
|------------|---------------|
| Hàng thứ 1 | 1 2 5 -1 3    |
| hàng 2     | 0 -1 -11 6 -4 |
| hàng 4     | 0 0 -14 13 -4 |
| hàng 3     | 0 0 0 0 -7    |

|            |               |
|------------|---------------|
| Hàng thứ 1 | 1 2 5 3 -1    |
| hàng 2     | 0 -1 -11 -4 6 |
| hàng 3     | 0 0 -14 -4 13 |
| hàng 4     | 0 0 0 -7 0    |

**Kết luận: Hạng của ma trận A bằng 4**

## 1.2. Hệ phương trình tuyến tính

### 1.2.1. Định nghĩa

- Định nghĩa : Hệ phương trình đại số tuyến tính (PTTT) gồm m phương trình, n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

Trong đó

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các ẩn số cần tìm
- $a_{ij}, b_i$  là các số thực  $i = 1..m, j = 1..n$ .
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  gọi là *ma trận hệ số* của hệ (I).
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  gọi là *ma trận ẩn*;  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  gọi là *ma trận vế phải*
- $\bar{A} = [A | B] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$  gọi là *ma trận bổ sung* của hệ (I).

Bằng phép nhân ma trận, hệ phương trình (I) được viết ở dạng ma trận như sau:

$$AX = B \quad (II)$$

Dạng (II) gọi là **dạng ma trận** của hệ (I).

- Nếu  $B = \theta$  (tức là:  $b = 0, \forall i = 1..m$ ) thì hệ (II) gọi là **hệ thuần nhất**. Nếu có ít nhất một  $b_i \neq 0$  thì hệ (II) gọi là **hệ không thuần nhất**.
- Nếu A là ma trận vuông (tức số phương trình bằng số ẩn) thì hệ (I) và (II) gọi là **hệ vuông**.
- Định nghĩa: **Nghiệm** của hệ (I) là một *bộ gồm n số thực*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sao cho thoả mãn tất cả các phương trình của hệ.

**Nhận xét:** Hệ thuần nhất  $AX = \theta$  luôn có nghiệm không:  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ .

Nghiệm này gọi là *nghiệm tầm thường*. Các nghiệm khác nghiệm tầm thường gọi là *nghiệm không tầm thường*.

### 1.2.2. Điều kiện cần và đủ để hệ PTTT tồn tại nghiệm

- Định lý về điều kiện cần và đủ để tồn tại nghiệm:

**Định lý Kronecker - Capelli:** Điều kiện cần và đủ để hệ phương trình  $AX = B$  có nghiệm là hạng  $A = \text{hạng } \overline{A}$

- Biện luận các trường hợp hệ PT vô nghiệm, tồn tại nghiệm, duy nhất nghiệm

**Biện luận hệ phương trình đại số tuyến tính  $AX = B$**

a) Nếu hạng  $A \neq \text{hạng } \overline{A}$  thì hệ vô nghiệm.

b) Nếu hạng  $A = \text{hạng } \overline{A}$  thì hệ có nghiệm:

- Nếu hạng  $A = \text{hạng } \overline{A} = n$  (số ẩn) thì hệ có nghiệm duy nhất.
- Nếu hạng  $A = \text{hạng } \overline{A} < n$  (số ẩn) thì hệ có vô số nghiệm.

**Chú ý:**

- Trường hợp nếu hạng  $A = \text{hạng } \overline{A} = n$  (số ẩn) thì hệ đưa được về dạng hệ vuông  $AX = B$  với  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$  và  $\det(A) \neq 0$ . Hệ có tên là hệ Cramer, có duy nhất nghiệm.
- Hệ quả: Hệ vuông thuần nhất  $AX = 0$  có nghiệm không tầm thường (khác  $0$ ) khi và chỉ khi **định thức ma trận hệ số bằng không**.

### 1.2.3. Hệ Cramer và phương pháp giải:

- Định nghĩa hệ Cramer  
Hệ phương trình đại số tuyến tính  $AX = B$  là một hệ vuông, thỏa mãn điều kiện  $\det(A) \neq 0$  thì được gọi là hệ Cramer.

**Tính chất:**

Hệ Cramer  $AX = B$  luôn có nghiệm duy nhất xác định bởi công thức  $X = A^{-1} B$ .

- Các phương pháp giải: Phương pháp Cramer, phương pháp dùng ma trận nghịch đảo, Phương pháp Gauss

***Phương pháp Cramer:***

**Định lý Cramer:** Hệ Cramer  $AX = B$  ( $A$  là ma trận vuông cấp  $n$ ) có nghiệm:  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  với các thành phần ẩn  $x_i$  được xác định bởi công thức:  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, i = \overline{1..n}$  với  $A_i$  là ma trận có được từ  $A$  bằng cách thay cột thứ  $i$  của  $A$  bởi cột ma trận vế phải  $B$ .

**Chú ý:** Phương pháp thường sử dụng để giải cho hệ 2 hoặc 3 phương trình

**Ví dụ:** Giải hệ phương trình sau 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

**Giải:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7; |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7; |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7; |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -1; x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 1$$

**Phương pháp dùng ma trận nghịch đảo.**

Xét hệ Cramer  $AX = B$ . Vì  $\det A \neq 0$  nên  $A$  có ma trận nghịch đảo  $A^{-1}$ . Do vậy từ  $AX = B \Rightarrow A^{-1}A X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ . Vậy  $X = A^{-1}B$ .

**Ví dụ :** Giải hệ sau theo phương pháp ma trận nghịch đảo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 17 \end{cases}$$

**Giải hệ Cramer  $AX = B$  bằng phương pháp Gauss.**

Thực hiện các bước sau

**Bước 1:** Viết ma trận bổ sung  $(A | B)$ .

**Bước 2:** Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp **trên hàng lên A và B** để đưa phần ma trận A về dạng tam giác  $\rightarrow$  về dạng chéo  $\rightarrow$  về dạng đơn vị, khi đó  $B \rightarrow B'$  sẽ là nghiệm X.

$$(A | B) \rightarrow \dots \rightarrow (I_n | X)$$

**Ví dụ:** Giải hệ 
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$



**Giải:**

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-2h_1+h_3}]{\substack{-3h_1+h_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -13/2 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3h_2+h_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -13/2 & -8 \\ 0 & 0 & -29/10 & -29/5 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[\substack{(13/2)h_3+h_2}]{\substack{(10/-29)h_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{(1/-5)h_2}]{-4h_2+h_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(1/2)h_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ là  $(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2)$

#### 1.2.4. Hệ phương trình tổng quát:

Phương pháp Gauss cho hệ có vô số nghiệm (dùng các phép biến đổi sơ cấp của ma trận trên hàng)

#### 1.3. Miền nghiệm của hệ: (đọc thêm tài liệu)

## CHƯƠNG 2: QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

### 2.1. Các bài toán thực tế đến bài toán quy hoạch tuyến tính:

Ví dụ 1. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho một bánh mỗi loại; lượng dự trữ nguyên liệu; tiền lãi cho một bánh mỗi loại được cho trong bảng sau:

| Nguyên liệu | Bánh đậu xanh | Bánh thập cẩm | Bánh dẻo | Lượng dự trữ |
|-------------|---------------|---------------|----------|--------------|
| Đường       | 0,04 kg       | 0,06 kg       | 0,05 kg  | 500 kg       |
| Đậu         | 0,07 kg       | 0 kg          | 0,02 kg  | 300 kg       |
| Lãi         | 3 ngàn        | 2 ngàn        | 2,5 ngàn |              |

Hãy lập mô hình bài toán tìm số lượng mỗi loại bánh cần sản xuất sao cho không bị động về nguyên liệu mà lãi đạt được cao nhất.

Giải: Gọi  $x_1, x_2, x_3$  lần lượt là số bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo cần sản xuất. Điều kiện:  $x_j \geq 0 (j=1,2,3)$ . Khi đó:

1. Tiền lãi thu được là:  $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3$  (ngàn)

2. Lượng đường được sử dụng là:  $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3$  (kg)

Ta phải có  $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500$

3. Lượng đậu được sử dụng là:  $0,07x_1 + 0,02x_3$  (kg)

Ta phải có  $0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300$

Vậy ta có mô hình bài toán:

$$(1) \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \text{Max}$$

Với điều kiện:

$$(2) \quad \begin{cases} 0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500 \\ 0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1,2,3)$$

Ta nói đây là một bài toán quy hoạch tuyến tính 3 ẩn tìm Max của hàm mục tiêu  $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3$

Ví dụ 2. Ta cần vận chuyển vật liệu xây dựng từ 2 kho  $A_1$  và  $A_2$  đến 3 công trường xây dựng  $B_1, B_2, B_3$ . Tổng số vật liệu có ở mỗi kho, tổng số vật liệu yêu cầu ở mỗi công trường, cũng như khoảng cách từ mỗi kho đến mỗi công trường được cho trong bảng sau:

| CT \ Kho | B1               | B2               | B3               |
|----------|------------------|------------------|------------------|
|          | 15T              | 25T              | 20T              |
| A1: 20T  | 5 km<br>$x_{11}$ | 2 km<br>$x_{12}$ | 3 km<br>$x_{13}$ |
| A2: 40T  | 4 km<br>$x_{21}$ | 3 km<br>$x_{22}$ | 1 km<br>$x_{23}$ |

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho:

- Các kho giải phóng hết hàng;
- Các công trường nhận đủ vật liệu cần thiết;
- Tổng số T (tấn) \* km phải thực hiện là nhỏ nhất.

Giải: Gọi  $x_{ij}$  là số tấn vật liệu sẽ vận chuyển từ kho  $A_i$  đến công trường  $B_j$ . Điều kiện:

$x_{ij} \geq 0 (i=1, 2; j=1, 2, 3)$ . Khi đó:

1. Tổng số T \* km phải thực hiện là:

$$f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23}$$

2. Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển từ kho  $A_1$  đến các công trường là  $x_{11} + x_{12} + x_{13}$

Để giải phóng hết vật liệu, ta phải có  $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20$

3. Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển từ kho  $A_2$  đến các công trường là  $x_{21} + x_{22} + x_{23}$

Để giải phóng hết vật liệu, ta phải có  $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$

4. Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển về công trường B<sub>1</sub> là  $x_{11} + x_{21}$

Để B<sub>1</sub> nhận đủ vật liệu, ta phải có  $x_{11} + x_{21} = 15$

5. Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển về công trường B<sub>2</sub> là  $x_{12} + x_{22}$

Để B<sub>2</sub> nhận đủ vật liệu, ta phải có  $x_{12} + x_{22} = 25$

6. Tổng số tấn vật liệu được vận chuyển về công trường B<sub>3</sub> là  $x_{13} + x_{23}$

Để B<sub>3</sub> nhận đủ vật liệu, ta phải có  $x_{13} + x_{23} = 20$

Vậy ta có mô hình bài toán:

$$(1) \quad f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23} \rightarrow \text{Min}$$

Với điều kiện:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40 \\ x_{11} + x_{21} = 15 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 20 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_{ij} \geq 0 (i=1, 2; j=1, 2, 3)$$

Ta nói đây là một bài toán quy hoạch tuyến tính 6 ẩn tìm Min của hàm mục tiêu

$$f(x) = 5x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 3x_{22} + x_{23}$$

## 2.2. Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính:

### 2.2.1. Dạng tổng quát của bài toán QHTT:

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}(\text{Max})$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i \in I_1) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i \in I_2) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, (i \in I_3) \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j \in J_1); \quad x_j \leq 0 (j \in J_2); \quad x_j \text{ tùy ý } (j \in J_3)$$

Trong đó:

- ✓  $f(x)$  là hàm mục tiêu
- ✓  $I_1, I_2, I_3$  rời nhau và  $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \dots, m\}$
- ✓  $J_1, J_2, J_3$  rời nhau và  $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \dots, n\}$
- ✓  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ : Ma trận hệ số ràng buộc
- ✓  $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ : Véc tơ các hệ số tự do
- ✓  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ : Véc tơ hệ số các ẩn trong hàm mục tiêu
- ✓  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ : Véc tơ các ẩn số

Khi đó:

- Mỗi véc tơ  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa (2) và (3) được gọi là một **phương án** (PA) của bài toán.
- Mỗi phương án  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa (1), nghĩa là tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) trên tập các phương án, được gọi là một **phương án tối ưu** (PATU) của bài toán.
- Giải một bài toán QHTT là đi tìm một PATU của nó hoặc chỉ ra rằng bài toán vô nghiệm, nghĩa là không có PATU.

### 2.2.2. Dạng chính tắc của bài toán QHTT

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}(\text{Max})$$

$$(2) \quad \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i = \overline{1, m}) \right.$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$$

**Nhận xét:** Bài toán QHTT **dạng chính tắc** là bài toán **dạng tổng quát**, trong đó:

- ✓ Các ràng buộc đều là phương trình.
- ✓ Các ẩn đều không âm.

Ví dụ: Bài toán sau có dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 12 \\ 12x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 4})$$

### 2.2.3. Dạng chuẩn của bài toán QHTT

Bài toán QHTT dạng chuẩn là bài toán có dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}(\text{Max})$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i = \overline{1, m}) \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$$

Trong đó:

- ✓ Các hệ số tự do  $b_1, b_2, \dots, b_m$  đều không âm.
- ✓ Trong ma trận hệ số ràng buộc  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  có đầy đủ  $m$  vectơ cột đơn vị  $e_1, e_2, \dots, e_m$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

- Các ẩn ứng với các vectơ cột đơn vị được gọi là các ẩn cơ bản. Cụ thể ẩn ứng với vectơ cột đơn vị  $e_k$  là **ẩn cơ bản thứ  $k$** .
- Một phương án mà các ẩn không cơ bản đều bằng 0 được gọi là một **phương án cơ bản**.
- Một phương án cơ bản có đầy đủ  $m$  thành phần dương (nghĩa là mọi ẩn cơ bản đều dương) được gọi là **không suy biến**. Ngược lại, một phương án cơ bản có ít hơn  $m$  thành phần dương (nghĩa là có ít nhất một ẩn cơ bản bằng 0) được gọi là **suy biến**.

Ví dụ: Xét bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 + 4x_6 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 12 \\ 12x_1 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 6})$$

Ta thấy bài toán trên đã có dạng chính tắc, hơn nữa:

- ✓ Các hệ số tự do  $b_1 = 12, b_2 = 3, b_3 = 6$  đều không âm.
- ✓ Ma trận hệ số ràng buộc A là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

có chứa đầy đủ 3 vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 5),  $e_2$  (cột 6),  $e_3$  (cột 2).

Do đó, bài toán có dạng chuẩn, trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_5$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_6$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_2$

**Nhận xét:** Trong bài toán trên, khi cho ẩn cơ bản thứ  $k$  = hệ số tự do thứ  $k$ , còn các ẩn cơ bản = 0, nghĩa là:

$$x_5 = 12, x_6 = 3, x_2 = 6; x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$$

ta được một phương án cơ bản của bài toán:

$$x = (0, 6, 0, 0, 12, 3)$$

Phương án này không suy biến vì có đủ 3 thành phần dương. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

❖ **Chú ý:** Tổng quát, trong bài toán QHTT dạng chuẩn bất kỳ, khi cho ẩn cơ bản thứ  $k$  = hệ số tự do thứ  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), còn các ẩn không cơ bản bằng 0, ta được một phương án cơ bản của bài toán. Ta gọi đây là *phương án cơ bản ban đầu* của bài toán.

## 2.3. Biến đổi dạng bài toán QHTT

### 2.3.1. Dạng tổng quát $\rightarrow$ Dạng chính tắc

Ta có thể biến đổi bài toán QHTT dạng tổng quát về dạng chính tắc như sau:

1. Khi gặp ràng buộc dạng

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

Ta đưa vào **ẩn phụ**  $x_{n+1} \geq 0$  để biến về phương trình

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$$

2. Khi gặp ràng buộc dạng

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$$

Ta đưa vào **ẩn phụ**  $x_{n+1} \geq 0$  để biến về phương trình

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$$

3. Khi gặp ẩn  $x_j \leq 0$ , ta đổi biến  $x_j = -x_j'$  với  $x_j' \geq 0$
4. Khi gặp ẩn  $x_j$  tùy ý, ta đổi biến  $x_j = x_j' - x_j''$  với  $x_j' \geq 0; x_j'' \geq 0$

**Chú ý:** Các ẩn phụ là các ẩn không âm và hệ số của các ẩn phụ đó trong hàm mục tiêu là 0.

❖ **Mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán phụ:**

| BÀI TOÁN PHỤ | BÀI TOÁN GỐC                |
|--------------|-----------------------------|
| Vô nghiệm    | Vô nghiệm                   |
| Có PATU      | Có PATU bằng cách bỏ ẩn phụ |

Ví dụ: Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \text{Max}$$



$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 \geq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2 \leq 0$$

Giải:

- Đưa vào ẩn phụ  $x_4 \geq 0$  để biến bất phương trình

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50$$

về phương trình  $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 50$

- Đưa vào ẩn phụ  $x_5 \geq 0$  để biến bất phương trình

$$7x_1 + x_3 \geq 30$$

về phương trình  $7x_1 + x_3 - x_5 = 30$

- Đổi biến  $x_2 = -x_2'$  với  $x_2' \geq 0$
- Đổi biến  $x_3 = x_3' - x_3''$  với  $x_3' \geq 0; x_3'' \geq 0$

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2' + 2,5(x_3' - x_3'') \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 + 6x_2' + 5(x_3' - x_3'') + x_4 = 50 \\ 7x_1 + (x_3' - x_3'') - x_5 = 30 \\ 2x_1 - 3x_2' - 5(x_3' - x_3'') = -25 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2' \geq 0; x_3' \geq 0; x_3'' \geq 0; x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

### 2.3.2. Dạng chính tắc $\rightarrow$ Dạng chuẩn

Từ bài toán QHTT dạng chính tắc ta có thể xây dựng bài toán QHTT mở rộng có dạng chuẩn như sau:

1. Khi gặp hệ số tự do  $b_i \leq 0$  ta đổi dấu hai vế của ràng buộc thứ  $i$ .
2. Khi ma trận hệ số ràng buộc  $A$  không chứa vectơ cột đơn vị thứ  $k$  là  $e_k$ , ta đưa vào ẩn giả  $x_{n+k} \geq 0$  và cộng thêm **ẩn giả**  $x_{n+k}$  vào vế trái của phương trình ràng buộc thứ  $k$  để được phương trình ràng buộc mới:

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j + x_{n+k} = b_k$$

3. Hàm mục tiêu mở rộng được xây dựng từ hàm mục tiêu  $f(x)$  ban đầu như sau:

- Đối với bài toán **Min**

$$f(x) + M (\sum \text{ân giả})$$

- Đối với bài toán **Max**

$$f(x) - M (\sum \text{ân giả})$$

Trong đó:  $M$  là đại lượng dương rất lớn (lớn hơn bất kỳ số nào cho trước).

**Chú ý:** Các ân giả là các ân không âm và hệ số của các ân giả đó trong hàm mục tiêu là  $-M$  (hay  $+M$ ) nếu là bài toán cực đại (hay cực tiểu). Trong đó:  $M$  là đại lượng dương rất lớn (lớn hơn bất kỳ số nào cho trước).

#### ❖ Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng

Mối quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng như sau:

| BÀI TOÁN MỞ RỘNG |                             | BÀI TOÁN XUẤT PHÁT           |
|------------------|-----------------------------|------------------------------|
| Vô nghiệm        |                             | Vô nghiệm                    |
| Có nghiệm        | Mọi ân giả = 0              | Có PATU bằng cách bỏ ân giả  |
|                  | Có ít nhất một ân giả $> 0$ | Vô nghiệm do không có PA nào |

Ví dụ 1: Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 4)$$

Giải:

Bài toán trên đã có dạng chính tắc, trong đó vế phải của phương trình ràng buộc thứ ba là  $-25 < 0$ . Đổi dấu hai vế của phương trình này ta được:

$$-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25$$

và (2) trở thành

$$(2') \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

Mã trận hệ số ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Vì A còn thiếu 2 vectơ cột đơn vị là  $e_1$  và  $e_3$  nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

- Lập các ẩn giả  $x_5 \geq 0; x_6 \geq 0$  và xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau:

$$(1') \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2') \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6)$$

Ví dụ 2: Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 4)$$

Ta xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_6 = -25 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6)$$

❖ **Chú ý:**

- Ẩn phụ: *Dạng tổng quát*  $\rightarrow$  *Dạng chính tắc*
- Ẩn giả: *Dạng chính tắc*  $\rightarrow$  *Dạng chuẩn*
- **Ẩn giả** được đưa vào một cách “giả tạo” cốt để ma trận hệ số ràng buộc có chứa đủ vectơ cột đơn vị, nó chỉ được cộng hình thức vào vế trái của phương trình ràng buộc và tạo nên một phương trình ràng buộc mới. Trong khi **ẩn phụ** biến một bất phương trình thành phương trình theo đúng logic toán học.
- Trong hàm mục tiêu mở rộng, **hệ số của các ẩn giả** đều bằng M (đối với bài toán Min) hoặc đều bằng  $-M$  (đối với bài toán Max). Trong khi **hệ số của các ẩn phụ** đều bằng 0 trong hàm mục tiêu.

Ví dụ: Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 \leq 50 \\ -6x_3 + 2x_4 = -120 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -45 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 4)$$

Giải:

Trước hết ta đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào 2 ẩn phụ  $x_5 \geq 0; x_6 \geq 0$

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ -6x_3 + 2x_4 = -120 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_6 = -45 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6)$$

Bài toán trên chưa có dạng chuẩn.

Ta thấy các vế phải của các phương trình ràng buộc thứ 2 và thứ 3 đều âm nên bằng cách đổi dấu hai vế của các phương trình này ta được:

$$(2) \quad \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ 6x_3 - 2x_4 = 120 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Vì  $A$  còn thiếu 1 vectơ cột đơn vị là  $e_2$  nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

- Lập các ẩn giả  $x_7 \geq 0$  và xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau:

$$(1') \quad f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_7 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2') \quad \begin{cases} -9x_2 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ 6x_3 - 2x_4 + x_7 = 120 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 7)$$

#### 2.4. Phương pháp hình học giải bài toán QHTT hai ẩn số:

## 2.5. Thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chuẩn:

### 2.5.1. Thuật toán giải bài toán Min:

Xét bài toán QHTT dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$$

Qua một số hữu hạn các bước sau đây ta sẽ giải được bài toán QHTT trên, nghĩa là chứng tỏ được rằng bài toán vô nghiệm hoặc chỉ ra được một phương án tối ưu của bài toán.

## Bước 1: Lập bảng đơn hình đầu tiên

Xác định các ẩn cơ bản  $1, 2, \dots, m$  lần lượt là  $x_1, x_2, \dots, x_m$  và lập bảng đơn hình đầu tiên:

| Hệ số | Ân cơ bản | Phương án | $c_1$      | ... | $c_v$        | ... | $c_n$      | $\lambda_i$   |
|-------|-----------|-----------|------------|-----|--------------|-----|------------|---------------|
|       |           |           | $x_1$      | ... | $x_v$        | ... | $x_n$      |               |
| $c_1$ | $x_1$     | $b_1$     | $a_{11}$   | ... | $a_{1v}$     | ... | $a_{1n}$   | $\lambda_r^*$ |
| ...   | ...       | ...       | ...        | ... | ...          | ... | ...        |               |
| $c_r$ | $x_r$     | $b_r$     | $a_{r1}$   | ... | $a_{rv}$     | ... | $a_{rn}$   |               |
| ...   | ...       | ...       | ...        | ... | ...          | ... | ...        |               |
| $c_m$ | $x_m$     | $b_m$     | $a_{m1}$   | ... | $a_{mv}$     | ... | $a_{mn}$   |               |
|       | $f(x)$    | $f(x^0)$  | $\Delta_1$ | ... | $\Delta_v^*$ | ... | $\Delta_n$ |               |

Trong đó:

$$f(x^0) = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_m b_m$$

$$[= (\text{cột Hệ số}) (\text{cột Phương án})]$$

$$\Delta_j = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \dots + c_m a_{mj} - c_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$[= (\text{cột Hệ số}) (\text{cột } x_j) - c_j]$$

## Bước 2: Nhận định tính tối ưu

- Nếu  $\Delta_j \leq 0 (\forall j = \overline{1, n})$ , thì phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  ( $x^0$  có thành phần thứ  $i_k$  là  $x_{i_k}^0 = b_k$ , còn các thành phần khác bằng 0) là một phương án tối ưu của bài toán Min đang xét với  $f(x) = f(x^0)$ .
- Nếu tồn tại  $\Delta_j > 0$  đến đây xảy ra 2 trường hợp:  
 TH1: Nếu tồn tại  $\Delta_j > 0$  sao cho  $a_{ij} \leq 0 (\forall i = \overline{1, m})$  thì bài toán Min đang xét vô nghiệm, nghĩa là không có phương án tối ưu nào.  
 TH2: Nếu trường hợp trên không xảy ra, nghĩa là tồn tại  $\Delta_j > 0$ , và với mọi  $j$  mà  $\Delta_j > 0$  đều tồn tại  $i$  sao cho  $a_{ij} > 0$  thì sang bước 3.

### Bước 3: Tìm ẩn đưa vào hệ ẩn cơ bản

Trong tất cả các  $\Delta_j > 0$ , ta chọn  $\Delta_v > 0$  lớn nhất [Ta đánh dấu \* cho  $\Delta_v$  dương lớn nhất trong bảng]. Khi đó,  $x_v$  là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản.

### Bước 4: Tìm ẩn đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản

Lập các tỷ số  $\lambda_i = \frac{b_i}{a_{iv}}$  với mọi  $i$  mà  $a_{iv} > 0$  và ghi vào cột  $\lambda_i$  của bảng. Xác định

$$\lambda_r = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{iv}} : a_{iv} > 0 \right\}$$

[Ta đánh dấu \* cho  $\lambda_r$  nhỏ nhất trong bảng]. Khi đó,  $x_r$  là ẩn mà ta sẽ đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản.

### Bước 5: Tìm phần tử chốt

Phần tử chốt là hệ số  $a_{rv}$  ở cột  $v$  (cột chứa  $\Delta_v^*$ ), hàng  $r$  (hàng chứa  $\lambda_r^*$ ). [Ta đóng khung phần tử chốt  $a_{rv}$ ].

### Bước 6: Biến đổi bảng

1. Trong cột **Ẩn cơ bản** ta thay  $x_r$  bằng  $x_v$ . Trong cột **Hệ số** ta thay  $c_r$  bằng  $c_v$ .
2. Hàng  $r$  mới = (hàng  $r$  cũ) chia cho phần tử chốt  $a_{rv}$ .
3. Hàng  $i$  mới = (hàng  $i$  cũ) -  $a_{iv}$  (hàng  $r$  mới).
4. Hàng cuối mới = (hàng cuối cũ) -  $\Delta_v$  (hàng  $r$  mới).

### Bước 7: Quay về bước 2

#### Chú ý:

- a. Trong Bước 3, nếu có nhiều  $\Delta_v > 0$  lớn nhất thì ta chỉ chọn một trong số đó để đánh dấu \* và xác định ẩn đưa vào tương ứng.
- b. Trong Bước 4, nếu có nhiều  $\lambda_r$  thỏa

$$\lambda_r = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{iv}} : a_{iv} > 0 \right\}$$

thì ta chỉ chọn một trong số đó để đánh dấu \* và xác định ẩn đưa ra tương ứng.

- c. Trong Bước 6, các phép biến đổi từ 2. đến 4. có thể được thực hiện bằng phương pháp “đường chéo hình chữ nhật” như sau:

| Cũ                           |               | Mới                                                          |
|------------------------------|---------------|--------------------------------------------------------------|
| Hàng r $a_{rj}$ ... $a_{rv}$ |               | Hàng r $\frac{a_{rj}}{a_{rv}}$ ...    1                      |
| $\vdots$                     | $\rightarrow$ | $\vdots$                                                     |
| Hàng i $a_{ij}$ ... $a_{iv}$ |               | Hàng i $\frac{a_{rv}a_{ij} - a_{rj}a_{iv}}{a_{rv}}$ ...    0 |

| Cũ                               |               | Mới                                                              |
|----------------------------------|---------------|------------------------------------------------------------------|
| Hàng r $a_{rj}$ ... $a_{rv}$     |               | Hàng r $\frac{a_{rj}}{a_{rv}}$ ...    1                          |
| $\vdots$                         | $\rightarrow$ | $\vdots$                                                         |
| Hàng i $\Delta_j$ ... $\Delta_v$ |               | Hàng i $\frac{a_{rv}\Delta_j - a_{rj}\Delta_v}{a_{rv}}$ ...    0 |

d. Trong Bước 6, các phép biến đổi từ 2. đến 4. có thể được tính nhờ vào các hàng trên của bảng mới như khi lập bảng đơn hình đầu tiên ở Bước 1.

### 2.5.2. Thuật toán giải bài toán **Max**:

Đối với bài toán QHTT  $f(x) \rightarrow \text{Max}$  ta có thể giải bằng 2 cách:

**Cách 1:** Chuyển về bài toán Min như sau:

Đặt  $g(x) = -f(x)$ . Ta có  $g(x) \rightarrow \text{Min}$  và

$$f(x) \text{ đạt Max tại } x^0 \Leftrightarrow g(x) \text{ đạt Min tại } x^0.$$

Hơn nữa, khi đó  $f(x^0) = -g(x^0)$ .



**Cách 2:** Giải trực tiếp bài toán Max. Thuật toán giải bài toán Max tương tự như thuật toán giải bài toán Min, nhưng những điều kiện về các  $\Delta_j$  ở hàng cuối sẽ hoàn toàn ngược lại, cụ thể có thay đổi như sau:

a. Bước 2 (Kiểm tra tính tối ưu):

1. Nếu  $\Delta_j \geq 0 (\forall j = \overline{1, n})$ , thì phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  ( $x^0$  có thành phần thứ  $i_k$  là  $x_{i_k}^0 = b_k$ , còn các thành phần khác bằng 0) là một phương án tối ưu của bài toán Max đang xét với  $f(x) = f(x^0)$ .

2. Nếu tồn tại  $\Delta_j < 0$  đến đây xảy ra 2 trường hợp:

TH1: Nếu tồn tại  $\Delta_j < 0$  sao cho  $a_{ij} \leq 0 (\forall i = \overline{1, m})$  thì bài toán Max đang xét vô nghiệm, nghĩa là không có phương án tối ưu nào.

TH2: Nếu trường hợp trên không xảy ra, nghĩa là tồn tại  $\Delta_j < 0$ , và với mọi  $j$  mà  $\Delta_j < 0$  đều tồn tại  $i$  sao cho  $a_{ij} > 0$  thì sang bước 3.

b. Bước 3 (Tìm ẩn đưa vào hệ ẩn cơ bản):

Trong tất cả các  $\Delta_j < 0$ , ta chọn  $\Delta_v < 0$  bé nhất [Ta đánh dấu \* cho  $\Delta_v$  âm bé nhất trong bảng]. Khi đó,  $x_v$  là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản.

Ví dụ 1: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = 1, \dots, 6)$$

Giải: Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 1),  $e_2$  (cột 3),  $e_3$  (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_1$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_3$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_6$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ẩn cơ bản | Phương án | 2     | 5     | 4     | 1     | -5    | 0     | $\lambda_i$ |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |             |
| 2     | $x_1$     | 32        | 1     | -6    | 0     | -2    | -9    | 0     |             |
| 4     | $x_3$     | 30        | 0     | 2     | 1     | 1/2   | 3/2   | 0     |             |
| 0     | $x_6$     | 36        | 0     | 3     | 0     | 0     | 1     | 1     |             |
|       | f(x)      | 184       | 0     | -9    | 0     | -3    | -7    | 0     |             |

$$f(x^0) = 2 \cdot 32 + 4 \cdot 30 + 0 \cdot 36 = 184$$

$$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0$$

$$\Delta_2 = 2 \cdot (-6) + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 - 5 = -9$$

$$\Delta_3 = 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1/2 + 0 \cdot 0 - 1 = -3$$

$$\Delta_4 = 2 \cdot (-9) + 4 \cdot 3/2 + 0 \cdot 1 - (-5) = -7$$

Trong bảng trên ta thấy  $\Delta_j \leq 0 (\forall j = \overline{1,6})$  nên bài toán Min đang xét có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 32 \\ x_3 = 30 \\ x_6 = 36 \\ x_2 = x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

Với  $f(x^0) = 184$

Kết luận: Bài toán có phương án tối ưu là  $x^0 = (32, 0, 30, 0, 0, 36)$  với  $f(x^0) = 184$

Ví dụ 2: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6)$$

Giải: Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc thứ 2 trong (2) là  $-9 < 0$ . Đổi dấu hai vế của phương trình này, ta đưa về bài toán sau:

$$(1) \quad f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j=1, \dots, 6)$$

Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 2),  $e_2$  (cột 3),  $e_3$  (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_2$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_3$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_5$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ân cơ bản | Phương án | 6     | 1     | 1     | 3     | 1     | -7    | $\lambda_i$         |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |                     |
| 1     | $x_2$     | 15        | -1    | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | Bảng I              |
| 1     | $x_3$     | 9         | -2    | 0     | 1     | 0     | 0     | -2    |                     |
| 1     | $x_5$     | 2         | 4     | 0     | 0     | 2     | 1     | -3    |                     |
|       | f(x)      | 26        | -5    | 0     | 0     | -2    | 0     | 3*    | $h_2 := h_2 + 2h_1$ |
| -7    | $x_6$     | 15        | -1    | 1     | 0     | -1    | 0     | 1     | Bảng II             |
| 1     | $x_3$     | 39        | -4    | 2     | 1     | -2    | 0     | 0     |                     |
| 1     | $x_5$     | 47        | 1     | 3     | 0     | -1    | 1     | 0     |                     |
|       | f(x)      | -19       | -2    | -3    | 0     | 1     | 0     | 0     |                     |

Bảng I: Ta tìm được

$$f(x^0) = 1 \cdot 15 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 2 = 26$$

$$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0$$

$$\Delta_1 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 - 6 = -5$$

$$\Delta_4 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 3 = -2$$

$$\Delta_6 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) - (-7) = 3$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại  $\Delta_6 = 3 > 0$  và trên cột tương ứng có  $a_{13} = 1 > 0$  ( $a_{23} = -2, a_{33} = -3$ )

nếu ta chọn ẩn đưa vào là  $x_6$ , ẩn đưa ra là  $x_2$ , phần tử chốt là  $a_{13} = 1$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghì cạnh bảng.

Bảng II: Trong bảng II, ta thấy tồn tại  $\Delta_4 = 1 > 0$  mà  $a_{i4} \leq 0 (\forall i = \overline{1, 3}) (a_{14} = -1, a_{24} = -2, a_{34} = -1)$  nên bài toán Min đang xét vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_3 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3)$$

Giải: Chuyển về bài toán Min bằng cách đặt

$$g(x) = -f(x) = -3x_1 - 8x_2 - 5x_3$$

Ta có bài toán:

$$(1') \quad g(x) = -3x_1 - 8x_2 - 5x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_3 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3)$$

Biến đổi bài toán trên về dạng chính tắc bằng cách đưa vào các ẩn phụ  $x_j \geq 0 (j = 4, 5, 6)$  :

$$(1') \quad g(x) = -3x_1 - 8x_2 - 5x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2') \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 12 \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 (j = 1, 2, \dots, 6)$$

Bài toán dạng chính tắc trên có các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2') đều không âm. Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 4),  $e_2$  (cột 5),  $e_3$  (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_4$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_5$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_6$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ẩn cơ bản | Phương án | -3    | -8                                              | -5                                              | 0     | 0     | 0     | $\lambda_i$         |                   |
|-------|-----------|-----------|-------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------|-------|-------|---------------------|-------------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$                                           | $x_3$                                           | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |                     |                   |
| 0     | $x_4$     | 4         | 1     | <span style="border: 1px solid black;">3</span> | 0                                               | 1     | 0     | 0     | $\lambda_1 = 4/3^*$ | Bảng I            |
| 0     | $x_5$     | 7         | 1     | 0                                               | 2                                               | 0     | 1     | 0     |                     |                   |
| 0     | $x_6$     | 12        | 1     | 3                                               | 2                                               | 0     | 0     | 1     |                     |                   |
|       | $g(x)$    | 0         | 3     | 8*                                              | 5                                               | 0     | 0     | 0     | $\lambda_3 = 12/3$  | $h_1 := (1/3)h_1$ |
| -8    | $x_2$     | 4/3       | 1/3   | 1                                               | 0                                               | 1/3   | 0     | 0     | $\lambda_2 = 7/2^*$ | Bảng II           |
| 0     | $x_5$     | 7         | 1     | 0                                               | <span style="border: 1px solid black;">2</span> | 0     | 1     | 0     |                     |                   |
| 0     | $x_6$     | 8         | 0     | 0                                               | 2                                               | -1    | 0     | 1     |                     |                   |
|       | $g(x)$    | -32/3     | 1/3   | 0                                               | 5*                                              | -8/3  | 0     | 0     | $\lambda_3 = 8/2$   | $h_2 := (1/2)h_2$ |
| -8    | $x_2$     | 4/3       | 1/3   | 1                                               | 0                                               | 1/3   | 0     | 0     |                     | Bảng III          |
| -5    | $x_3$     | 7/2       | 1/2   | 0                                               | 1                                               | 0     | 1/2   | 0     |                     |                   |
| 0     | $x_6$     | 1         | -1    | 0                                               | 0                                               | -1    | -1    | 1     |                     |                   |
|       | $g(x)$    | -169/6    | -13/6 | 0                                               | 0                                               | -8/3  | -5/2  | 0     |                     |                   |

Bảng I: Ta tìm được

$$g(x^0) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 12 = 0$$

$$\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - (-3) = 3$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 - (-8) = 8$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 - (-5) = 5$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại các  $\Delta_j > 0$  là  $\Delta_1 = 3; \Delta_2 = 8; \Delta_3 = 5$  và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn  $\Delta_2 = 8$  dương lớn nhất và ẩn đưa vào là  $x_2$ , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là  $a_{12} = 3; a_{32} = 3$  nên ta lập các tỷ số  $\lambda_1 = 4/3; \lambda_3 = 12/3$ . Ta chọn tỷ số  $\lambda_1 = 4/3$  là nhỏ nhất và ẩn đưa ra là  $x_4$ , phần tử chốt là  $a_{12} = 3$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Lý luận tương tự như trên, ta thấy phương án cơ bản ban đầu trong bảng này chưa tối ưu và cũng không có dấu hiệu cho thấy bài toán vô nghiệm. Biến đổi Bảng II bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng III: Trong bảng III ta thấy  $\Delta_j \leq 0 (\forall j = \overline{1,6})$  nên bài toán Min đang xét có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu  $x^1$  định bởi:

$$\begin{cases} x_2 = 4/3 \\ x_3 = 7/2 \\ x_6 = 1 \\ x_1 = x_4 = x_5 = 0 \end{cases}$$

Với  $g(x^1) = -169/6$ . Bỏ đi các ẩn phụ, ta được phương án tối ưu của bài toán Min là  $x^0 = (x_1, x_2, x_3) = (0, 4/3, 7/2)$  với  $g(x^0) = -169/6$ .

Kết luận: Bài toán Max đã cho có phương án tối ưu là  $x^0 = (0, 4/3, 7/2)$  với  $f(x^0) = 169/6$

Ví dụ 4: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,5})$$

Giải: Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm. Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 1),  $e_2$  (cột 4),  $e_3$  (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn, trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_1$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_4$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_5$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ẩn cơ bản | Phương án | -2    | 6                                               | 4                                               | -2    | 3     | $\lambda_i$          |
|-------|-----------|-----------|-------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------|-------|----------------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$                                           | $x_3$                                           | $x_4$ | $x_5$ |                      |
| -2    | $x_1$     | 52        | 1     | 2                                               | <span style="border: 1px solid black;">4</span> | 0     | 0     | $\lambda_1 = 52/4^*$ |
| -2    | $x_4$     | 60        | 0     | 4                                               | 2                                               | 1     | 0     | $\lambda_2 = 60/2$   |
| 3     | $x_5$     | 36        | 0     | 3                                               | 0                                               | 0     | 1     |                      |
|       | f(x)      | -116      | 0     | -9                                              | -16*                                            | 0     | 0     |                      |
| 4     | $x_3$     | 13        | 1/4   | 1/2                                             | 1                                               | 0     | 0     | $\lambda_1 = 26$     |
| -2    | $x_4$     | 34        | -1/2  | <span style="border: 1px solid black;">3</span> | 0                                               | 1     | 0     | $\lambda_2 = 34/3^*$ |
| 3     | $x_5$     | 36        | 0     | 3                                               | 0                                               | 0     | 1     | $\lambda_3 = 36/3$   |
|       | f(x)      | 92        | 4     | -1*                                             | 0                                               | 0     | 0     |                      |

Bảng I

$$h_1 := (1/4)h_1$$

$$h_2 := h_2 - 2h_1$$

$$h_c := h_c + 16h_1$$

Bảng II

$$h_2 := (1/3)h_2$$

$$h_1 := h_1 - (1/2)h_2$$



|   |       |       |      |   |   |      |   |                                                       |
|---|-------|-------|------|---|---|------|---|-------------------------------------------------------|
| 4 | $x_3$ | 22/3  | 1/3  | 0 | 1 | -1/6 | 0 | $h_3 := h_3 - 3h_2$<br>$h_c := h_c + h_2$<br>Bảng III |
| 6 | $x_2$ | 34/3  | -1/6 | 1 | 0 | 1/3  | 0 |                                                       |
| 3 | $x_5$ | 2     | 1/2  | 0 | 0 | -1   | 1 |                                                       |
|   | f(x)  | 310/3 | 23/6 | 0 | 0 | 1/3  | 0 |                                                       |

Bảng I: Ta tìm được

$$f(x^0) = (-2) \cdot 52 + (-2) \cdot 60 + 3 \cdot 36 = -116$$

$$\Delta_1 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$$

$$\Delta_2 = (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 6 = -9$$

$$\Delta_3 = (-2) \cdot 4 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 4 = -16$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại các  $\Delta_j < 0$  là  $\Delta_2 = -9$ ;  $\Delta_3 = -16$  và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn  $\Delta_3 = -16$  âm nhỏ nhất và ẩn đưa vào là  $x_3$ , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là  $a_{13} = 4$ ;  $a_{23} = 2$  nên ta lập các tỷ số  $\lambda_1 = 52/4$ ;  $\lambda_2 = 60/2$ . Ta chọn tỷ số  $\lambda_1 = 52/4$  là nhỏ nhất và ẩn đưa ra là  $x_1$ , phần tử chốt là  $a_{13} = 4$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Lý luận tương tự như trên, ta thấy phương án cơ bản ban đầu trong bảng này chưa tối ưu và cũng không có dấu hiệu cho thấy bài toán vô nghiệm. Biến đổi Bảng II bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng III: Trong bảng III ta thấy  $\Delta_j \geq 0 (\forall j = \overline{1,5})$  nên bài toán Max đang xét có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  định bởi:

$$\begin{cases} x_3 = 22/3 \\ x_2 = 34/3 \\ x_5 = 2 \\ x_1 = x_4 = 0 \end{cases}$$

$$f(x^0) = 310/3.$$

Kết luận: Bài toán Max đã cho có phương án tối ưu là  $x^0 = (0, 34/3, 22/3, 0, 2)$  với  $f(x^0) = 310/3$

## 2.6. Thuật toán đơn hình mở rộng:

Thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chính tắc tương tự như thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chuẩn, nhưng có một số điểm cần chú ý như sau:

- Do hàm mục tiêu mở rộng là  $f(x) + M$  ( $\sum$  ẩn giả) đối với bài toán Min, và là  $f(x) - M$  ( $\sum$  ẩn giả) đối với bài toán Max, nên trong các bảng đơn hình, ở cột Hệ số có thể có các hệ số phụ thuộc M. Khi đó ở hàng cuối gồm  $f(x)$ ;  $f(x^0)$  và các  $\Delta_j$ ; các hệ số sẽ có dạng  $\alpha_j + \beta_j M$ , do đó người ta thường chia hàng cuối thành 2 hàng nhỏ: Hàng nhỏ trên ghi các số  $\alpha_j$ ; Hàng nhỏ dưới ghi các số  $\beta_j M$ . Các hàng này cũng tuân thủ các phép biến đổi của bảng cũng giống như các hàng khác.
- Vì M là đại dương rất lớn, nên khi so sánh các số hạng  $\alpha + \beta M$  và  $\alpha' + \beta' M$ , ta có qui tắc sau:

$$\alpha + \beta M = \alpha' + \beta' M \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \end{cases}$$

$$\alpha + \beta M > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta M > \alpha' + \beta' M \Leftrightarrow \begin{cases} \beta > \beta' \\ \beta = \beta' \\ \alpha > \alpha' \end{cases}$$

Do đó khi xét dấu  $\Delta_j$ , hệ số  $\beta_j$  ở hàng nhỏ dưới được xem xét trước; và chỉ khi nào  $\beta_j = 0$ , ta mới xét đến hệ số  $\alpha_j$  ở hàng nhỏ trên. Tương tự, khi so sánh các  $\Delta_j$ , các hệ số  $\beta_j$  ở hàng nhỏ dưới được so sánh trước; chỉ khi nào các  $\beta_j$  bằng nhau, ta mới so sánh các hệ số  $\alpha_j$  ở hàng nhỏ trên.

- Trong bảng đơn hình đầu tiên, tất cả các ẩn giả đều có trong cột Ẩn cơ bản (vì chúng đều là các ẩn cơ bản). Mỗi khi một ẩn giả bị đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản thì không bao giờ ta đưa ẩn giả đó trở lại nữa, vì vậy trong bảng đơn hình ta có thể bỏ đi các cột ứng với các ẩn giả.

Ví dụ 1: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -3x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 5})$$

Giải: Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm. Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -5 & -2 \\ 1 & -1/3 & 2/3 & 4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa vectơ cột đơn vị  $e_3$  (cột 1), không chứa các vectơ cột đơn vị  $e_1, e_2$ , nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào các ẩn giả  $x_j \geq 0 (j = 6, 7)$  và lần lượt cộng  $x_6, x_7$  vào vế trái của các phương trình ràng buộc thứ 1, thứ 2 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1) \quad f(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$(2) \quad \begin{cases} -3x_3 - 9x_4 + x_6 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 + x_7 = 5 \\ x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 7})$$

Khi đó bài toán có:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_6$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_7$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_1$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ân cơ bản | Phương án | 1     | 2        | 0     | 1     | -5    | $\lambda_i$                   |
|-------|-----------|-----------|-------|----------|-------|-------|-------|-------------------------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$    | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |                               |
| M     | $x_6$     | 0         | 0     | 0        | -3    | -9    | 0     | Bảng I                        |
| M     | $x_7$     | 5         | 0     | <u>1</u> | -7    | -5    | -2    |                               |
| 1     | $x_1$     | 2/3       | 1     | -1/3     | 2/3   | 4/3   | 1/3   |                               |
|       | f(x)      | 2/3       | 0     | -7/3     | 2/3   | 1/3   | 16/3  | $h_{c1} := h_{c1} + (7/3)h_2$ |
|       |           | 5M        | 0     | M*       | -10M  | -14M  | -2M   |                               |
| M     | $x_6$     | 0         | 0     | 0        | -3    | -9    | 0     | Bảng II                       |
| 2     | $x_2$     | 5         | 0     | 1        | -7    | -5    | -2    |                               |
| 1     | $x_1$     | 7/3       | 1     | 0        | -5/3  | -1/3  | -1/3  |                               |
|       | f(x)      | 37/3      | 0     | 0        | -47/3 | -34/3 | 2/3   |                               |
|       |           | 0         | 0     | 0        | -3M   | -9M   | 0     |                               |

Bảng I: Ta tìm được

$$f(x^0) = M \cdot 0 + M \cdot 5 + 1 \cdot (2/3) = 2/3 + 5M$$

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = M \cdot 0 + M \cdot 1 + 1 \cdot (-1/3) - 2 = -7/3 + M$$

$$\Delta_3 = M \cdot (-3) + M \cdot (-7) + 1 \cdot (2/3) - 0 = 2/3 - 10M$$

$$\Delta_4 = M \cdot (-9) + M \cdot (-5) + 1 \cdot (4/3) - 1 = 1/3 - 14M$$

$$\Delta_5 = M \cdot 0 + M \cdot (-2) + 1 \cdot (1/3) - (-5) = 16/3 - 2M$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại duy nhất một  $\Delta_j > 0$  là  $\Delta_2 = -7/3 + M > 0$  và trên cột tương ứng chỉ có một hệ số dương là  $a_{22} = 1 > 0$ . Ta chọn ẩn đưa vào là  $x_2$ , ẩn đưa ra là  $x_7$ , phần tử chốt là  $a_{22} = 1$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Trong bảng II, ta thấy tồn tại  $\Delta_5 = 2/3 > 0$  mà  $a_{i5} \leq 0 (\forall j = \overline{1,3}) (a_{15} = 0; a_{25} = -2; a_{35} = -1/3)$  nên bài toán Min mở rộng vô nghiệm. Suy ra bài toán Min xuất phát cũng vô nghiệm.

Kết luận: Bài toán Min đã cho không có phương án tối ưu.

Ví dụ 2: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,3})$$

Giải: Biến đổi bài toán trên về dạng chính tắc bằng cách đưa vào ẩn phụ  $x_4 \geq 0$ :

$$(1') \quad f(x) = -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2') \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,4})$$

Với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2') đều không âm. Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa vectơ cột đơn vị  $e_3$  (cột 4), không chứa các vectơ cột đơn vị  $e_1, e_2$ , nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào các ẩn giả  $x_j \geq 0 (j = 5,6)$  và lần lượt cộng  $x_5, x_6$  vào vế trái của các phương trình ràng buộc thứ 1, thứ 2 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1'') \quad f(x) = -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2'') \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

$$(3'') \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 6})$$

Khi đó bài toán có:

- Ấn cơ bản thứ 1 là  $x_5$
- Ấn cơ bản thứ 2 là  $x_6$
- Ấn cơ bản thứ 3 là  $x_4$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ấn cơ bản | Phương án | -2    | -4    | 2                                               | 0     | $\lambda_i$                 |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------------------------------------------------|-------|-----------------------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$                                           | $x_4$ |                             |
| -M    | $x_5$     | 27        | 1     | -2    | 1                                               | 0     | $\lambda_1 = 27/1$          |
| -M    | $x_6$     | 50        | 2     | 1     | <span style="border: 1px solid black;">2</span> | 0     | $\lambda_1 = 50/2^*$        |
| 0     | $x_4$     | 18        | 1     | -1    | -1                                              | 1     |                             |
|       | $f(x)$    | 0         | 2     | 4     | -2                                              | 0     | $h_3 := h_3 + h_2$          |
|       |           | -77M      | -3M   | M     | -3M*                                            | 0     | $h_{c1} := h_{c1} + 2h_2$   |
| -M    | $x_5$     | 2         | 0     | -5/2  | 0                                               | 0     | $h_{c2} := h_{c2} + 3M.h_2$ |
| 2     | $x_3$     | 25        | 1     | 1/2   | 1                                               | 0     |                             |
| 0     | $x_4$     | 43        | 2     | -1/2  | 0                                               | 1     |                             |
|       | $f(x)$    | 50        | 4     | 5     | 0                                               | 0     |                             |
|       |           | -2M       | 0     | 5M/2  | 0                                               | 0     |                             |

Bảng I

$$h_2 := (1/2)h_2$$

$$h_1 := h_1 - h_2$$

$$h_3 := h_3 + h_2$$

$$h_{c1} := h_{c1} + 2h_2$$

$$h_{c2} := h_{c2} + 3M.h_2$$

Bảng II

Bảng I: Ta tìm được

$$f(x^0) = -M * 27 - M * 50 + 0 * 18 = -77M$$

$$\Delta_4 = 0$$

$$\Delta_1 = -M * 1 - M * 2 + 0 * 1 - (-2) = 2 - 3M$$

$$\Delta_2 = -M * (-2) - M * 1 + 0 * (-1) - (-4) = 4 + M$$

$$\Delta_3 = -M * 1 - M * 2 + 0 * (-1) - 2 = -2 - 3M$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại duy nhất các  $\Delta_j < 0$  là  $\Delta_1 = 2 - 3M < 0$ ;  $\Delta_3 = -2 - 3M < 0$  và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn  $\Delta_3 = -2 - 3M$  âm nhỏ nhất và ẩn đưa vào là  $x_3$ , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là  $a_{13} = 1 > 0$ ,  $a_{23} = 2 > 0$ . Ta lập các tỷ số  $\lambda_1 = 27/1$ ;  $\lambda_2 = 50/2$ , chọn tỷ số  $\lambda_2 = 25$  nhỏ nhất và ẩn đưa ra là  $x_6$ , phần tử chốt là  $a_{23} = 2$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Trong bảng II, ta thấy  $\Delta_j \geq 0 (\forall j = \overline{1,4})$  nên bài toán Max mở rộng có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  định bởi:

$$\begin{cases} x_5 = 2 \\ x_3 = 25 \\ x_4 = 43 \\ x_1 = x_2 = x_6 = 0 \end{cases}$$

với  $f(x^0) = 50 - 2M$ .

Vì bài toán Max mở rộng có phương án tối ưu là  $x^0 = (0, 0, 25, 43, 2, 0)$ , trong đó ẩn giả  $x_5 = 2 > 0$  nên bài toán Max xuất phát không có phương án nào.

Kết luận: Bài toán Max đã cho không có phương án nào và do đó không có phương án tối ưu.

Ví dụ 3: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 3})$$

Giải: Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm. Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Vì  $A$  chứa vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 3), không chứa vectơ cột đơn vị  $e_2$ , nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào ẩn giả  $x_4 \geq 0$  và cộng  $x_4$  vào vế trái của phương trình ràng buộc thứ 2 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1') \quad f(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3 + Mx_4 \rightarrow \min$$

$$(2') \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 4})$$

Khi đó bài toán có:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_3$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_4$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:



| Hệ số | Ấn cơ bản | Phương án | -16   | 7     | 9     | $\lambda_i$ |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |             |
| 9     | $x_3$     | 1/3       | -2/3  | -1/3  | 1     |             |
| M     | $x_4$     | 7         | -5    | 5     | 0     |             |
|       | $f(x)$    | 3         | 10    | -10   | 0     |             |
|       |           | 7M        | -5M   | 5M*   | 0     |             |
| 9     | $x_3$     | 4/5       | -1    | 0     | 1     |             |
| 7     | $x_2$     | 7/5       | -1    | 1     | 0     |             |
|       | $f(x)$    | 17        | 0     | 0     | 0     |             |

Bảng I

$$h_2 := (1/5)h_2$$

$$h_1 := h_1 + (1/3)h_2$$

$$h_{c1} := h_{c1} + 10h_2$$

$$h_{c2} := h_{c2} - 5M.h_2$$

Bảng I: Ta tìm được

$$f(x^0) = 9*(1/3) + M*7 = 3 + 7M$$

$$\Delta_3 = 0$$

$$\Delta_1 = 9*(-2/3) + M*(-5) - (-16) = 10 - 5M$$

$$\Delta_2 = 9*(-1/3) + M*5 - 7 = -10 + 5M$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại duy nhất các  $\Delta_j > 0$  là  $\Delta_2 = -10 + 5M > 0$  và trên cột tương ứng chỉ có một hệ số dương là  $a_{22} = 5 > 0$ . Ta chọn ấn đưa vào là  $x_2$ , ấn đưa ra là  $x_4$ , phần tử chốt là  $a_{22} = 5$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II: Trong bảng II, ta thấy  $\Delta_j \leq 0 (\forall j = \overline{1,3})$  nên bài toán Min mở rộng có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  định bởi:

$$\begin{cases} x_3 = 4/5 \\ x_2 = 7/5 \\ x_1 = x_4 = 0 \end{cases}$$

với  $f(x^0)=17$ .

Vì bài toán Min mở rộng có phương án tối ưu là  $x^0=(0,7/5,4/5,0)$ , trong đó ẩn giả duy nhất  $x_4=0$  nên bài toán Min xuất phát có phương án tối ưu là  $x^0=(0,7/5,4/5)$  với  $f(x^0)=17$

Kết luận: Bài toán Min đã cho có phương án tối ưu là  $x^0=(0,7/5,4/5)$  với  $f(x^0)=17$ .

Ví dụ 4: Giải bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,3})$$

Giải: Chuyển về bài toán Min bằng cách đặt

$$g(x) = -f(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3$$

Ta có bài toán:

$$(1') \quad g(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,3})$$

Biến đổi bài toán trên về dạng chính tắc bằng cách đưa vào ẩn phụ  $x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$ :

$$(1') \quad g(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2') \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$(3') \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,5})$$

Với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2') đều không âm. Ma trận hệ số ràng buộc là:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa vectơ cột đơn vị  $e_1$  (cột 4), không chứa các vectơ cột đơn vị  $e_1, e_2$ , nên bài toán chưa có dạng chuẩn. Ta đưa vào các ẩn giả  $x_j \geq 0 (j = 6, 7)$  và lần lượt cộng  $x_6, x_7$  vào vế trái của các phương trình ràng buộc thứ 2, thứ 3 để xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn:

$$(1'') \quad g(x) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2'') \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + x_6 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = 3 \end{cases}$$

$$(3'') \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 7})$$

Khi đó bài toán có:

- Ẩn cơ bản thứ 1 là  $x_4$
- Ẩn cơ bản thứ 2 là  $x_6$
- Ẩn cơ bản thứ 3 là  $x_7$

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình. Lập bảng đơn hình:

| Hệ số | Ân cơ bản | Phương án | 2           | -3          | 3     | 0     | 0           | $\lambda_i$         |                                                      |
|-------|-----------|-----------|-------------|-------------|-------|-------|-------------|---------------------|------------------------------------------------------|
|       |           |           | $x_1$       | $x_2$       | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$       |                     |                                                      |
| 0     | $x_4$     | 12        | 3           | -1          | 0     | 1     | 0           | $\lambda_1 = 12/3$  | Bảng I<br>$h_1 := h_1 - 3h_2$<br>$h_3 := h_3 - h_2$  |
| M     | $x_6$     | 1         | $\boxed{1}$ | 2           | -1    | 0     | -1          | $\lambda_2 = 1/1^*$ |                                                      |
| M     | $x_7$     | 3         | 1           | -1          | -1    | 0     | 0           | $\lambda_3 = 3/1^*$ |                                                      |
|       | $g(x)$    | 0         | -2          | 3           | -3    | 0     | 0           |                     | $h_{c1} := h_{c1} + 2h_2$                            |
|       |           | 4M        | 2M*         | M           | -2M   | 0     | -M          |                     | $h_{c2} := h_{c2} - 2M.h_2$                          |
| 0     | $x_4$     | 9         | 0           | -7          | 3     | 1     | 3           | $\lambda_1 = 9/3$   | Bảng II<br>$h_1 := h_1 - 3h_3$<br>$h_2 := h_2 + h_3$ |
| 2     | $x_1$     | 1         | 1           | 2           | -1    | 0     | -1          |                     |                                                      |
| M     | $x_7$     | 2         | 0           | -3          | 0     | 0     | $\boxed{1}$ | $\lambda_3 = 2/1$   |                                                      |
|       | $g(x)$    | 2         | 0           | 7           | -5    | 0     | -2          |                     | $h_{c1} := h_{c1} - 2h_3$                            |
|       |           | 2M        | 0           | -3M         | 0     | 0     | M*          |                     | $h_{c2} := h_{c2} - M.h_3$                           |
| 0     | $x_4$     | 3         | 0           | $\boxed{2}$ | 3     | 1     | 0           |                     | Bảng III<br>$h_1 := (1/2)h_1$<br>$h_2 := h_2 + h_1$  |
| 2     | $x_1$     | 3         | 1           | -1          | -1    | 0     | 0           |                     |                                                      |
| 0     | $x_5$     | 2         | 0           | -3          | 0     | 0     | 1           |                     |                                                      |
|       | $g(x)$    | 6         | 0           | 1*          | -5    | 0     | 0           |                     | $h_3 := h_3 + 3h_1$                                  |
| -3    | $x_2$     | 3/2       | 0           | 1           | 3/2   | 1/2   | 0           |                     | Bảng IV<br>$h_c := h_c - h_1$                        |
| 2     | $x_1$     | 9/2       | 1           | 0           | 1/2   | 1/2   | 0           |                     |                                                      |
| 0     | $x_5$     | 13/2      | 0           | 0           | 9/2   | 3/2   | 1           |                     |                                                      |
|       | $g(x)$    | 9/2       | 0           | 0           | -13/2 | -1/2  | 0           |                     |                                                      |

Bảng I: Ta tìm được

$$g(x^0) = 0 \cdot 12 + M \cdot 1 + M \cdot 3 = 4M$$

$$\Delta_4 = 0$$

$$\Delta_1 = 0 \cdot 3 + M \cdot 1 + M \cdot 1 - 2 = -2 + 2M$$

$$\Delta_2 = 0 \cdot (-1) + M \cdot 2 + M \cdot (-1) - (-3) = 3 + M$$

$$\Delta_3 = 0 \cdot 0 + M \cdot (-1) + M \cdot (-1) - 3 = -3 - 2M$$

$$\Delta_5 = 0 \cdot 0 + M \cdot (-1) + M \cdot 0 - 0 = -M$$

Trong Bảng I ta thấy tồn tại duy nhất các  $\Delta_j > 0$  là  $\Delta_1 = -2 + M < 0$ ;  $\Delta_3 = 3 + M > 0$  và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn  $\Delta_1 = -2 + 2M$  dương lớn nhất và ẩn đưa vào là  $x_1$ , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là  $a_{11} = 3 > 0, a_{21} = 1 > 0, a_{31} = 1 > 0$ . Ta lập các tỷ số  $\lambda_1 = 12/3; \lambda_2 = 1/1; \lambda_3 = 3/1$ , chọn tỷ số  $\lambda_2 = 1/1$  nhỏ nhất và ẩn đưa ra là  $x_6$ , phần tử chốt là  $a_{21} = 1$ . Sau đó, biến đổi Bảng I bằng các phép biến đổi ghi cạnh bảng.

Bảng II và III: Lý luận tương tự như trên, ta thấy các phương án cơ bản ban đầu trong các bảng này chưa tối ưu và cũng không có dấu hiệu cho thấy bài toán vô nghiệm. Biến đổi các bảng bằng các phép biến đổi ghi cạnh các bảng.

Bảng IV: Trong bảng IV, ta thấy  $\Delta_j \leq 0 (\forall j = \overline{1,5})$  nên bài toán Min mở rộng có một phương án tối ưu là phương án cơ bản ban đầu  $x^0$  định bởi:

$$\begin{cases} x_2 = 3/2 \\ x_1 = 9/2 \\ x_5 = 13/2 \\ x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0 \end{cases}$$

với  $g(x^0) = 9/2$ .

Vì bài toán Min mở rộng có phương án tối ưu là  $x^0 = (9/2, 3/2, 0, 0, 13/2, 0, 0)$ , trong đó các ẩn giả  $x_6, x_7$  đều bằng 0 nên bài toán Min xuất phát có phương án tối ưu là  $x^0 = (9/2, 3/2, 0)$  với  $g(x^0) = 9/2$  (ta bỏ đi các ẩn phụ  $x_4 = 0, x_5 = 13/2$ )

Kết luận: Bài toán Max đã cho có phương án tối ưu là  $x^0 = (9/2, 3/2, 0)$  với  $f(x^0) = -9/2$ .

## CHƯƠNG 3: BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

### 3.1. Khái niệm

### 3.2. Bài toán đối ngẫu

Với mỗi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có tương ứng với nó là một bài toán ngược hoàn toàn xác định gọi là bài toán đối ngẫu.

#### 3.2.1. Cặp bài toán đối ngẫu:

Nếu bài toán (D) là bài toán đối ngẫu của bài toán (P) thì bài toán (P) là bài toán đối ngẫu của bài toán (D). Ta gọi hai bài toán (P) và (D) là một cặp bài toán đối ngẫu.

❖ Phương pháp lập bài toán đối ngẫu

Để lập bài toán đối ngẫu (D) từ bài toán gốc (P), ta tiến hành theo các bước sau:

**Bước 1:** Xác định số ẩn, số ràng buộc chính và các hệ số của (D)

- Số ẩn: Số ẩn của (D) là số ràng buộc chính của (P).
- Số ràng buộc chính: Số ràng buộc chính của (D) là số ẩn của (P).
- Hệ số của ẩn trong hàm mục tiêu: Hệ số của ẩn  $y_i$  trong hàm mục tiêu của (D) là số hạng tự do tương ứng  $b_i$  trong hệ ràng buộc chính của (P).
- Hệ số trong hệ ràng buộc chính: Các hệ số của các ẩn và hệ số tự do trong ràng buộc chính thứ  $j$  của bài toán (D) là các hệ số tương ứng của ẩn  $x_j$  trong hệ ràng buộc chính và hàm mục tiêu của bài toán (P).

**Bước 2:** Xác định hàm mục tiêu và dấu của bài toán (D).

- Hàm mục tiêu: Nếu (P) là bài toán Min thì (D) là bài toán Max và ngược lại.
- Dấu của hệ ràng buộc:

Nếu (P) là bài toán Min thì dấu ở ràng buộc chính thứ  $j$  của (D) **ngược dấu** với dấu của ẩn  $x_j$  của (P) và dấu của ẩn  $y_i$  của (D) **cùng dấu** với dấu ở ràng buộc chính thứ  $i$  của (P).

| Bài toán gốc (P)                                                          | Bài toán đối ngẫu (D)                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Max}$                      | $g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \text{Min}$                      |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} b_i$ | $y_i \begin{cases} \text{tùy ý} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$          |
| $x_j \begin{cases} \text{tùy ý} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$          | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \begin{cases} = \\ \geq \\ \leq \end{cases} c_j$ |

Nếu (P) là bài toán Max thì dấu ở ràng buộc chính thứ j của (D) **cùng dấu** với dấu của ẩn  $x_j$  của (P) và dấu của ẩn  $y_i$  của (D) **ngược dấu** với dấu ở ràng buộc chính thứ i của (P).

| Bài toán gốc (P)                                                          | Bài toán đối ngẫu (D)                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}$                      | $g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \text{Max}$                      |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{cases} = \\ \geq \\ \leq \end{cases} b_i$ | $y_i \begin{cases} \text{tùy ý} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$          |
| $x_j \begin{cases} \text{tùy ý} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$          | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} c_j$ |

*Chú ý:* Một ràng buộc chính có dấu “=” trong bài toán này thì ẩn tương ứng trong bài toán kia có dấu tùy ý và ngược lại.

Ví dụ 1: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \leq 0; x_3 \text{ tùy ý}; x_4 \text{ tùy ý}$$

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D):

$$(1) g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \leq 0; y_2 \text{ tùy ý}; y_3 \geq 0$$

Ví dụ 2: Viết bài toán đối ngẫu của bài toán sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \leq 0; x_3 \text{ tùy ý}; x_4 \text{ tùy ý}$$

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D):

$$(1) g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \leq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \geq 0; y_2 \text{ tùy ý}; y_3 \leq 0$$



### 3.2.2. Cặp ràng buộc đối ngẫu

Trong một cặp ràng buộc đối ngẫu, ta gọi hai ràng buộc bất đẳng thức trong hai bài toán cùng tương ứng với một chỉ số là một cặp ràng buộc đối ngẫu.

❖ Phương pháp xác định các cặp ràng buộc đối ngẫu:

Để tìm các cặp ràng buộc đối ngẫu của cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) ta tiến hành theo các bước sau:

**Bước 1:** Xét hệ ràng buộc chính (P)

Nếu ràng buộc chính thứ  $i$  của bài toán (P) là bất phương trình thì điều kiện về dấu của ẩn thứ  $i$  của bài toán (D) là ràng buộc đối ngẫu của nó và cặp ràng buộc gồm ràng buộc chính thứ  $i$  của bài toán (P) và điều kiện về dấu của ẩn thứ  $i$  của bài toán (D) là một cặp ràng buộc đối ngẫu. Hệ ràng buộc chính của (P) có bao nhiêu bất phương trình thì ta có bấy nhiêu cặp ràng buộc đối ngẫu.

**Bước 2:** Xét hệ ràng buộc dấu của bài toán (P)

Nếu  $x_j \geq 0$  (hay  $x_j \leq 0$ ) thì ràng buộc chính thứ  $j$  của bài toán (D) là ràng buộc đối ngẫu của nó và cặp ràng buộc gồm ràng buộc  $x_j \geq 0$  (hay  $x_j \leq 0$ ) và ràng buộc chính thứ  $j$  của bài toán (D) là một cặp ràng buộc đối ngẫu. Bài toán (P) có bao nhiêu điều kiện về dấu của ẩn số thì ta có thêm bấy nhiêu cặp ràng buộc đối ngẫu.

*Chú ý:* Ta cũng có thể tiến hành hai bước trên đối với bài toán (D), nghĩa là ta xét hệ ràng buộc chính và hệ ràng buộc dấu của bài toán (D) để tìm các cặp ràng buộc đối ngẫu của cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D).

Ví dụ 1: Hãy lập bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$(1) \quad f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \leq 0$$

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P):

$$(1) \quad g(y) = 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 + 8y_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 + 5y_4 \leq 2 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_1 \text{ tùy ý}; y_2 \leq 0; y_3 \geq 0; y_4 \leq 0$$

Hệ ràng buộc chính của bài toán (P) có 3 bất phương trình và bài toán (P) có 3 điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 6 cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

|                             |                   |                                    |
|-----------------------------|-------------------|------------------------------------|
| $x_1 - x_2 + 4x_3 \leq -3$  | $\leftrightarrow$ | $y_2 \leq 0$                       |
| $x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6$   | $\leftrightarrow$ | $y_3 \geq 0$                       |
| $3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8$ | $\leftrightarrow$ | $y_4 \leq 0$                       |
| $x_1 \geq 0$                | $\leftrightarrow$ | $2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1$   |
| $x_2 \geq 0$                | $\leftrightarrow$ | $3y_1 - y_2 + y_3 + 5y_4 \leq 2$   |
| $x_3 \leq 0$                | $\leftrightarrow$ | $y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3$ |

Ví dụ 2: Hãy lập bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu:

$$(1) \quad f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leq 9 \\ 10x_1 - 11x_2 + 12x_3 - 13x_4 = 14 \\ -15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \text{ tùy ý}$$

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P):

$$(1) \quad g(y) = 9y_1 + 14y_2 - 19y_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1 \\ 6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2 \\ 7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3 \\ 8y_1 - 13y_2 + 18y_3 = -4 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_1 \geq 0; y_2 \text{ tùy ý}; y_3 \leq 0$$

Hệ ràng buộc chính của bài toán (P) có 2 bất phương trình và bài toán (P) có 3 điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 5 cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

|                                           |                   |                                |
|-------------------------------------------|-------------------|--------------------------------|
| $5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leq 9$        | $\leftrightarrow$ | $y_1 \geq 0$                   |
| $-15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19$ | $\leftrightarrow$ | $y_3 \leq 0$                   |
| $x_1 \geq 0$                              | $\leftrightarrow$ | $5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1$  |
| $x_2 \geq 0$                              | $\leftrightarrow$ | $6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2$ |
| $x_3 \geq 0$                              | $\leftrightarrow$ | $7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3$  |

### 3.2.3. Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng

Trong cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng thì ta có n cặp ràng buộc đối ngẫu như sau:

| Bài toán gốc (P)                                    | Bài toán đối ngẫu (D)                               |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow Min / Max$ | $g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow Max / Min$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$                     | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j$           |
| $x_j \geq 0 (\forall j = \overline{1, n})$          |                                                     |

### 3.2.4. Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng

Trong cặp bài toán đối ngẫu đối xứng thì ta có n+m cặp ràng buộc đối ngẫu như sau:

| Bài toán gốc (P)                                    | Bài toán đối ngẫu (D)                               |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow Min / Max$ | $g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow Max / Min$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq (\leq) b_i$           | $y_i \geq 0 (\forall i = \overline{1, m})$          |
| $x_j \geq 0 (\forall j = \overline{1, n})$          | $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq (\geq) c_j$           |

### 3.3. Các tính chất và định lý về đối ngẫu:

Với cặp bài toán (P) và (D) chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau:

- i. Cả hai đều không có phương án
- ii. Cả hai cùng có phương án, lúc đó cả hai cùng có phương án tối ưu và giá trị hai hàm mục tiêu đối với phương án tối ưu là bằng nhau.
- iii. Một trong hai bài toán không có phương án còn bài toán kia có phương án khi đó bài toán có phương án sẽ không có phương án tối ưu, và hàm mục tiêu của nó không bị chặn.

**Định lý 1:** Nếu bài toán gốc có nghiệm thì bài toán đối ngẫu cũng có nghiệm và **giá trị của hai hàm mục tiêu là như nhau**. Điều ngược lại cũng đúng.

Hệ quả: Sự tồn nghiệm của hai bài toán đối ngẫu của nhau là tương đương.

#### Định lý 2:

Nếu  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  là phương án của bài toán  $f(x) \rightarrow \text{Min} / \text{Max}$

và  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  là phương án của bài toán đối ngẫu  $g(y) \rightarrow \text{Max} / \text{Min}$

mà  $f(x) = g(y)$  thì X và Y là các phương án tối ưu của các bài toán tương ứng.

#### Định lý 3:

Nếu  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  là các **phương án tối ưu** của hai bài toán đối ngẫu nhau, khi đó:

- Nếu X thỏa mãn **lỏng** ràng buộc thứ k thì Y thỏa mãn **chặt** ràng buộc đối ngẫu với ràng buộc thứ k.
- Nếu Y thỏa mãn **lỏng** ràng buộc thứ s thì X thỏa mãn **chặt** ràng buộc đối ngẫu với ràng buộc thứ s.

Chú ý: Ta hay sử dụng X thỏa mãn **lỏng** ràng buộc thứ k để suy ra Y thỏa mãn **chặt** ràng buộc đối ngẫu với k, từ đó ta có được các phương trình tìm ra được các  $y_i$ .

#### ❖ Phương pháp giải bài toán đối ngẫu

Để giải bài toán đối ngẫu (D) ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

### **Phương pháp 1:** Phương pháp đơn hình đối ngẫu

**Bước 1:** Giải bài toán (P) bằng phương pháp đơn hình hay phương pháp đơn hình mở rộng.

**Chú ý:** Khi giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình thì nhất thiết phải đưa ẩn giả vào bảng đơn hình.

**Bước 2:** Tìm phương án tối ưu của bài toán (D)

Khi tìm được bảng đơn hình có phương án tối ưu của bài toán (P) thì phương án cơ bản tối ưu của bài toán (D) có các thành phần theo công thức sau:

$$y_i^0 = c_j + \Delta_j (i = \overline{1, m})$$

Trong đó  $c_j$  là hệ số của ẩn  $x_j$  trong hàm mục tiêu của bài toán (P) và  $\Delta_j$  là hệ số ước lượng của ẩn  $x_j$  trong bảng đơn hình có phương án tối ưu với  $x_j$  là ẩn cơ bản thứ  $i$  trong bảng đơn hình thứ nhất.

### **Phương pháp 2:** Phương pháp dùng định lý độ lệch bù yếu

Nếu ta biết bài toán xuất phát (P) có phương án tối ưu là  $x^0$  thì các phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (D) có thể tìm được định lý độ lệch bù yếu như sau:

**Bước 1:** Lập hệ phương trình tối ưu của bài toán (D)

Thế phương án tối ưu  $x^0$  lần lượt vào các ràng buộc bất đẳng thức của bài toán (P): Nếu ràng buộc nào thỏa mãn  $x^0$  với dấu bất đẳng thức thật sự thì ràng buộc đối ngẫu của nó trong bài toán (D) phải thỏa mãn với dấu bằng, nghĩa là ràng buộc đó trở thành một phương trình. Từ đó ta được một hệ phương trình theo các biến của bài toán (D), ta gọi hệ phương trình này là hệ phương trình tối ưu của bài toán (D).

**Bước 2:** Giải hệ phương trình tối ưu.

Hệ phương trình tối ưu là một hệ phương trình tuyến tính nên ta sử dụng các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính để tìm nghiệm của hệ phương trình tối ưu.

**Bước 3:** Tìm phương án tối ưu của bài toán (D).

Thế nghiệm của hệ phương trình tối ưu vào các ràng buộc còn lại của bài toán (D): Những nghiệm của hệ phương trình tối ưu thỏa mãn các ràng buộc còn lại của bài toán (D) là tập phương án tối ưu của (D).

Ví dụ 1: Cho bài toán QHTT (P) sau:

$$(1) \quad f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \leq 3 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 4})$$

a. Giải bài toán (P)

b. Lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) và giải bài toán (D)

Giải:

a. Thêm vào bài toán (P) 3 ẩn phụ  $x_5, x_6, x_7$  thì ta được bài toán có dạng chuẩn rồi giải bằng phương pháp đơn hình như sau:

| Hệ số | Ân cơ bản | Phương án | 2     | 4     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | $\lambda_i$ |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |             |
| 2     | $x_1$     | 1         | 1     | 3     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |             |
| 0     | $x_6$     | 3         | 0     | -5    | 0     | -2    | 0     | 1     | 0     |             |
| 0     | $x_7$     | 3         | 0     | 1     | 4     | 1     | 0     | 0     | 1     |             |
|       | f(x)      | 2         | 0     | 2     | -1*   | 1     | 2     | 0     | 0     |             |
| 2     | $x_1$     | 1         | 1     | 3     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     |             |
| 0     | $x_6$     | 3         | 0     | -5    | 0     | -2    | 0     | 1     | 0     |             |
| 1     | $x_3$     | 3/4       | 0     | 1/4   | 1     | 1/4   | 0     | 0     | 1/4   |             |
|       | f(x)      | 11/4      | 0     | 9/4   | 0     | 5/4   | 2     | 0     | 1/4   |             |

Trong bảng đơn hình thứ hai ta có  $\Delta_j \geq 0 (\forall j)$  nên bài toán có phương án tối ưu (duy nhất) và giá trị tối ưu là  $x^0 = (1, 0, 3/4, 0)$  với  $f(x^0) = 11/4$ .

b. Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) là:

$$(1) \quad g(y) = y_1 + 3y_2 + 3y_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 \geq 2 \\ 3y_1 - 5y_2 + y_3 \geq 4 \\ 4y_3 \geq 1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_i \geq 0 (i = \overline{1, 3})$$

Theo câu a thì trong bảng đơn hình thứ nhất:

- Ẩn cơ bản thứ nhất là  $x_1$
- Ẩn cơ bản thứ hai là  $x_6$
- Ẩn cơ bản thứ ba là  $x_7$

Có hệ số trong hàm mục tiêu lần lượt là 2, 0, 0 và hệ số ước lượng của các ẩn  $x_1, x_6, x_7$  trong bảng đơn hình cuối cùng là 0, 0, 1/4 nên ta có:

$$y_1^0 = 2 + 0 = 2; y_2^0 = 0 + 0 = 0; y_3^0 = 0 + 1/4 = 1/4$$

Do đó theo phương pháp đơn hình đối ngẫu, bài toán (D) có phương án tối ưu là:

$$y^0 = (2, 0, 1/4) \text{ với } g(y^0) = 11/4$$

Chú ý: Trong bảng đơn hình thứ nhất có 2 cột đơn vị thứ nhất nên ta có thể chọn một trong hai ẩn tương ứng làm ẩn cơ bản thứ nhất. Trong lời giải trên, ta chọn  $x_1$  làm ẩn cơ bản thứ nhất.

Ví dụ 2: Cho bài toán QHTT (P) sau:

$$(1) \quad f(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \geq 15 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 \geq 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 10 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \leq 0$$

Cho biết bài toán (P) có phương án tối ưu là  $x^0 = (7, 0, -9)$ . Hãy lập và giải bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P).

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) là:

$$(1) \quad g(y) = 15y_1 + 8y_2 + 10y_3 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} -3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 3 \\ 2y_1 - y_2 + 2y_3 \leq 4 \\ -4y_1 - 5y_2 + 2y_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_i \geq 0 (i = \overline{1, 3})$$

Do bài toán (P) đã cho có phương án tối ưu là  $x^0 = (7, 0, -9)$  nên theo định lý 3 (Định lý độ lệch bù yếu) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ -3y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 3 \\ -4y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1/5 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 9/10 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có duy nhất một nghiệm và nghiệm đó thỏa mãn các ràng buộc còn lại của bài toán đối ngẫu nên (D) có PATU là  $y^0 = (1/5, 0, 9/10)$  với  $g(y^0) = 12$ .

Ví dụ 3: Cho bài toán QHTT (P) sau:

$$(1) \quad f(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_4 + 5x_5 = 14 \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_4 + 3x_5 = 8 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 5})$$

a. Giải bài toán (P)

b. Lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu. Tìm tập phương án tối ưu của bài toán (D)

Giải:

a. Lập bài toán mở rộng của bài toán (P) rồi giải bằng phương pháp đơn hình như sau:



| Hệ số | Ân cơ bản | Phương án | -2    | 3     | 1     | 1     | -4     | $\lambda_i$        |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------------------|
|       |           |           | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$  |                    |
| 1     | $x_3$     | 9         | 3     | -2    | 1     | -4    | 2      | $\lambda_1 = 3$    |
| -M    | $x_6$     | 14        | 7     | -3    | 0     | -7    | 5      | $\lambda_2 = 2^*$  |
| -M    | $x_7$     | 8         | 4     | -2    | 0     | -4    | 3      | $\lambda_3 = 2$    |
|       | f(x)      | 9         | 5     | -5    | 0     | -5    | 6      |                    |
|       |           | -22M      | -11M* | 5M    | 0     | 11M   | -8M    |                    |
| 1     | $x_3$     | 3         | 0     | -5/7  | 1     | -1    | -1/7   | $\lambda_2 = 14/5$ |
| -2    | $x_1$     | 2         | 1     | -3/7  | 0     | -1    | 5/7    |                    |
| -M    | $x_7$     | 0         | 0     | -2/7  | 0     | 0     | 1/7    |                    |
|       | f(x)      | -1        | 0     | -20/7 | 0     | 0     | 17/7   |                    |
|       |           | 0         | 0     | 2/7M  | 0     | 0     | -1/7M* |                    |
| 1     | $x_3$     | 3         | 0     | -1    | 1     | -1    | 0      |                    |
| -2    | $x_1$     | 2         | 1     | 1     | 0     | -1    | 0      |                    |
| -4    | $x_5$     | 0         | 0     | -2    | 0     | 0     | 1      |                    |
|       | f(x)      | -1        | 0     | 2     | 0     | 0     | 0      |                    |

Bài toán (P) có PATU là  $x^0 = (2, 0, 3, 0, 0)$  với  $f(x^0) = -1$

b. Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) là:

$$(1) \quad g(y) = 9y_1 + 14y_2 + 8y_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3y_1 + 7y_2 + 4y_3 \geq -2 \\ -2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 1 \\ -4y_1 - 7y_2 - 4y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq -4 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_i \text{ tùy ý } (i = \overline{1,3})$$

Bài toán (P) có 3 điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 5 cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

|              |                   |                              |
|--------------|-------------------|------------------------------|
| $x_1 \geq 0$ | $\leftrightarrow$ | $3y_1 + 7y_2 + 4y_3 \geq -2$ |
| $x_2 \geq 0$ | $\leftrightarrow$ | $-2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \geq 3$ |
| $x_3 \geq 0$ | $\leftrightarrow$ | $y_1 \geq 1$                 |
| $x_4 \geq 0$ | $\leftrightarrow$ | $-4y_1 - 7y_2 - 4y_3 \geq 1$ |
| $x_5 \geq 0$ | $\leftrightarrow$ | $2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq -4$ |

Do bài toán (P) có PATU là  $x^0 = (2, 0, 3, 0, 0)$  nên theo định lý 3 (Định lý độ lệch bù yếu) ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3y_1 + 7y_2 + 4y_3 = -2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = -(7\alpha + 5)/4 \end{cases} \quad \text{với } \alpha \in \mathbb{R}$$

Thế các nghiệm trên vào 3 ràng buộc còn lại của bài toán (D) ta được

$$\begin{cases} -2y_1 - 3y_2 - 2y_3 = -2 \times 1 - 3\alpha - 2[-(7\alpha + 5)/4] \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq 5(1) \\ -4y_1 - 7y_2 - 4y_3 = -4 \times 1 - 7\alpha - 4[-(7\alpha + 5)/4] \geq 1 \Rightarrow 0\alpha \geq 0(2) \\ 2y_1 + 5y_2 + 3y_3 = 2 \times 1 + 5\alpha + 3[-(7\alpha + 5)/4] \geq -4 \Rightarrow \alpha \leq 9(3) \end{cases}$$

Hệ (1), (2), (3) thỏa mãn với  $\alpha \in [5; 9]$

Vậy tập các PATU của bài toán (D) là  $y^0 = (1, \alpha, -(7\alpha + 5)/4)$  với  $\alpha \in [5; 9]$

❖ Phương pháp giải bài toán có dạng đặc biệt

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{Min}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n.$$

Trong đó:  $c_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n$ .

**Bước 1:** Lập bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P) trên có dạng

$$g(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \text{Max}$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2$$

.....

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n$$

$$y_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, m$$

**Bước 2:** Giải bài toán (D) bằng phương pháp đơn hình

Thêm vào bài toán (D)  $n$  ẩn phụ  $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$  thì ta được bài toán có dạng chuẩn và giải bài toán đó bằng phương pháp đơn hình.

**Bước 3:** Kết luận

Khi xuất hiện bảng đơn hình có các hệ số ước lượng đều không âm thì phương án tối ưu của bài toán (P) là:  $x^0 = (\Delta_{m+1}, \Delta_{m+1}, \dots, \Delta_{m+n})$ .

Trong đó  $\Delta_{m+j}$  là hệ số ước lượng của ẩn phụ  $y_{m+j}; j = 1, 2, \dots, n$ .

**Chú ý:** Nếu bài toán (D) không có phương án tối ưu thì bài toán (P) cũng không có phương án tối ưu.

Ví dụ 1: Giải bài toán QHTT (P) sau

$$(1) \quad f(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 4x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 3})$$

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P):

$$(1) \quad g(y) = 2y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_4 \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_2 + 4y_3 + y_4 \leq 3 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_i \geq 0 (i = \overline{1, 4})$$

Thêm vào bài toán (D) 3 ẩn phụ  $y_5, y_6, y_7$  thì ta được bài toán có dạng chuẩn rồi giải bằng phương pháp đơn hình như sau:

| Hệ số | Ấn cơ bản | Phương án | 2          | 4        | 1        | 1     | 0     | 0     | 0     | $\lambda_i$         |
|-------|-----------|-----------|------------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|---------------------|
|       |           |           | $y_1$      | $y_2$    | $y_3$    | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ |                     |
| 0     | $y_5$     | 1         | 1          | <u>3</u> | 0        | 1     | 1     | 0     | 0     | $\lambda_1 = 1/3^*$ |
| 0     | $y_6$     | 3         | 2          | 1        | 0        | 0     | 0     | 1     | 0     | $\lambda_2 = 3$     |
| 0     | $y_7$     | 3         | 0          | 1        | 4        | 1     | 0     | 0     | 1     | $\lambda_3 = 3$     |
|       | $g(y)$    | 0         | -2         | -4*      | -1       | -1    | 0     | 0     | 0     |                     |
| 4     | $y_2$     | 1/3       | 1/3        | 1        | 0        | 1/3   | 1/3   | 0     | 0     |                     |
| 0     | $y_6$     | 8/3       | 5/3        | 0        | 0        | -1/3  | -1/3  | 1     | 0     |                     |
| 0     | $y_7$     | 8/3       | -1/3       | 0        | <u>4</u> | 2/3   | -1/3  | 0     | 1     |                     |
|       | $g(y)$    | 4/3       | -2/3       | 0        | -1*      | 1/3   | 4/3   | 0     | 0     |                     |
| 4     | $y_2$     | 1/3       | <u>1/3</u> | 1        | 0        | 1/3   | 1/3   | 0     | 0     | $\lambda_1 = 1^*$   |
| 0     | $y_6$     | 8/3       | 5/3        | 0        | 0        | -1/3  | -1/3  | 1     | 0     | $\lambda_2 = 8/5$   |
| 1     | $y_3$     | 2/3       | -1/2       | 0        | 1        | 1/6   | -1/12 | 0     | 1/4   |                     |
|       | $g(y)$    | 2         | -3/4*      | 0        | 0        | 1/2   | 5/4   | 0     | 1/4   |                     |

|   |        |      |   |     |   |     |    |   |     |  |
|---|--------|------|---|-----|---|-----|----|---|-----|--|
| 2 | $y_1$  | 1    | 1 | 3   | 0 | 1   | 1  | 0 | 0   |  |
| 0 | $y_6$  | 1    | 0 | -5  | 0 | -2  | -2 | 1 | 0   |  |
| 1 | $y_3$  | 3/4  | 0 | 1/4 | 1 | 1/4 | 0  | 0 | 1/4 |  |
|   | $g(y)$ | 11/4 | 0 | 9/4 | 0 | 5/4 | 2  | 0 | 1/4 |  |

Trong bảng đơn hình thứ tư ta có  $\Delta_i \geq 0 (\forall i)$  nên bài toán (D) có PATU là  $y^0 = (1, 0, 3/4, 0)$  với  $g(y^0) = 11/4$

Khi đó bài toán (P) có PATU là  $x^0 = (\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7) = (2, 0, 1/4)$  với  $f(x^0) = 11/4$

Ví dụ 2: Giải bài toán QHTT (P) sau

$$(1) \quad f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_4 \geq 14 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \geq 13 \\ -x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 10 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1, 4})$$

Giải:

Bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P):

$$(1) \quad g(y) = 14y_1 + 13y_2 + 10y_4 \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_4 \leq 5 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \leq 2 \\ -3y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 3 \\ -4y_1 + y_2 - 3y_4 \leq 4 \end{cases}$$

$$(3) \quad y_i \geq 0 (i = \overline{1, 4})$$

Thêm vào bài toán (D) 4 ẩn phụ  $y_5, y_6, y_7, y_8$  thì ta được bài toán có dạng chuẩn rồi giải bằng phương pháp đơn hình. Đến bảng thứ năm ta có PATU và giá trị tối ưu của bài toán (P) là  $x^0 = (0, 22, 11, 2)$  với  $f(x^0) = 85$

❖ Phương pháp đối ngẫu:

Nội dung phương pháp:

Khi gặp bài toán quy hoạch tuyến tính (P) khó giải thì rất có thể bài toán đối ngẫu (D) của nó sẽ dễ giải hơn. Với những bài toán quy hoạch tuyến tính như vậy ta có thể giải theo các bước sau mà ta gọi là phương pháp đối ngẫu:

**Bước 1:** Lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P).

**Bước 2:** Giải bài toán (D) bằng phương pháp hình học hay phương pháp đơn hình.

**Bước 3:** Tìm lời giải của bài toán (P).

- 1) Nếu bài toán (D) không có phương án tối ưu thì bài toán (P) cũng không có phương án tối ưu.
- 2) Nếu bài toán (D) có phương án tối ưu thì bài toán (P) cũng có phương án tối ưu. Phương án tối ưu của bài toán (D) có thể tìm được từ phương án tối ưu của bài toán (P) bằng cách sử dụng định lý độ lệch bù yếu. Giá trị tối ưu của hai bài bằng nhau.

❖ Phương pháp chứng tỏ tính tối ưu của một phương án:

Giả sử  $x^0$  là một phương án của bài toán quy hoạch tuyến tính (P).

Để chứng tỏ  $x^0$  là phương án tối ưu hay không phải là phương án tối ưu của bài toán (P) ta tiến hành theo các bước sau:

**Bước 1:** Lập bài toán đối ngẫu (D) của bài toán (P).

**Bước 2:** Tìm và giải hệ phương trình tối ưu của bài toán (D).

Ta giả sử  $x^0$  là phương án tối ưu của bài (P) rồi áp dụng định lý độ lệch bù yếu để tìm hệ phương trình tối ưu đối với các ẩn  $y_1, y_2, \dots, y_m$  của bài toán (D) và giải hệ phương trình đó.

**Bước 3:** Chứng tỏ tính tối ưu của phương án  $x^0$

- 1) Nếu hệ phương trình tối ưu vô nghiệm thì ta kết luận  $x^0$  không phải là phương án tối ưu của bài toán (P).
- 2) Nếu hệ phương trình tối ưu có nghiệm là  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_m^0)$  thì ta thế nghiệm đó vào các ràng buộc còn lại của bài toán (D).

Có thể xảy ra hai trường hợp:

1. Nghiệm  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_m^0)$  không thỏa mãn một ràng buộc nào đó trong các ràng buộc còn lại của bài toán (D). Khi đó  $y^0$  không phải là phương án tối ưu của bài toán (D) và  $x^0$  cũng không là phương án tối ưu của bài toán (P).

2. Nghiệm  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_m^0)$  thỏa mãn các ràng buộc còn lại của bài toán (D). Khi đó  $y^0$  là phương án tối ưu cả bài toán (D) và  $x^0$  là phương án tối ưu của bài toán (P).

## CHƯƠNG 4: BÀI TOÁN VẬN TẢI

### 4.1. Nội dung của các bài toán vận tải - Dạng bảng của bài toán vận tải

#### 4.1.1. Định nghĩa:

Một bài toán vận tải với  $m$  trạm phát  $A_1, A_2, \dots, A_m$  có lượng hàng cần phát ra tương ứng  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ;  $n$  trạm thu  $B_1, B_2, \dots, B_n$  có lượng hàng cần nhập vào tương ứng  $b_1, b_2, \dots, b_n$  và có cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hóa từ trạm phát  $A_i$  đến trạm thu  $B_j$  là  $c_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) với yêu cầu các trạm phát phải phát hết lượng hàng đang có, các trạm thu phải nhập đủ lượng hàng có nhu cầu và tổng số tiền phải chi cho vận chuyển hàng hóa phải thấp nhất là bài toán có dạng sau:

| Thu<br>Phát | $B_1$<br>$b_1$ | $B_2$<br>$b_2$ | ... | $B_n$<br>$b_n$ |
|-------------|----------------|----------------|-----|----------------|
| $A_1 : a_1$ | $c_{11}$       | $c_{12}$       | ... | $c_{1n}$       |
| $A_2 : a_2$ | $c_{21}$       | $c_{22}$       |     | $c_{2n}$       |
| ...         | ...            | ...            | ... | ...            |
| $A_m : a_m$ | $c_{m1}$       | $c_{m2}$       | ... | $c_{mn}$       |

Chú ý: Bài toán trên chỉ có nghĩa khi có điều kiện

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

Với điều kiện đó ta còn gọi bài toán vận tải đã cho là bài toán cân bằng thu phát hay bài toán vận tải đóng.

#### 4.2. Mô hình toán học của bài toán vận tải:

Nếu gọi  $x_{ij}$  là khối lượng hàng hóa ta sẽ vận chuyển từ trạm phát  $A_i$  đến trạm thu  $B_j$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) thì mô hình toán học của bài toán vận tải được cho như trên nó có dạng sau:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$



$$x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

### ❖ Phương án của bài toán vận tải

Một phương án của bài toán vận tải là một cách vận chuyển hàng hóa từ các trạm phát đến các trạm thu sao cho các trạm phát phát hết hàng và các trạm thu nhận đủ hàng.

Nếu  $x_{ij}^0$  là khối lượng hàng hóa vận chuyển từ trạm phát  $A_i$  đến trạm thu  $B_j$  thì một phương án của bài toán vận tải được cho như trên là một ma trận có dạng  $X^0 = (x_{ij}^0)_{m \times n}$ , trong đó  $x_{ij}^0$  là các số không âm sao cho:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^0 = a_i (i = \overline{1, m}) \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij}^0 = b_j (j = \overline{1, n})$$

*Chú ý:* Khối lượng hàng hóa  $x_{ij}^0$  vận chuyển từ trạm phát  $A_i$  đến trạm thu  $B_j$  thường được ghi ở phía đông nam (phía dưới và bên phải) của ô nằm trên dòng  $i$  và cột  $j$  của bài toán, ta kí hiệu ô đó là ô  $(i, j)$ .

### ❖ Phương án cơ bản của bài toán vận tải

#### Ô chọn

Trong một phương án nào đó của bài toán vận tải, các ô có lượng hàng dương được gọi là các ô chọn, các ô có lượng hàng 0 được gọi là các ô loại.

*Chú ý:* Người ta thường đánh dấu “x” vào giữa ô chọn để phân biệt với các ô loại. Các ô loại ta có thể không cần ghi lượng hàng 0 vào các ô đó.

#### Vòng

Một dãy các ô chọn của một phương án nào đó của bài toán vận tải sẽ được gọi là tạo nên một vòng nếu mỗi ô trong dãy ô đó đều phải nằm trên cùng một dòng (cột) chỉ với một ô đứng trước nó đồng thời phải nằm trên cùng một cột (dòng) chỉ với một ô đứng sau nó.

Vòng thường có các dạng sau:

|   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| x |  |  | x |
|   |  |  |   |
|   |  |  |   |
| x |  |  | x |

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| x | x |  |   |
|   | x |  | x |
|   |   |  |   |
| x |   |  | x |

|   |   |  |   |
|---|---|--|---|
| x | x |  |   |
|   |   |  |   |
| x |   |  | x |
|   | x |  | x |

*Chú ý:* Số ô chọn trong một vòng luôn là một số chẵn.

### ❖ Phương án cơ bản

Một phương án của bài toán vận tải được gọi là một phương án cơ bản (hay cực biên) nếu các ô chọn của phương án đó không tạo thành một vòng.

*Chú ý:* Một phương án của bài toán vận tải có từ  $m+n$  ô chọn trở lên, ở đây  $m$  là số trạm phát và  $n$  là số trạm thu của bài toán vận tải, thì luôn là một phương án không cơ bản.

### ❖ Phương án cơ bản không suy biến

Một phương án cơ bản của bài toán vận tải được gọi là phương án không suy biến nếu số ô chọn của phương án đó bằng  $m+n-1$ . Nếu số ô chọn của phương án cơ bản nhỏ hơn  $m+n-1$  thì ta gọi là phương án suy biến.

*Chú ý:* Với một phương án suy biến ta có thể bổ sung vào một số ô loại, nhưng được coi là ô chọn, để phương án đó trở thành không suy biến, nghĩa là có tổng số ô chọn là  $m+n-1$ . Số ô loại được bổ sung để phương án suy biến trở thành không suy biến được gọi là “ô chọn không”.

### ❖ Xây dựng phương án cơ bản

#### Phương pháp cước phí thấp nhất

Ưu tiên phân phối tối đa hàng lần lượt vào các ô có cước phí thấp nhất cho đến khi các trạm phát phát hết hàng và các trạm thu nhận đủ hàng.

*Chú ý:*

a) Trong quá trình tìm phương án của một bài toán vận tải, khi ta xác định được  $x_{ij}^0 = \alpha$  thì ta nói rằng đã phân phối vào ô  $(i, j)$  một lượng hàng  $\alpha$ .

b) Phân phối tối đa vào ô  $(i, j)$  có nghĩa là lượng hàng phân phối vào ô đó là  $x_{ij}^0 = \max\{a_i, b_j\}$ .

c) Để dễ dàng xác định ô được phân phối hàng kế tiếp và lượng hàng tối đa phân phối vào ô đó ta phải điều chỉnh lại lượng hàng trong các trạm đã thu và phát hàng và loại bỏ các ô không thể được phân phối hàng (ghi lượng hàng 0 vào ô đó).

### ❖ Tính chất của bài toán vận tải

*Tính chất 1:* Một bài toán vận tải đều có phương án tối ưu.

*Tính chất 2:* Số ô chọn trong một phương án cơ bản của một bài toán vận tải không bao giờ vượt quá  $m+n-1$  ô.

**Tính chất 3:** Khi ta thêm vào một phương án cơ bản không suy biến của một bài toán vận tải một ô chọn thì bao giờ ô chọn đó cũng tạo với một số ô chọn của phương án thành một vòng duy nhất.

❖ **Tiêu chuẩn tối ưu của một phương án của bài toán vận tải**

Cho một bài toán vận tải có mô hình toán học là bài toán quy hoạch tuyến tính (P) sau:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \text{Min}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = a_j \quad (j = \overline{1, n})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

và  $x^0 = (x_{ij}^0)$  là một phương án cơ bản không suy biến của bài toán (P).

Bài toán đối ngẫu (D) và (P) là:

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \text{Max}$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

Theo định lý độ lệch bù thì: Điều kiện cần và đủ để  $x^0 = (x_{ij}^0)$  là phương án tối ưu của bài toán (P) là tồn tại phương án  $(u_i; v_j)$  của bài toán (D) sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau:

- (i)  $u_i + v_j \leq c_{ij} ; \forall i, j$
- (ii)  $u_i + v_j \leq c_{ij} ; \text{ nếu } x_{ij}^0 > 0$

Như vậy với phương án cơ bản không suy biến  $X^0 = (x_{ij}^0)_{m \times n}$  của bài toán vận tải đã cho:

1) Nếu ta chọn được một hệ thống  $(u_i; v_j)$ , gọi là hệ thống thế vị, thỏa mãn hai điều kiện trên thì  $X^0 = (x_{ij}^0)_{m \times n}$  là một phương án tối ưu của bài toán vận tải đã cho.

2) Nếu ta không chọn được một hệ thống  $(u_i; v_j)$  nào thỏa mãn hai điều kiện trên thì  $X^0 = (x_{ij}^0)_{m \times n}$  chưa phải là một phương án tối ưu của bài toán vận tải đã cho.

### ❖ Phương pháp giải bài toán vận tải

Phương pháp giải bài toán vận tải được xây dựng trên cơ sở: Xuất phát từ một phương án cơ bản không suy biến người ta áp dụng tiêu chuẩn tối ưu trên để đánh giá tính tối ưu của phương án đó. Nếu phương án cơ bản đó tối ưu thì thuật toán kết thúc. Nếu phương án cơ bản đó không tối ưu thì người ta xây dựng cách sửa đổi phương án đó để được một phương án cơ bản mới tốt hơn rồi lại áp dụng tiêu chuẩn tối ưu đó để đánh giá tính tối ưu của phương án mới. Do số phương án cơ bản của một bài toán vận tải luôn hữu hạn và bài toán vận tải luôn có phương án tối ưu nên sau một quá trình hữu hạn lần thực hiện liên tục các bước trên ta sẽ tìm được phương án tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán.

### ❖ Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Một bài toán vận tải có tổng lượng hàng phát ra của các trạm phát không bằng tổng lượng hàng thu vào của các trạm thu thì gọi là bài toán vận tải không cân bằng thu phát hay bài toán vận tải mở.

Phương pháp giải các bài toán không cân bằng thu phát là lập thêm trạm thu hay phát phụ để đưa bài toán trở về dạng cân bằng thu phát rồi giải bài toán cân bằng thu phát đó. Sau khi tìm được phương án tối ưu của bài toán cân bằng thu phát, ta loại bỏ dòng hay cột của trạm phụ thì sẽ được phương án tối ưu của bài toán không cân bằng thu phát.

### ❖ Bài toán vận tải có ô cấm

Trong thực tế vận tải, có một số trường hợp ta không thể vận chuyển hàng hóa trên một số tuyến đường vì một số lí do như: cầu, phà, đường sá bị hư hỏng; cự li quá xa không thể chuyển hàng đến đúng thời gian quy định; kế hoạch vận tải phải bảo đảm cho một trạm phát nào đó phải phát hết hàng hay trạm thu nào đó phải nhận đủ hàng khi bài toán không cân bằng thu phát; vì lí do an ninh;... Khi đó các ô trên bảng của bài toán vận tải ứng với các tuyến đường đó gọi là ô cấm và bài toán vận tải trong trường hợp này gọi là bài toán vận tải có ô cấm.

Phương pháp giải bài toán có cấm là lập bài toán mở rộng của bài toán đó, bằng cách thay cước phí của các ô cấm bằng cước phí  $M$  (ở đây  $M$  là một số dương rất lớn, có ý nghĩa kinh tế là các tuyến đường này có chi phí vận chuyển rất cao), rồi giải bài toán mở rộng. Nếu phương án tối ưu của bài toán mở rộng có các lượng hàng trong các ô cấm đều bằng 0 thì bài toán gốc có phương án tối ưu và phương án tối ưu của bài toán gốc là phương án tối ưu của bài toán mở rộng. Nếu phương án tối ưu của bài toán mở rộng có ít nhất một ô cấm có lượng hàng dương thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

### ❖ Bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại

Có một số bài toán quy hoạch tuyến tính có mô hình toán học như mô hình toán học của bài toán vận tải nhưng có mục tiêu cực đại. Ta gọi các bài toán đó là bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại.

Các bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại cũng thường được trình bày dưới dạng bảng như bài toán vận tải nhưng ý nghĩa của nó là ra giá trị lớn nhất. Cách giải bài toán này về cơ bản giống như cách giải một bài toán vận tải thông thường nhưng phải chú ý các vấn đề sau:

- 1) Khi lập phương án cơ bản xuất phát thì ta phải ưu tiên phân phối vào các ô có “cước phí” lớn nhất.
- 2) Khi kết luận tính tối ưu của phương án cơ bản thì điều kiện tối ưu là các hệ số ước lượng phải không âm,
- 3) Khi tìm ô đưa vào thì ta chọn ô có hệ số ước lượng âm nhỏ nhất.

### 4.3. Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải:

#### 4.3.1. Phương pháp xây dựng phương án cơ bản xuất phát bằng phương pháp cước phí thấp nhất

Để tìm phương án cơ bản sản xuất bằng phương pháp cước phí thấp nhất ta thực hiện theo các bước sau:

**Bước 1:** Tìm ô có cước phí thấp nhất và phân phối tối đa hàng vào ô đó.

**Bước 2:** Điều chỉnh lại lượng hàng của các trạm thu và phát đã giao nhận hàng và bỏ đi các ô nằm trên dòng (hay cột) có trạm thu hay phát có lượng hàng 0.

**Bước 3:** Tìm ô có cước phí thấp nhất trong các ô còn lại và phân phối tối đa hàng vào ô đó.

**Bước 4:** Thực hiện như bước 2.

Thực hiện quá trình đó liên tục cho tới khi các trạm phát phát hết hàng và các trạm thu nhận đủ hàng thì ta được một phương án cơ bản của bài toán.

Ví dụ 1: Tìm phương án cơ bản xuất phát của bài toán vận tải sau:

|            | $B_1 : 20$ | $B_2 : 40$ | $B_3 : 30$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $A_1 : 30$ | 1          | 3          | 5          |
| $A_2 : 25$ | 5          | 4          | 2          |
| $A_3 : 35$ | 8          | 5          | 4          |

Giải: Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, ta được phương án cơ bản xuất phát sau:

|            | $B_1 : 20$   | $B_2 : 40$   | $B_3 : 30$   |
|------------|--------------|--------------|--------------|
| $A_1 : 30$ | 1<br>x<br>20 | 3<br>x<br>10 | 5<br>0       |
| $A_2 : 25$ | 5<br>0       | 4<br>0       | 2<br>x<br>25 |
| $A_3 : 35$ | 8<br>0       | 5<br>x<br>30 | 4<br>x<br>5  |

Phương án cơ bản này có số ô chọn là  $5 = 3 + 3 - 1$  nên phương án cơ bản đó là phương án không suy biến.

Ví dụ 2: Tìm phương án cơ bản xuất phát của bài toán vận tải sau:

|             | $B_1 : 40$ | $B_2 : 75$ | $B_3 : 60$ | $B_4 : 70$ |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| $A_1 : 45$  | 82         | 73         | 74         | 79         |
| $A_2 : 90$  | 80         | 75         | 81         | 79         |
| $A_3 : 110$ | 80         | 77         | 77         | 82         |

Giải: Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, ta được phương án cơ bản xuất phát sau:

|             | $B_1 : 40$    | $B_2 : 75$    | $B_3 : 60$    | $B_4 : 70$    |
|-------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $A_1 : 45$  | 82<br>0       | 73<br>x<br>45 | 74<br>0       | 79<br>0       |
| $A_2 : 90$  | 80<br>0       | 75<br>x<br>30 | 81<br>0       | 79<br>x<br>60 |
| $A_3 : 110$ | 80<br>x<br>40 | 77<br>0       | 77<br>x<br>60 | 82<br>x<br>10 |

Phương án cơ bản này có số ô chọn là  $6 = 3 + 4 - 1$  nên phương án cơ bản đó là phương án không suy biến.

Ví dụ 3: Tìm phương án cơ bản xuất phát của bài toán vận tải sau:

|            | $B_1 : 25$ | $B_2 : 25$ | $B_3 : 10$ |
|------------|------------|------------|------------|
| $A_1 : 10$ | 5          | 3          | 1          |
| $A_2 : 30$ | 7          | 6          | 8          |
| $A_3 : 20$ | 3          | 2          | 2          |

Giải: Bằng phương pháp cước phí thấp nhất, ta được phương án cơ bản xuất phát sau:

|            | $B_1 : 25$   | $B_2 : 25$   | $B_3 : 10$   |
|------------|--------------|--------------|--------------|
| $A_1 : 10$ | 5<br><br>0   | 3<br><br>0   | 1<br>x<br>10 |
| $A_2 : 30$ | 7<br>x<br>25 | 6<br>x<br>5  | 8<br><br>0   |
| $A_3 : 20$ | 3<br><br>0   | 2<br>x<br>20 | 2<br><br>0   |



Phương án cơ bản này có số ô chọn là  $4 < 3+3-1=5$  nên phương án cơ bản đó là phương án suy biến.

#### **4.3.2. Phương pháp giải bài toán vận tải bằng phương pháp thế vị**

Để giải bài toán vận tải bằng phương pháp thế vị, ta có thể thực hiện theo các bước như sau:

**Bước 1:** Lập phương án cơ bản không suy biến xuất phát

1) Xây dựng phương án cơ bản xuất phát bằng phương pháp “cước phí thấp nhất”.

2) Kiểm tra tính không suy biến của phương án cơ bản xuất phát:

Trường hợp 1: Nếu tổng số ô chọn là  $m + n - 1$  thì phương án cơ bản xuất phát là phương án không suy biến, ta chuyển qua bước 2.

Trường hợp 2: Nếu tổng số ô chọn  $< m + n - 1$  ô thì ta phải bổ sung vào phương án cơ bản xuất phát một số “ô chọn không” để được một phương án không suy biến trước khi chuyển qua bước 2.

**Bước 2:** Đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản xuất phát

1) Xây dựng hệ thống thế vị  $(u_i; v_j)$ .

Hệ thống thế vị  $(u_i; v_j)$  của phương án cơ bản xuất phát được xây dựng theo công thức  $u_i + v_j = c_{ij}$  như sau:

+ Cho thế vị dòng  $u_1$  nhận một giá trị tùy ý và ghi bên phải dòng 1 của bảng (thường cho  $u_1 = 0$ ).

+ Tìm trên dòng 1 ô chọn  $(1, j)$  và lấy cước phí  $c_{1j}$  của ô chọn đó trừ cho thế vị dòng  $u_1$  ta sẽ được thế vị cột  $v_j$  tương ứng và ghi phía dưới cột  $j$  của bảng.

+ Biết thế vị cột  $v_j$ , ta tìm trên cột  $j$  ô chọn  $(i, j)$  và lấy cước phí  $c_{ij}$  của ô chọn đó trừ cho  $v_j$  ta được thế vị dòng  $u_i$  tương ứng và ghi bên phải dòng  $i$  của bảng.

+ Biết thế vị dòng  $u_i$ , ta tìm trên dòng  $i$  ô chọn  $(i, j')$  và lấy cước phí  $c_{ij'}$  của ô chọn đó trừ cho  $u_i$  ta được thế vị cột  $v_{j'}$  tương ứng và ghi bên phải dòng  $j'$  của bảng.

Quá trình đó được thực hiện liên tục cho đến khi xác định được toàn bộ hệ thống thể vị  $(u_i; v_j)$ .

## 2) Tính các hệ số ước lượng $\Delta_{ij}$ .

Các hệ số ước lượng của các ô được tính theo quy tắc sau:

- + Hệ số ước lượng của các ô chọn là 0
- + Hệ số ước lượng của các ô loại  $(i, j)$  được tính theo công thức

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

*Chú ý:* Hệ số ước lượng của mỗi ô được ghi ở phía đông bắc của ô đó. Các ô chọn có thể không cần ghi hệ số ước lượng 0.

## 3) Đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản xuất phát.

Trường hợp 1: Nếu các hệ số ước lượng ở các ô đều không dương thì phương án cơ bản xuất phát là phương án tối ưu của bài toán, thuật toán kết thúc với phương án tối ưu là phương án cơ bản xuất phát.

Trường hợp 2: Nếu có một ô loại có hệ số ước lượng dương thì phương án cơ bản xuất phát chưa tối ưu, thuật toán tiếp tục bằng cách lập phương án cơ bản mới.

*Chú ý:* Nếu các hệ số ước lượng của các ô loại đều là số âm thì phương án cơ bản xuất phát là phương án tối ưu duy nhất của bài toán. Ngược lại thì bài toán có thể có nhiều phương án cơ bản tối ưu.

### **Bước 3:** Xây dựng phương án cơ bản mới

Để xây dựng phương án cơ bản mới ta thực hiện theo các bước sau:

#### 1) Tìm ô loại đưa vào hệ thống ô chọn

Ô loại được chọn đưa vào làm ô chọn trong phương án cơ bản mới là ô có hệ số ước lượng dương lớn nhất.

## 2) Tìm ô đưa ra khỏi hệ thống ô chọn

Để xác định được ô đưa ra khỏi hệ thống ô chọn ta phải thực hiện các công việc sau:

+ Tìm vòng điều chỉnh: Từ ô chọn mới đưa vào ta nối với các ô chọn còn lại để tìm một vòng gọi là vòng điều chỉnh.

+ Xác định ô chẵn, lẻ trong vòng điều chỉnh: Lấy ô mới đưa vào làm ô số 1, ta đánh số các ô trong vòng điều chỉnh. Các ô 1, 3,... là các ô lẻ; các ô 2, 4,... là các ô chẵn. (Các ô lẻ ta ghi dấu +, các ô chẵn ta ghi dấu - ở phía dưới, bên trái của ô).

+ Tìm ô chẵn có lượng hàng nhỏ nhất.

Ô chẵn có lượng hàng  $q$  nhỏ nhất là ô được đưa ra khỏi hệ thống ô chọn. Lượng hàng  $q$  gọi là lượng hàng điều chỉnh.

## 3) Cải tiến phương án

Phương án cơ bản mới được xây dựng theo các quy tắc sau:

+ Các ô lẻ trong vòng điều chỉnh được cộng vào lượng hàng điều chỉnh.

+ Các ô chẵn trong vòng điều chỉnh bị trừ đi lượng hàng điều chỉnh.

+ Các ô còn lại giữ nguyên lượng hàng.

**Bước 4:** Đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản mới

Việc đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản mới được thực hiện như bước 2.

Thuật toán sẽ kết thúc sau một số hữu hạn lần xây dựng phương án cơ bản. Khi đó ta sẽ tìm được phương án tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán vận tải.

*Chú ý:*

a) Khi bổ sung “ô chọn không” hay chọn ô đưa vào: nếu có nhiều ô cùng thỏa mãn điều kiện thì ta nên ưu tiên chọn các ô ở phía tây-bắc (phía trên và bên trái) của bảng.

b) Khi tìm ô đưa ra, nếu lượng hàng nhỏ nhất trong các ô chẵn của vòng điều chỉnh là 0 thì ô đó vẫn được chọn làm ô đưa ra. Trong trường hợp này, phương án cơ bản vẫn không thay đổi nhưng hệ thống ô chọn có thay đổi, kết quả đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản có thể khác.

**Ví dụ 1:** Giải bài toán vận tải sau:

|    | 20 | 40 | 30 |
|----|----|----|----|
| 30 | 1  | 3  | 5  |
| 25 | 5  | 4  | 2  |
| 35 | 8  | 5  | 4  |

**Giải:** Bằng phương pháp “cước phí nhỏ nhất” ta lập được phương án cơ bản xuất phát sau:

|    | 20           | 40           | 30           |
|----|--------------|--------------|--------------|
| 30 | 1<br>x<br>20 | 3<br>x<br>10 | 5<br>0       |
| 25 | 5<br>0       | 4<br>0       | 2<br>x<br>25 |
| 35 | 8<br>0       | 5<br>x<br>30 | 4<br>x<br>5  |

Số ô chọn là  $5 = 3 + 3 - 1$  nên phương án trên không suy biến.

Xây dựng hệ thống thế vị và tính các hệ số ước lượng của phương án cơ bản trên ta được kết quả như sau:

|              |              |              |           |
|--------------|--------------|--------------|-----------|
| 1<br>x<br>20 | 3<br>x<br>10 | 5<br>-3<br>0 | $u_1 = 0$ |
| 5<br>-4<br>0 | 4<br>-1<br>0 | 2<br>x<br>25 | $u_2 = 0$ |
| 8<br>-5<br>0 | 5<br>x<br>30 | 4<br>x<br>5  | $u_3 = 2$ |
| $v_1 = 1$    | $v_2 = 3$    | $v_3 = 2$    |           |

Các hệ số ước lượng của các ô trong phương án cơ bản trên đều không dương nên phương án cơ bản xuất phát là phương án tối ưu của bài toán.

Phương án tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 20 & 5 \end{bmatrix}$$

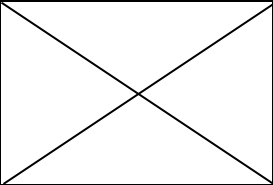
$$f(X^0) = 1 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 25 + 5 \cdot 30 + 4 \cdot 5 = 270$$

Hệ số ước lượng của các ô loại trong phương án cơ bản trên đều âm nên phương án tối ưu trên là phương án tối ưu duy nhất của bài toán.

**Ví dụ 2:** Giải bài toán vận tải sau:

|     | 40 | 75 | 60 | 70 |
|-----|----|----|----|----|
| 45  | 82 | 73 | 74 | 79 |
| 90  | 80 | 75 | 81 | 79 |
| 110 | 80 | 77 | 77 | 82 |

**Giải:**

|          |               |                |               |                                                                                       |           |
|----------|---------------|----------------|---------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 245      | 40            | 75             | 60            | 70                                                                                    |           |
| 45       | 82 -7<br>0    | 73<br>x<br>45  | 74 -2<br>0    | 79 -2<br>0                                                                            | $u_1 = 0$ |
| 90       | 80 -3<br>0    | 75<br>-x<br>30 | 81 -7<br>0    | 79<br>x+<br>60                                                                        | $u_2 = 2$ |
| 110      | 80<br>x<br>40 | 77<br>+x<br>0  | 77<br>x<br>60 | 82<br>x-<br>10                                                                        | $u_3 = 5$ |
| $q = 10$ | $v_1 = 75$    | $v_2 = 73$     | $v_3 = 72$    | $v_4 = 77$                                                                            |           |
|          | 82 -6<br>0    | 73<br>x<br>45  | 74 -1<br>0    | 79 -2<br>0                                                                            | $u_1 = 0$ |
|          | 80 -2<br>0    | 75<br>x<br>20  | 81 -6<br>0    | 79<br>x<br>70                                                                         | $u_2 = 2$ |
|          | 80<br>x<br>40 | 77<br>x<br>10  | 77<br>x<br>60 |  | $u_3 = 4$ |
|          | $v_1 = 76$    | $v_2 = 73$     | $v_3 = 73$    | $v_4 = 77$                                                                            |           |

Các hệ số ước lượng trong bảng trên đều không dương nên bài toán có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 45 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 70 \\ 40 & 10 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(X^0) = 73 \cdot 45 + 75 \cdot 20 + 79 \cdot 70 + 80 \cdot 40 + 77 \cdot 10 + 77 \cdot 60 = 18905$$

Hệ số ước lượng của các ô loại đều âm nên phương án tối ưu trên là phương án tối ưu duy nhất của bài toán.

**Ví dụ 3:** Giải bài toán vận tải sau:

|    | 25 | 25 | 10 |
|----|----|----|----|
| 10 | 5  | 3  | 1  |
| 30 | 7  | 6  | 8  |
| 20 | 3  | 2  | 2  |

Tìm một phương án tối ưu khác (nếu có) của bài toán.

**Giải:**

Bảng 1: Lập phương án cơ bản xuất phát bằng phương pháp cước phí thấp nhất. Số ô chọn là  $4 < 3 + 3 - 1 = 5$  nên ta bổ sung vào 1 “ô chọn không” là ô (1, 1). Xây dựng hệ thống thế vị và tính các hệ số ước lượng ta thấy hệ số ước lượng ở ô (1, 2) dương nên phương án cơ bản xuất phát chưa tối ưu.

|    | 25          | 25           | 10           |            |
|----|-------------|--------------|--------------|------------|
| 10 | 5<br>-<br>x | 3<br>+<br>x  | 1<br>10<br>x | $u_1 = 0$  |
| 30 | 7<br>+<br>x | 6<br>-<br>x  | 8<br>0<br>-5 | $u_2 = 2$  |
| 20 | 3<br>0<br>0 | 2<br>x<br>20 | 2<br>-3<br>0 | $u_3 = -2$ |
|    | $v_1 = 5$   | $v_2 = 4$    | $v_3 = 1$    |            |

Đưa ô (1, 2) vào. Vòng là dãy ô (1, 2); (2, 2); (2, 1); (1, 1); ô chẵn (1, 1) có lượng hàng là o nhỏ nhất nên (1, 1) là ô được đưa ra; lượng hàng điều chỉnh là  $d = 0$ .

Bảng 2: Xây dựng phương án cơ bản mới rồi xây dựng hệ thống thế vị và tính các hệ số ước lượng ta có các hệ số ước lượng của phương án cơ bản mới đều không dương như trong bảng 2 sau:

|           |           |           |            |
|-----------|-----------|-----------|------------|
|           | 3         | 1         |            |
|           | x         | x         |            |
|           | 0         | 10        | $u_1 = 0$  |
| 7         | 6         | 8         | -4         |
| -         | 25        | +         | 5          |
|           |           |           | $u_2 = 3$  |
| 3         | 0         | 2         | -2         |
| +         |           | -         | 20         |
|           |           |           | $u_3 = -1$ |
| $v_1 = 4$ | $v_2 = 3$ | $v_3 = 1$ |            |

Bài toán có lời giải tối ưu là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 25 & 5 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(X^0) = 1 \cdot 10 + 7 \cdot 25 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 20 = 255$$

Ô loại (3, 1) trong bảng 2 có hệ số ước lượng 0 nên phương án tối ưu trên không duy nhất.

Bảng 3: Xây dựng phương án cơ bản mới với ô được đưa vào là ô (3, 1) thì ta lập được bảng 3 như sau:



|              |              |              |            |
|--------------|--------------|--------------|------------|
|              | 3<br>x<br>0  | 1<br>x<br>10 | $u_1 = 0$  |
| 7<br>x<br>5  | 6<br>x<br>25 | 8<br>-4      | $u_2 = 3$  |
| 3<br>x<br>20 |              | 2<br>-2      | $u_3 = -1$ |
| $v_1 = 4$    | $v_2 = 3$    | $v_3 = 1$    |            |

Phương án tối ưu thứ hai của bài toán đã cho là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 5 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 4.4. Các trường hợp riêng của bài toán vận tải:

##### 4.4.1. Phương pháp giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Để giải bài toán vận tải không cân bằng thu phát, ta có thể thực hiện theo các bước như sau:

Trường hợp 1: Bài toán có tổng phát > tổng thu.

**Bước 1:** Lập trạm thu phụ.

Lập thêm một trạm thu phụ có lượng hàng cần nhập là hiệu của tổng phát với tổng thu. Các ô nằm trên cột của trạm thu phụ gọi là ô phụ có cước phí là 0. Ta gọi bài toán có lập thêm trạm thu phụ là bài toán.

**Bước 2:** Giải bài toán phụ.

Việc giải bài toán phụ được thực hiện như giải bài toán vận tải (đóng) bình thường nhưng phải chú ý: khi lập phương án cơ bản xuất phát thì ta phải ưu tiên phân phối hàng vào các ô chính trước, sau đó mới phân vào các ô phụ.

**Bước 3:** Kết luận bài toán gốc.

Phương án tối ưu của bài toán gốc là phương án tối ưu của bài toán phụ bỏ đi cột ứng với trạm thu phụ.

Trường hợp 2: Bài toán có tổng phát < tổng thu.

Việc giải bài toán này được thực hiện theo các bước như bài toán có tổng phát > tổng thu nhưng ở bước 1 ta phải lập trạm phát phụ có lượng hàng cần phát ra là hiệu của tổng thu cho tổng phát và ở bước 3 ta bỏ đi dòng ứng với trạm phát phụ.

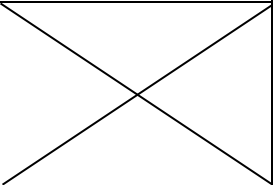
*Chú ý:* Bài toán vận tải không cân bằng thu phát cũng luôn luôn có phương án tối ưu.

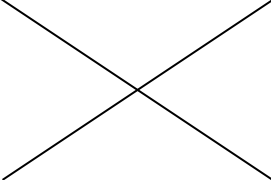
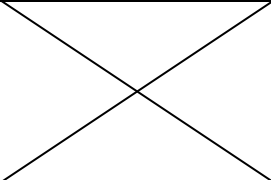
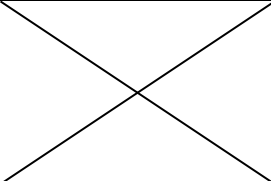
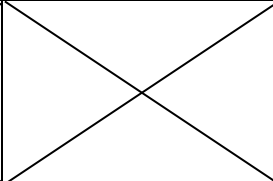
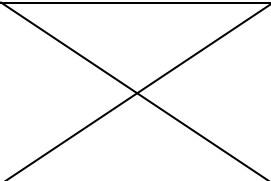
**Ví dụ 1:** Giải bài toán vận tải sau:

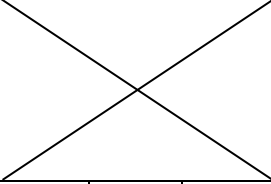
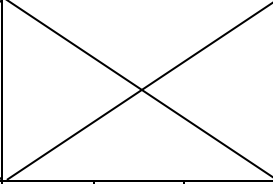
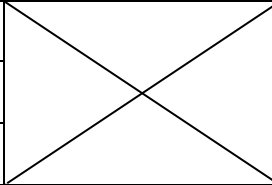
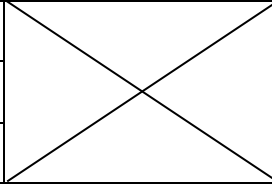
|     | 140 | 150 | 180 |
|-----|-----|-----|-----|
| 150 | 5   | 4   | 6   |
| 100 | 8   | 5   | 9   |
| 145 | 11  | 6   | 12  |
| 100 | 9   | 7   | 13  |

Giải:

Bài toán có tổng phát là 495, tổng thu là 470 nên ta lập thêm một trạm thu phụ có lượng hàng cần nhập là 25.

|          |                                                                                     |                    |                    |              |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------|-----------|
|          | 140                                                                                 | 150                | 180                | 25           |           |
| 150      | 5<br>-<br>x<br>0                                                                    | 4<br>150<br>x      | 6<br>+<br>x<br>0   | 3<br>0       | $u_1 = 0$ |
| 100      | 8<br>x<br>100                                                                       | 5<br>0             | 9<br>3<br>0        | -1<br>0      | $u_2 = 3$ |
| 145      | 11<br>-3<br>0                                                                       | 6<br>1<br>0        | 12<br>x<br>145     | -1<br>0      | $u_3 = 3$ |
| 100      | 9<br>x<br>+<br>40                                                                   | 7<br>1<br>0        | 13<br>x<br>-<br>35 | 0<br>x<br>25 | $u_4 = 4$ |
| $q = 0$  | $v_1 = 5$                                                                           | $v_2 = 4$          | $v_3 = 9$          | $v_4 = -4$   |           |
|          |  | 4<br>-<br>x<br>150 | 6<br>+<br>x<br>0   | 0<br>-7<br>0 | $u_1 = 0$ |
|          | 8<br>x<br>-<br>100                                                                  | 5<br>5<br>+<br>0   | 9<br>3<br>0        | -1<br>0      | $u_2 = 6$ |
|          | 11<br>-3<br>0                                                                       | 6<br>4<br>0        | 12<br>x<br>145     | -1<br>0      | $u_3 = 6$ |
|          | 9<br>x<br>+<br>40                                                                   | 7<br>1<br>0        | 13<br>x<br>-<br>35 | 0<br>x<br>25 | $u_4 = 7$ |
| $q = 35$ | $v_1 = 2$                                                                           | $v_2 = 4$          | $v_3 = 6$          | $v_4 = -7$   |           |

|         |                                                                                     |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                         |     |    |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|----|-----------|
|         |    | 4                                                                                                                                                                       |   | 6                                                                                                                                                                       | 0   | -2 | $u_1 = 0$ |
|         | 8                                                                                   | 5                                                                                                                                                                       | -                                                                                                                                                                   | 115                                                                                                                                                                     | +   | 35 | 0         |
|         | x                                                                                   |                                                                                        |                                                                                    | 9                                                                                                                                                                       | -2  | 0  | -1        |
|         | 65                                                                                  | 35                                                                                                                                                                      | 0                                                                                                                                                                   | 0                                                                                                                                                                       | 0   | 0  | $u_2 = 1$ |
|         | 11                                                                                  | 2                                                                                                                                                                       | 6                                                                                                                                                                   |       | 12  | 0  | 4         |
|         | 0                                                                                   | +                                                                                                                                                                       | 0                                                                                                                                                                   | -                                                                                                                                                                       | 145 | 0  | $u_3 = 6$ |
|         | 9                                                                                   | 7                                                                                                                                                                       | -1                                                                                                                                                                  |                                                                                       | 0   | x  | $u_4 = 2$ |
|         | x                                                                                   | 0                                                                                                                                                                       | 0                                                                                                                                                                   | 25                                                                                                                                                                      |     |    |           |
| q = 115 | $v_1 = 7$                                                                           | $v_2 = 4$                                                                                                                                                               | $v_3 = 6$                                                                                                                                                           | $v_4 = -2$                                                                                                                                                              |     |    |           |
|         |  |                                                                                      | 6                                                                                                                                                                   | x                                                                                                                                                                       | 0   | -6 | $u_1 = 0$ |
|         | 8                                                                                   | 5                                                                                                                                                                       | 150                                                                                                                                                                 | 0                                                                                                                                                                       | 0   | 0  |           |
|         | x                                                                                   |   | 9                                                                                                                                                                   |   | 0   | -1 | $u_2 = 5$ |
|         | 65                                                                                  | -                                                                                                                                                                       | 35                                                                                                                                                                  | +                                                                                                                                                                       | 0   | 0  |           |
|         | 11                                                                                  | -2                                                                                                                                                                      | 6                                                                                                                                                                   |   | 12  | 0  | 0         |
|         | 0                                                                                   | +                                                                                                                                                                       | 115                                                                                                                                                                 | -                                                                                                                                                                       | 30  | 0  | $u_3 = 6$ |
|         | 9                                                                                   | 7                                                                                                                                                                       | -1                                                                                                                                                                  |                                                                                     | 0   | x  | $u_4 = 6$ |
|         | x                                                                                   | 0                                                                                                                                                                       | 0                                                                                                                                                                   | 25                                                                                                                                                                      |     |    |           |
| q = 30  | $v_1 = 3$                                                                           | $v_2 = 0$                                                                                                                                                               | $v_3 = 6$                                                                                                                                                           | $v_4 = -6$                                                                                                                                                              |     |    |           |

|        |                                                                                   |   |    |                                                                                   |   |     |                                                                                    |   |     |            |   |    |           |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|----|-----------------------------------------------------------------------------------|---|-----|------------------------------------------------------------------------------------|---|-----|------------|---|----|-----------|
|        |  |   |    |  |   |     | 6                                                                                  |   |     | 0          |   | -4 | $u_1 = 0$ |
|        |                                                                                   |   |    |                                                                                   |   |     |                                                                                    | x |     |            |   |    |           |
|        |                                                                                   |   |    |                                                                                   |   |     |                                                                                    |   | 150 |            |   | 0  |           |
|        | 8                                                                                 |   |    | 5                                                                                 |   |     | 9                                                                                  |   | 2   | 0          |   | -1 | $u_2 = 3$ |
|        |                                                                                   | x |    |                                                                                   | x |     |                                                                                    | x |     |            |   |    |           |
|        |                                                                                   |   | 65 |                                                                                   |   | 5   |                                                                                    |   | 30  |            |   | 0  |           |
|        | 11                                                                                |   | -2 | 6                                                                                 |   |     |  |   |     | 0          |   | 0  | $u_3 = 4$ |
|        |                                                                                   |   |    |                                                                                   | x |     |                                                                                    |   |     |            |   |    |           |
|        |                                                                                   |   | 0  |                                                                                   |   | 145 |                                                                                    |   |     |            |   | 0  |           |
|        | 9                                                                                 |   |    | 7                                                                                 |   | -1  |  |   |     | 0          |   |    | $u_4 = 4$ |
|        |                                                                                   | x |    |                                                                                   |   |     |                                                                                    |   |     |            | x |    |           |
|        |                                                                                   |   | 75 |                                                                                   |   | 0   |                                                                                    |   |     |            |   | 25 |           |
| q = 30 | $v_1 = 5$                                                                         |   |    | $v_2 = 2$                                                                         |   |     | $v_3 = 6$                                                                          |   |     | $v_4 = -4$ |   |    |           |

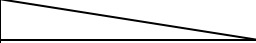
Các hệ số ước lượng trong bảng trên đều không dương nên bài toán có phương án tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 65 & 5 & 30 \\ 0 & 145 & 0 \\ 75 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(X^0) = 6 \cdot 150 + 8 \cdot 65 + 5 \cdot 5 + 9 \cdot 30 + 6 \cdot 145 + 9 \cdot 75 = 3260$$

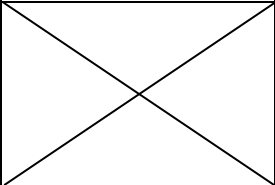
Do hệ số ước lượng của ô loại (3, 4) trong bảng 5 bằng 0 nên phương án tối ưu trên không phải là phương án tối ưu duy nhất của bài toán.

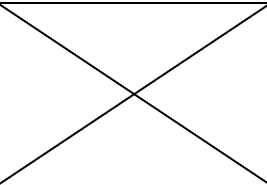
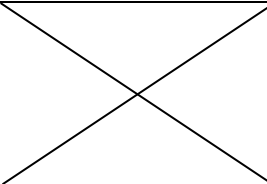
**Ví dụ 2:** Giải bài toán vận tải sau:

|                                                                                     |     |    |    |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|----|----|----|
|  | 100 | 50 | 30 | 70 |
| 80                                                                                  | 3   | 5  | 6  | 5  |
| 70                                                                                  | 4   | 5  | 7  | 8  |
| 50                                                                                  | 3   | 4  | 4  | 3  |

Giải:

Bài toán có tổng phát là 200, nhỏ hơn tổng thu là 250 nên ta lập thêm một trạm phát phụ với lượng hàng là 50.

|        | 100                   | 50                | 30                                                                                   | 70                |                           |
|--------|-----------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---------------------------|
| 80     | 3<br>x<br>80          | 5<br>-4<br>0      | 6<br>-3<br>0                                                                         | 5<br>-2<br>0      | $u_1 = 0$                 |
| 70     | 4<br>3<br>x<br>+<br>0 | 5<br>x<br>50      | 7<br>x<br>20                                                                         | 8<br>-1<br>0      | $u_2 = 4$                 |
| 50     | 3<br>x<br>-<br>20     | 4<br>-3<br>0      | 4<br>x<br>0                                                                          | 3<br>x<br>+<br>30 | $u_3 = 0$                 |
| 50     | 0<br>0<br>0           | 0<br>-2<br>0      | 0<br>x<br>+<br>10                                                                    | 0<br>x<br>-<br>40 | $u_4 = -3$                |
| q = 20 | $v_1 = 3$             | $v_2 = 1$         | $v_3 = 3$                                                                            | $v_4 = 3$         |                           |
|        | 3<br>x<br>80          | 5<br>-1<br>0      | 6<br>-3<br>0                                                                         | 5<br>-2<br>0      | $u_1 = 0$                 |
|        | 4<br>x<br>+<br>20     | 5<br>x<br>-<br>50 |  |                   | 8<br>-4<br>0<br>$u_2 = 1$ |
|        | 3<br>x<br>-<br>0      | 4<br>0<br>0       | 4<br>-1<br>0                                                                         | 3<br>x<br>+<br>50 | $u_3 = 0$                 |
|        | 0<br>0<br>0           | 0<br>1<br>x<br>0  | 0<br>x<br>30                                                                         | 0<br>x<br>-<br>20 | $u_4 = -3$                |

| $q = 0$ | $v_1 = 3$                                                                         | $v_2 = 4$    | $v_3 = 3$                                                                          | $v_4 = 3$    |            |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------|------------|
|         | 3<br>x<br>80                                                                      | 5<br>-1<br>0 | 6<br>-2<br>0                                                                       | 5<br>-1<br>0 | $u_1 = 0$  |
|         | 4<br>x<br>20                                                                      | 5<br>x<br>50 |  | 8<br>-3<br>0 | $u_2 = 1$  |
|         |  | 4<br>-1<br>0 | 4<br>-1<br>0                                                                       | 3<br>x<br>50 | $u_3 = -1$ |
|         | 0<br>-1<br>0                                                                      | 0<br>x<br>0  | 0<br>x<br>30                                                                       | 0<br>x<br>20 | $u_4 = -4$ |
|         | $v_1 = 3$                                                                         | $v_2 = 4$    | $v_3 = 4$                                                                          | $v_4 = 4$    |            |

Các hệ số ước lượng trong bảng trên đều âm nên bài toán có phương án tối ưu duy nhất và giá trị tối ưu của bài toán là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$f(X^0) = 3 \cdot 80 + 4 \cdot 20 + 5 \cdot 50 + 3 \cdot 50 = 720$$

#### 4.4.2. Phương pháp giải bài toán vận tải có ô cấm

Để giải bài toán vận tải có ô cấm, ta thực hiện theo các như sau:

**Bước 1:** Lập bài toán mở rộng

Thay cước phí  $c_{ij}$  của ô cấm bằng cước phí  $M$  thì ta được một bài toán vận tải mới gọi là bài toán mở rộng của bài toán vận tải đã cho (gọi là bài toán gốc).

**Bước 2:** Giải bài toán mở rộng

Bài toán mở rộng được giải như một bài toán vận tải bình thường chỉ chú ý: khi xây dựng phương án cơ bản xuất phát ta phải ưu tiên phân phối hàng vào các ô bình thường trước, cuối cùng mới phân phối hàng vào các ô cấm.

*Chú ý:* Do  $M$  là một số dương rất lớn nên nếu hệ số của  $M$  là một số dương (âm) thì hệ số ước lượng đó dương (âm).

**Bước 3:** Kết luận bài toán gốc

Trường hợp 1: Nếu phương án tối ưu của bài toán mở rộng có lượng hàng trong các ô cấm đều bằng 0 thì bài toán gốc có phương án tối ưu và phương án tối ưu của bài toán gốc là phương án tối ưu của bài toán mở rộng.

Trường hợp 2: Nếu phương án tối ưu của bài toán mở rộng có ít nhất một ô cấm có lượng hàng dương thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

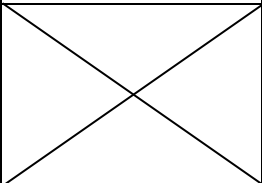
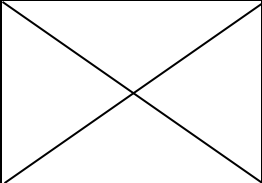
**Ví dụ 1:** Giải bài toán vận tải sau, trong đó các ô (2, 2) và (2, 4) là các ô cấm.

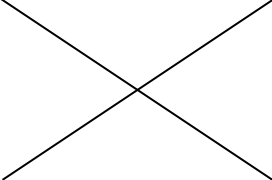
|     | 50 | 100 | 25 | 25 |
|-----|----|-----|----|----|
| 50  | 8  | 15  | 16 | 10 |
| 100 | 10 | 5   | 9  | 15 |
| 50  | 10 | 14  | 11 | 13 |

Giải:

Thay cước phí trong các ô cấm bằng cước phí  $M$  thì ta được bài toán mở rộng và giải bài toán mở rộng bằng phương pháp thế vị như sau:

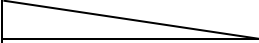


|          |                                                                                     |                    |                 |                    |              |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------|--------------------|--------------|
|          | 50                                                                                  | 100                | 25              | 25                 |              |
| 50       | 8<br>-<br>x<br>50                                                                   | 15<br>+<br>x<br>0  | 16<br>8-M<br>0  | 10<br>4<br>0       | $u_1 = 0$    |
| 100      | 10<br>+<br>x<br>0                                                                   | M<br>-<br>x<br>75  | 9<br>x<br>25    | M<br>-1<br>0       | $u_2 = M-15$ |
| 50       | 10<br>-3<br>0                                                                       | 14<br>x<br>25      | 11<br>12-M<br>0 | 13<br>x<br>25      | $u_3 = -1$   |
| $q = 50$ | $v_1 = 8$                                                                           | $v_2 = 15$         | $v_3 = 24-M$    | $v_4 = 14$         |              |
|          |   | 15<br>-<br>x<br>50 | 16<br>8-M<br>0  | 10<br>4<br>+<br>0  | $u_1 = 0$    |
|          | 10<br>x<br>50                                                                       | M<br>x<br>25       | 9<br>x<br>25    | M<br>-1<br>0       | $u_2 = M-15$ |
|          | 10<br>14-M<br>0                                                                     | 14<br>x<br>+<br>25 | 11<br>12-M<br>0 | 13<br>x<br>-<br>25 | $u_3 = -1$   |
| $q = 35$ | $v_1 = 25-M$                                                                        | $v_2 = 15$         | $v_3 = 24-M$    | $v_4 = 14$         |              |
|          |  | 15<br>x<br>25      | 16<br>8-M<br>0  | 10<br>x<br>25      | $u_1 = 0$    |
|          | 10<br>x<br>50                                                                       | M<br>x<br>25       | 9<br>x<br>25    | M<br>-15<br>0      | $u_2 = M-25$ |

|           |                 |               |                 |                                                                                     |            |
|-----------|-----------------|---------------|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|           | 10<br>14-M<br>0 | 14<br>x<br>50 | 11<br>12-M<br>0 |  | $u_3 = -1$ |
| $q = 115$ | $v_1 = 25-M$    | $v_2 = 15$    | $v_3 = 24-M$    | $v_4 = 10$                                                                          |            |

Các hệ số ước lượng trong bảng trên đều không dương nên bài toán mở rộng có phương án tối ưu. Do trong PATU của bài toán mở rộng ô cấm (2, 2) có lượng hàng dương nên bài toán gốc không có PATU.

**Ví dụ 2:** Cho bài toán vận tải sau:

|  | 140 | 150 | 180 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
| 150                                                                               | 5   | 4   | 6   |
| 100                                                                               | 8   | 5   | 9   |
| 145                                                                               | 11  | 6   | 12  |
| 100                                                                               | 9   | 7   | 13  |

Do kho  $A_3$  và  $A_4$  bị hư hỏng nặng cần phải sửa chữa gấp nên cần phải giải phóng hết hàng trước. Hãy giải bài toán trong điều kiện đó.

Giải:

Bài toán có tổng phát là 495 lớn hơn tổng thu là 470 nên ta phải lập một trạm thu phụ với lượng hàng cần nhập 25. Do các trạm phát  $A_3$ ,  $A_4$  được ưu tiên phát hết hàng nên lượng hàng của các trạm đó phải được ưu tiên vận chuyển hết đến các trạm thu  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ . Như vậy trạm thu phụ  $B_4$  khó có khả năng nhận được hàng từ hai trạm đó. Trong trường hợp này, các ô phụ (3, 4) và (4, 4) nằm trên các dòng này là các ô cấm.

Lập bài toán mở rộng của bài toán phụ với (3, 4) và (4, 4) là các ô cấm rồi giải bài toán mở rộng bằng phương pháp thế vị như sau:

|         |                   |                  |                    |               |           |
|---------|-------------------|------------------|--------------------|---------------|-----------|
|         | 140               | 150              | 180                | 25            |           |
| 150     | 5<br>-<br>x<br>45 | 4<br>-1<br>0     | 6<br>+<br>x<br>105 | 0<br>-3<br>0  | $u_1 = 0$ |
| 100     | 8<br>0<br>0       | 5<br>+<br>x<br>0 | 9<br>-<br>x<br>75  | 0<br>x<br>25  | $u_2 = 3$ |
| 145     | 11<br>-3<br>0     | 6<br>x<br>145    | 12<br>-3<br>0      | M<br>-M<br>0  | $u_3 = 3$ |
| 100     | 9<br>+<br>x<br>95 | 7<br>x<br>5      | 13<br>-3<br>0      | M<br>1-M<br>0 | $u_4 = 4$ |
| $q = 5$ | $v_1 = 5$         | $v_2 = 3$        | $v_3 = 6$          | $v_4 = -3$    |           |
|         | 5<br>x<br>40      | 4<br>-2<br>0     | 6<br>x<br>110      | 0<br>-3<br>0  | $u_1 = 0$ |
|         | 8<br>0<br>0       | 5<br>x<br>5      | 9<br>x<br>70       | 0<br>x<br>25  | $u_2 = 3$ |
|         | 11<br>-2<br>0     | 6<br>x<br>145    | 12<br>-2<br>0      | M<br>1-M<br>0 | $u_3 = 4$ |
|         | 9<br>x<br>100     |                  | 13<br>-3<br>0      | M<br>1-M<br>0 | $u_3 = 4$ |
|         | $v_1 = 5$         | $v_2 = 2$        | $v_3 = 6$          | $v_4 = -3$    |           |

Các hệ số ước lượng trong bảng trên đều không dương nên bài toán mở rộng có phương án tối ưu. Trong PATU của bài toán mở rộng, các ô cấm đều nhận lượng hàng 0 nên bài toán gốc cũng có PATU

Phương án tối ưu và giá trị tối ưu của bài toán là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 110 \\ 0 & 5 & 70 \\ 0 & 145 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f(X^0) = 5 \cdot 40 + 6 \cdot 110 + 5 \cdot 5 + 9 \cdot 70 + 6 \cdot 145 + 9 \cdot 100 = 3285$$

#### 4.4.3. Phương pháp giải bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại

Cách giải bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại về cơ bản giống cách giải một bài toán vận tải thông thường chỉ cần chú ý các vấn đề sau:

1. Khi lập phương án cơ bản xuất phát thì ta phải ưu tiên phân phối vào các ô có “cước phí” lớn nhất.
2. Khi kết luận tính tối ưu của phương án cơ bản thì điều kiện tối ưu là các hệ số ước lượng không phải không âm.
3. Khi tìm ô đưa vào thì ta tìm ô có hệ số ước lượng âm nhỏ nhất.

Ví dụ 1: Một phân xưởng có 2 công nhân nữ và 3 công nhân nam. Phân xưởng có 1 máy tiện loại I, 2 máy tiện loại II và 2 máy tiện loại III. Năng suất (chi tiết/ngày) của mỗi loại công nhân đối với mỗi loại máy tiện được cho trong bảng sau:

| Máy<br>Công nhân | Máy loại I | Máy loại II | Máy loại III |
|------------------|------------|-------------|--------------|
|                  | 1          | 2           | 2            |
| Nữ : 2           | 10         | 8           | 7            |
| Nam : 3          | 8          | 9           | 11           |

- a. Hãy lập mô hình toán học của bài toán phân công công nhân đứng máy như thế nào để tổng chi tiết thu được trong 1 ngày đạt được cao nhất?
- b. Hãy giải bài toán phân công công nhân đứng máy?

Giải:

a. Gọi  $x_{1j}$  là số công nhân nữ và  $x_{2j}$  là số công nhân nam đứng máy loại  $j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Khi đó mô hình toán học của bài toán phân công công nhân đứng máy tối ưu là bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 10x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 9x_{22} + 11x_{23} \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3 \\ x_{11} + x_{21} = 1 \\ x_{12} + x_{22} = 2 \\ x_{13} + x_{23} = 2 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3})$$

b. Bài toán đã cho là một bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại nên ta giải bằng phương pháp thế vị như sau:

Xây dựng phương án cơ bản xuất phát bằng phương pháp “cước phí lớn nhất” (ở đây là năng suất lớn nhất): Ô (2, 3) có năng suất lớn nhất nên ta phân vào ô (2, 3) tối đa là 2 công nhân (CN) nam, ô (1, 1) có năng suất lớn nhất trong các ô còn lại nên ta phân vào ô (1, 1) tối đa là 1 CN nữ, phân vào ô (2, 2) 1 CN nam và ô (1, 2) 1 CN nữ thì ta được phương án cơ bản xuất phát không suy biến của bài toán.

Xây dựng hệ thống thế vị và tính các hệ số ước lượng ta được bảng sau:

|   | 1            | 2           | 2            |           |
|---|--------------|-------------|--------------|-----------|
| 2 | 10<br>x<br>1 | 8<br>x<br>1 | 7<br>3<br>0  | $u_1 = 0$ |
| 3 | 8<br>3<br>0  | 9<br>x<br>1 | 11<br>x<br>2 | $u_2 = 1$ |
|   | $v_1 = 10$   | $v_2 = 8$   | $v_3 = 10$   |           |

Do các hệ số ước lượng của các ô loại đều dương nên PACB xuất phát là phương án tối ưu duy nhất của bài toán.

Vậy lời giải tối ưu của bài toán là:

$$X^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f(X^0) = 10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 11 \cdot 2 = 49$$

Như vậy cách phân công công nhân đứng máy để tổng chi tiết thu được trong 1 ngày đạt được cao nhất là: 1 CN nữ đứng máy I, 1 CN nữ đứng máy II, 1 CN nam đứng máy II và 2 CN nam đứng máy III. Tổng chi tiết đạt được cao nhất là 49 chi tiết.

Ví dụ 2: Một công ty có 3 nhà máy đặt tại 3 địa điểm khác nhau để sản xuất ra một loại sản phẩm. Công suất (sản phẩm/tháng) và chi phí sản xuất (ngàn/sản phẩm) tại mỗi nhà máy được cho trong bảng sau:

| Nhà máy | Công suất | Chi phí SX |
|---------|-----------|------------|
| $A_1$   | 100.000   | 24         |
| $A_2$   | 150.000   | 22         |
| $A_3$   | 200.000   | 23         |

Các sản phẩm của công ty được phân phối đến 4 tổng đại lý với mức tiêu thụ và giá bán như sau:

| Tổng đại lý | Khả năng tiêu thụ | Giá bán |
|-------------|-------------------|---------|
| $B_1$       | 70.000            | 32      |
| $B_2$       | 95.000            | 31      |
| $B_3$       | 145.000           | 30      |
| $B_4$       | 100.000           | 33      |

Giá cước vận chuyển một sản phẩm từ các nhà máy đến các tổng đại lý được cho trong bảng sau:

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 5     | 4     | 1     | 5     |
| $A_2$ | 6     | 4     | 4     | 6     |
| $A_3$ | 3     | 3     | 2     | 3     |

- Hãy lập MH toán học của bài toán xác định kế hoạch sản xuất và phân phối sản phẩm từ các nhà máy đến các tổng đại lý trong một tháng sao cho tổng lợi nhuận của công ty đạt được cao nhất.
- Xác định kế hoạch sản xuất và phương án phân phối sản phẩm tối ưu của công ty.

Giải:

- a. Gọi  $c_{ij}$  là lợi nhuận của một sản phẩm do nhà máy  $A_i$  sản xuất và bán tại tổng đại lý  $B_j$  ( $i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$ ). Khi đó, ta có bài toán xác định kế hoạch sản xuất của 3 nhà máy  $A_1, A_2, A_3$  và phân phối sản phẩm (đơn vị tính là 100 SP) đến 4 đại lý  $B_1, B_2, B_3, B_4$  với lợi nhuận  $c_{ij}$  được cho trong bảng sau:

| <div> <div><math>c_{ij}</math></div> <div>Tổng đại lý</div> </div> |            |            |             |             |
|--------------------------------------------------------------------|------------|------------|-------------|-------------|
|                                                                    | $B_1 : 70$ | $B_2 : 95$ | $B_3 : 145$ | $B_4 : 100$ |
| Nhà máy                                                            |            |            |             |             |
| $A_1 : 100$                                                        | 3          | 3          | 5           | 4           |
| $A_2 : 150$                                                        | 4          | 5          | 4           | 5           |
| $A_3 : 200$                                                        | 6          | 5          | 5           | 7           |

- b. Đây là một bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại có tổng thu nhỏ hơn tổng phát nên nếu gọi  $x_{ij}$  là số lượng sản phẩm (đơn vị tính là 100 SP) mà nhà máy  $A_i$  sản xuất và phân phối đến tổng đại lý  $B_j$  ( $i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}$ ) sao cho lợi nhuận của công ty đạt được cao nhất thì MH toán học của bài toán đó là bài toán QHTT sau:

$$(1) \quad f(x) = 3x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} + 5x_{24} + 6x_{31} + 5x_{32} + 5x_{33} + 7x_{34} \rightarrow \text{Max}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 150 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 70 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 95 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 145 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_{ij} \geq 0 (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4})$$

- b. Bài toán trên là một bài toán vận tải có hàm mục tiêu cực đại với tổng phát lớn hơn tổng thu nên ta lập một trạm thu phụ với nhu cầu là 40 rồi giải bằng phương pháp thế vị như sau:

|     | 70                         | 95                         | 145                         | 100                         | 40                         |            |
|-----|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|----------------------------|------------|
| 100 | 3                  3<br>0  | 3                  3<br>0  | 5                  x<br>100 | 4                  3<br>0   | 0                  1<br>0  | $u_1 = 0$  |
| 150 | 4                  2<br>0  | 5                  x<br>95 | 4                  x<br>15  | 5                  1<br>0   | 0                  x<br>40 | $u_2 = -1$ |
| 200 | 6                  x<br>70 | 5                  1<br>0  | 5                  x<br>30  | 7                  x<br>100 | 0                  1<br>0  | $u_3 = 0$  |
|     | $v_1 = 6$                  | $v_2 = 6$                  | $v_3 = 5$                   | $v_4 = 7$                   | $v_5 = 1$                  |            |

Các hệ số ước lượng của các ô loại đều dương nên phương án cơ bản xuất phát là phương án tối ưu duy nhất của bài toán.

Như vậy, kế hoạch sản xuất và phương pháp phân phối sản phẩm tối ưu của công ty như sau:

- Nhà máy  $A_1$  sản xuất 100.000 sản phẩm và phân phối hết đến tổng đại lý  $B_3$
- Nhà máy  $A_2$  sản xuất 110.000 sản phẩm và phân phối đến tổng đại lý  $B_2$  95.000 sản phẩm,  $B_3$  15.000 sản phẩm.
- Nhà máy  $A_3$  sản xuất 200.000 sản phẩm và phân phối đến tổng đại lý  $B_1$  70.000 sản phẩm,  $B_3$  30.000 sản phẩm,  $B_4$  100.000 sản phẩm
- Tổng lợi nhuận tối đa của công ty là  $f_{\max} = 2.305.000$

Ví dụ 3: Một nông trường có 3 khu đất  $A_1, A_2, A_3$  có diện tích tương ứng là 250, 1400, 350 ha. Nông trường định trồng 4 loại cây  $B_1, B_2, B_3, B_4$  với diện tích dự định là 500, 400, 600, 500 ha. Lợi nhuận khi trồng loại cây  $B_j$  trên một hecta đất  $A_i$  là  $c_{ij}$  được cho trong bảng sau:

|              | $B_1 : 500$ | $B_2 : 400$ | $B_3 : 600$ | $B_4 : 500$ |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $A_1 : 250$  | 22          | 25          | 20          | 18          |
| $A_2 : 1400$ | 30          | 32          | 25          | 28          |
| $A_3 : 350$  | 29          | 28          | 25          | 23          |

Hãy lập kế hoạch trồng cây tối ưu của nông trường (nghĩa là mỗi khu đất dùng bao nhiêu diện tích để trồng mỗi loại cây để lợi nhuận đạt được cao nhất).



Giải:

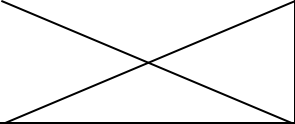
Bảng 1: Xây dựng PACB xuất phát bằng phương pháp “cước phí thấp nhất” (ở đây là lợi nhuận lớn nhất). Số ô chọn của PACB xuất phát là  $5 < 3+4-1$  nên ta bổ sung vào 1 ô chọn không là ô (1, 1) thì được phương án không suy biến.

Xây dựng hệ thống thế vị và tính các hệ số ước lượng của PACB xuất phát ta được bảng 1 sau:

|      | 500             | 400         | 600            | 500         |           |
|------|-----------------|-------------|----------------|-------------|-----------|
| 250  | 22<br>x<br>0    | 25 -1<br>0  | 20<br>x<br>250 | 18 2<br>0   | $u_1 = 0$ |
| 1400 | 30<br>x<br>500  | 32 x<br>400 | 25 3<br>0      | 28 x<br>500 | $u_2 = 8$ |
| 350  | 29 -2<br>x<br>0 | 28 1<br>0   | 25<br>x<br>350 | 23 2<br>0   | $u_3 = 5$ |
|      | $v_1 = 22$      | $v_2 = 24$  | $v_3 = 20$     | $v_4 = 20$  |           |

Trong bảng 1 có 2 ô có hệ số ước lượng âm là (1, 2) và (3, 1) nên PACB xuất phát chưa tối ưu. Chọn ô có hệ số ước lượng âm nhỏ nhất là ô (3, 1) đưa vào làm ô chọn; vòng là dãy ô (3, 1), (1, 1), (1, 3), (3, 3); ô chẵn (1, 1) có “lượng hàng” (ở đây là diện tích) nhỏ nhất là 0 nên là ô được đưa ra; “lượng hàng” điều chỉnh là  $d = 0$ .

Bảng 2: Xây dựng PACB mới rồi xây dựng hệ thống thế vị và tính các hệ số ước lượng ta được bảng 2 như sau:

|                                                                                     |             |             |             |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-----------|
|  | 25 1<br>0   | 20 x<br>250 | 18 4<br>0   | $u_1 = 0$ |
| 30 x<br>500                                                                         | 32 x<br>400 | 25 1<br>0   | 28 x<br>500 | $u_2 = 6$ |
| 29 x<br>0                                                                           | 28 3<br>0   | 25 x<br>350 | 23 4<br>0   | $u_3 = 5$ |
| $v_1 = 22$                                                                          | $v_2 = 26$  | $v_3 = 20$  | $v_4 = 22$  |           |

Các hệ số ước lượng của các ô loại trong bảng 2 đều dương nên phương án trong bảng 2 là PATU (duy nhất) của bài toán.

Như vậy, kế hoạch trồng cây tối ưu của nông trường là:

- Khu đất  $A_1$  trồng 250 ha loại cây  $B_3$ .
- Khu đất  $A_2$  trồng 500 ha loại cây  $B_1$ , 400 ha loại cây  $B_2$  và 500 ha loại cây  $B_4$ .
- Khu đất  $A_3$  trồng 350 ha loại cây  $B_3$ .

Lợi nhuận lớn nhất có thể đạt được là  $f_{\max} = 55.550$

## CHƯƠNG V: BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

### 5.1. Mô hình toán học.

#### 5.1.1. Bài toán pha trộn

Bài toán: Một xí nghiệp luyện kim muốn sản xuất 1 loại hợp kim với 20% bạc, 30% đồng và 50% nhôm. Họ sử dụng các nguyên liệu: Bạc, đồng, nhôm, hợp kim A, hợp kim B, hợp kim C. Hàm lượng bạc, đồng, nhôm trong các nguyên liệu trên cũng như giá 1 đơn vị khối lượng mỗi loại (USD/kg) được cho bởi bảng:

|      | Bạc  | Đồng | Nhôm | A    | B    | C    |
|------|------|------|------|------|------|------|
| Bạc  | 100% | 0    | 0    | 30%  | 50%  | 40%  |
| Đồng | 0    | 100% | 0    | 40%  | 20%  | 35%  |
| Nhôm | 0    | 0    | 100% | 30%  | 30%  | 25%  |
| Giá  | 1500 | 300  | 100  | 1000 | 1200 | 1100 |

Hãy lập phương án trộn thế nào để giá sản phẩm nhỏ nhất.

Giải

Mô hình toán học:

Gọi  $x_j \geq 0 (j = \overline{1,6})$  là khối lượng (kg) bạc, đồng, nhôm, A, B, C tương ứng để sản xuất ra 1 kg hợp kim cần thiết (Các  $x_j$  này đồng thời là tỷ lệ pha trộn các nguyên liệu khi sản xuất hợp kim).

Thực tế  $x_j \geq 0 (j = \overline{1,6})$

Trong 1kg hợp kim mới tạo ra, sẽ có 0,2 kg bạc; 0,3 kg đồng và 0,5 kg nhôm.

+ Lượng bạc chứa trong 1 kg sản phẩm là:  $x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6$

Lượng bạc này phải bằng 0,2 kg  $\rightarrow x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6 = 0,2$

+ Lượng đồng chứa trong 1 kg sản phẩm là:  $x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6$

Lượng đồng này phải bằng 0,3 kg  $\rightarrow x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6 = 0,3$

+ Lượng nhôm chứa trong 1 kg sản phẩm là:  $x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6$ .

Lượng nhôm này phải bằng 0,5 kg  $\rightarrow x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6 = 0,5$

Giá thành 1 kg sản phẩm là:

$$f(x) = 1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6$$

Vậy bài toán: Tìm  $x_j \geq 0 (j = \overline{1,6})$  với

$$(1) \quad f(x) = 1500x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 1000x_4 + 1200x_5 + 1100x_6 \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 + 0,3x_4 + 0,5x_5 + 0,4x_6 = 0,2 \\ x_2 + 0,4x_4 + 0,2x_5 + 0,35x_6 = 0,3 \\ x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,25x_6 = 0,5 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_j \geq 0 (j = \overline{1,6})$$

### 5.1.2. Bài toán tổng quát

a. Bài toán: Giả sử 1 đơn vị sản xuất có  $m$  máy  $M_1, M_2, \dots, M_n$  cùng dùng để sản xuất  $n$  loại chi tiết  $CT_1, CT_2, \dots, CT_n$ . Những chi tiết mà sẽ cấu thành ra một sản phẩm nào đó. Biết rằng trong 1 đơn vị thời gian 1 máy  $M_i$  sản xuất được  $a_{ij}$  chi tiết  $CT_j$  với  $\forall i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$ .

Bài toán đặt ra: Lập kế hoạch phân phối thời gian cho từng nhóm máy sản xuất đối với từng loại chi tiết để tổng số sản phẩm đồng bộ là nhiều nhất.

b. Dạng bảng của bài toán

Giả thiết mỗi loại máy chỉ có 1 cái và chi tiết có mặt trong sản phẩm mỗi thứ chỉ 1 cái.

|           | $CT_1 : 1$           | $CT_2 : 1$           | ... | $CT_n : 1$           |
|-----------|----------------------|----------------------|-----|----------------------|
| $M_1 : 1$ | $a_{11}$<br>$x_{11}$ | $a_{12}$<br>$x_{12}$ | ... | $a_{1n}$<br>$x_{1n}$ |
| $M_2 : 1$ | $a_{21}$<br>$x_{21}$ | $a_{22}$<br>$x_{22}$ | ... | $a_{2n}$<br>$x_{2n}$ |
| ...       | ...                  | ...                  | ... | ...                  |
| $M_m : 1$ | $a_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $a_{m2}$<br>$x_{m2}$ | ... | $a_{mn}$<br>$x_{mn}$ |

c. Mô hình toán học

Để thuận tiện cho việc lập mô hình toán học cũng như trình bày phương pháp giải, ta giả sử rằng mỗi nhóm máy chỉ có 1 chiếc và số chi tiết có mặt trong sản phẩm mỗi chi tiết cũng chỉ có 1 cái. Bài toán này được gọi là tỉ lệ 1:1

Gọi  $x_{ij}$  là thời gian máy  $i$  dùng để sản xuất chi tiết  $j$  và  $Z$  là số sản phẩm đồng bộ thu được với  $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ . Khi đó

Số sản phẩm đồng bộ là:  $f=Z$

Thời gian máy  $M_1$  đã dùng là:  $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n}$

Thời gian máy  $M_2$  đã dùng là:  $x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n}$

.....

Thời gian máy  $M_m$  đã dùng là:  $x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$

Số

chi tiết  $CT_1$  đã sản xuất là:  $a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1}$

Số chi tiết  $CT_2$  đã sản xuất là:  $a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2}$

.....

Số chi tiết  $CT_n$  đã sản xuất là:  $a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \dots + a_{mn}x_{mn}$

Vậy: Bài toán tìm vectơ  $X = \{x_{ij}\}$  và  $Z$  với  $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  sao cho  $f = Z \rightarrow \text{Max}(1)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = 1 \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} Z - (a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1}) \leq 0 \\ Z - (a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2}) \leq 0 \\ \dots \\ Z - (a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \dots + a_{mn}x_{mn}) \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Và } x_{ij} \geq 0, Z \geq 0, \forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \quad (4)$$

Bài toán (1), (2), (3) và (4) được gọi là mô hình toán học của bài toán sản xuất đồng bộ. Đây cũng là bài toán quy hoạch tuyến tính.

Viết gọn: Bài toán tìm vectơ  $X = \{x_{ij}\}$  và  $Z$  với  $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  sao cho  $f = Z \rightarrow \text{Max}(1)$  thỏa mãn:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 (\forall i = \overline{1, m}) \\ Z - \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq 0 (\forall j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} \geq 0, Z \geq 0 (\forall i, j) \end{cases}$$

## 5.2. Các khái niệm trên bài toán vận tải.

### Định lý (Tính giải được của bài toán sản xuất đồng bộ)

Bài toán sản xuất đồng bộ luôn có lời giải.

### Chứng minh

$$\text{Chọn } \begin{cases} x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ khi } j = 1 \\ -1 \text{ khi } j \neq 1 \end{cases} \\ Z = 0 \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện (4)}$$

Thay  $Z = 0$  vào (3) thỏa mãn điều kiện (3)

Ta có:  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$  (thỏa mãn (2))

Vậy bài toán sản xuất đồng bộ có phương án.

Ta lại có:  $f = Z \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} = \text{const}$  nên hàm  $f$  bị chặn trên.

Vậy bài toán có lời giải:

### **Bài toán đối ngẫu của bài toán sản xuất đồng bộ.**

Tìm  $\{u_i, v_j\}$  với  $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  sao cho

$$g(U, V) = \sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \text{Min thỏa mãn:}$$

$$\begin{cases} u_i - a_{ij}v_j \geq 0 (\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \\ \sum_{j=1}^n v_j \geq 1 (\forall j = \overline{1, n}) \\ v_j \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu được viết hơn dưới dạng sau:

Tìm  $\{u_i, v_j\}$  với  $\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$  sao cho

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j} \rightarrow \text{Min (5) thỏa mãn}$$

$$\begin{cases} u_i - a_{ij}v_j \geq 0 (\forall i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \\ \sum_{j=1}^n v_j \geq 1 (\forall j = \overline{1, n}) \\ v_j \geq 0 \end{cases}$$

### **5.3. Thuật toán nhân tử giải bài toán sản xuất đồng bộ.**

Trên bảng năng suất khái niệm ô, ô chọn tương tự như bài toán vận tải, còn  $(u_i, v_j)$  được gọi là hệ thống nhân tử ( $u_i$  – nhân tử dòng  $i$ ,  $v_j$  – nhân tử cột  $j$ ).

Ta tiến hành qua các bước sau:

#### **Bước 1: Xây dựng tập ô chọn và hệ thống nhân tử $(u_i, v_j)$**

Trên bảng năng suất. Tìm ô có năng suất lớn nhất.

Tìm  $Max\{a_{ij}\} = a_{i_1 j_1}$  tại  $\hat{O}(i_1, j_1)$  ta đánh số 1 và cho

$\begin{cases} v_{j_1} = 1 \\ u_{i_1} = a_{i_1 j_1} \end{cases}$  Đi trên dòng  $i_1$  tìm ô có năng suất lớn nhất tiếp theo. Tìm

$Max\{a_{ij}\} = a_{i_1 j_2}$  tại  $\hat{O}(i_1, j_2)$  khi đó  $\hat{O}(i_1, j_2)$  đánh số 2 và cho

$v_{j_2} = \frac{u_{i_1}}{a_{i_1 j_2}}$ . Sau đó dựa vào 2 quy tắc sau tìm nốt các ô chọn (Có  $m+n-1$  ô chọn) và các nhân tử còn lại:

**Quy tắc 1:** Đi trên cột vừa xây dựng xong nhân tử cột ( $v_{j_2}$ ) tìm ô có năng suất cao nhất thuộc dòng chưa có nhân tử dòng xây dựng nhân tử cho dòng đó theo công thức:  $u_i = Max\{a_{ij} v_j\}$  đạt được tại ô nào thì ô đó được đánh số tiếp theo.

**Quy tắc 2:** Đi trên dòng vừa tính được nhân tử dòng tìm ô có năng suất cao nhất thuộc cột chưa có nhân tử cột tính nhân tử cho cột đó theo công thức:  $v_j = Min\left\{\frac{u_i}{a_{ij}}\right\}$  đạt tại ô nào thì ô đó được đánh số tiếp theo.

Quá trình cứ tiếp tục như vậy cho đến khi tìm đủ số ô chọn và hệ thống nhân tử ( $u_i, v_j$ ).

### Ví dụ:

| <b>M \ CT</b> | <b>CT : 1</b> | <b>CT2 : 1</b> | <b>CT3 : 1</b> |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>A : 1</b>  | 56            | 56             | 105<br>3       | $u_1 = 105$    |
| <b>B : 1</b>  | 66<br>4       | 83<br>2        | 107<br>1       | $u_1 = 107$    |
| <b>C : 1</b>  | 38            | 53<br>5        | 64             | $u_1 = 68,37$  |
|               | $v_1 = 1,62$  | $v_1 = 1,29$   | $v_1 = 1$      | $u_i$<br>$v_j$ |



## Bước 2: Tìm hàm mục tiêu $W$ và tính các hệ thống số kiểm tra $x_{ij}$

\*) Tìm các ô cheo trên dòng và trên cột.

+ Ô cheo trên dòng: Ô chọn có 1 mình trên dòng.

+ Ô cheo trên cột: Ô chọn có 1 mình trên cột.

Ta gọi:  $D_i$  là tập các ô chọn trên dòng  $i$  và  $C_j$ : là tập các ô chọn trên cột  $j$ .

\*) Khi đó các số  $x_{ij}$  được tính như sau:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{với } \hat{O}(i, j) \text{ là ô loại} \\ 1 & \text{với } \hat{O}(i, j) \text{ là ô cheo trên dòng} \\ \frac{w}{a_{ij}} & \text{với } \hat{O}(i, j) \text{ là ô cheo trên cột} \end{cases}$$

Các số  $x_{ij}$  còn lại được tính theo hệ:

$$\begin{cases} \sum_{(i,j) \in D_i} x_{ij} = 1 \\ \sum_{(i,j) \in C_i} a_{ij} x_{ij} = W \end{cases}$$

Sau khi tính xong hệ  $\{x_{ij}\}$  ta tiến hành kiểm tra phương án. Xảy ra những trường hợp sau:

TH1: Nếu  $x_{ij} \geq 0 (\forall i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$  thì phương án đang xét là phương án tốt nhất. Số sản phẩm đồng bộ là  $W$ .

TH2: Tồn tại  $x_{ij} < 0$  thì phương án đang xét là phương án chưa tối ưu chuyển sang bước 3.

## Bước 3: Sửa phương án

+ Ô có  $x_{ij} < 0$  gọi là ô sửa.

Chú ý: Ở bước 2 khi đi tính  $x_{ij}$  gặp ô có  $x_{ij} < 0$  ta **dừng lại ngay** và gọi đó là ô sửa.

+ Dòng chứa ô sửa thì đánh dấu  $\lambda$  gọi là dòng sửa. Đi trên dòng sửa gặp cột chứa ô chọn (Không phải ô sửa) thì cột đó đánh dấu  $\lambda$  gọi là cột sửa. Dựa vào 2 quy tắc sau đây tìm nốt các dòng sửa khác và cột sửa khác.

+ Tìm tập ô xét (Ô xét là ô nằm trên dòng không sửa và trên cột có sửa).

Tính  $\lambda = \min \left\{ \frac{u_i}{a_{ij}v_j} \right\}$  đạt được tại ô nào thì trong phương án tới ô đó được đánh dấu thay

cho ô sửa.

**Quy tắc 1:** Đi trên cột sửa gặp dòng chứa ô chọn thì dòng đó được đánh dấu  $\lambda$  gọi là dòng sửa.

**Quy tắc 2:** Lại đi trên dòng sửa gặp ô chứa ô chọn thì cột đó được đánh dấu  $\lambda$  gọi là cột sửa.

+ Phương án tới được điều chỉnh như sau:

$$\text{Nhân tử dòng: } u'_i = \begin{cases} u_i & \text{nếu dòng } i \text{ không sửa} \\ \lambda u_i & \text{nếu dòng } i \text{ có sửa} \end{cases}$$

$$\text{Nhân tử cột: } v'_j = \begin{cases} v_j & \text{nếu dòng } j \text{ không sửa} \\ \lambda v_j & \text{nếu dòng } j \text{ có sửa} \end{cases}$$

Đến đây ta quay lại bước 2 và quá trình cứ tiếp tục như vậy cho tới khi tìm ra lời giải.

**Ví dụ:** Tiếp tục ví dụ bước 1

| CT<br>M          | CT1<br>1       | CT2<br>1       | CT3<br>1       | W = 71,71       |
|------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| A : 1            | 56<br>Ô xét    | 56<br>Ô xét    | 105<br>3       | 105             |
| B : 1            | 66<br>4        | 83<br>2        | 107<br>1 Ô sửa | 107 $\lambda$   |
| C : 1            | 38             | 53<br>5        | 64             | 68,37 $\lambda$ |
| $\lambda = 1,16$ | 1,62 $\lambda$ | 1,29 $\lambda$ | 1              | $u_i$<br>$v_j$  |

|       |                       |                       |                        |                                  |
|-------|-----------------------|-----------------------|------------------------|----------------------------------|
| A : 1 | 56<br>1      x = 0.33 | 56                    | 105<br>3      x = 0.64 | 105                              |
| B : 1 | 66<br>4      x = 0.79 | 83<br>2      x = 0.21 | 107                    | 107 λ = 124,12                   |
| C : 1 | 38                    | 53<br>5      x = 1    | 64                     | 79,31                            |
|       | 1,88                  | 1,5                   | 1                      | u <sub>i</sub><br>v <sub>j</sub> |

Kết luận: PA cho trên bảng là tốt nhất và W = 70,42 SP

#### 5.4. Trường hợp riêng

Nếu gặp bài toán sản xuất mà số lượng máy trong mỗi nhóm không đồng nhất cũng như tỉ lệ các chi tiết có mặt trong sản phẩm không đều nhau thì được gọi là bài toán sản xuất không đồng bộ.

Nhóm máy M<sub>i</sub> có K<sub>i</sub> chiếc với  $\forall i = \overline{1, m}$

Chi tiết máy CT<sub>j</sub> có mặt trong sản phẩm là d<sub>j</sub> cái

Trước khi lập bảng năng suất mới:  $a'_{ij} = \frac{a_{ij}K_i}{d_j}$

Sau đó quá trình giải được tiến hành bình thường.

#### Ví dụ:

| CT  | CT1 | CT2 | CT3 | CT4 |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| M   | 2   | 1   | 3   | 2   |
| A:1 | 76  | 50  | 105 | 80  |
| B:1 | 160 | 140 | 72  | 48  |
| C:1 | 180 | 36  | 108 | 60  |
| C:1 | 200 | 32  | 96  | 60  |

**Lời giải:** Bảng năng suất mới là:

| M                | CT | CT1<br>1                | CT2<br>1         | CT3<br>1         | CT4<br>1         | W = 68,38       |
|------------------|----|-------------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| A:1              |    | 38                      | 50<br>4          | 35<br>6          | 40<br>3          | 50 $\lambda$    |
| B:1              |    | 80<br>5                 | 54<br>Ô xét      | 24               | 24<br>Ô xét      | 80              |
| C:1              |    | 90                      | 36               | 36<br>7 x=1      | 30               | 90 $\lambda$    |
| D:1              |    | 100<br>1 x= -0,12       | 32               | 32               | 80<br>2          | 100 $\lambda$   |
| $\lambda = 1,48$ |    | 1                       | $\lambda$        | 1,43 $\lambda$   | 1,25 $\lambda$   | W = 67,47       |
| A:1              |    | 38                      | 50<br>4          | 35<br>6          | 40<br>3 x=-0,31  | 74 $\lambda$    |
| B:1              |    | 80<br>5                 | 54<br>1          | 24               | 30               | 133,2 $\lambda$ |
| C:1              |    | 90                      | 36               | 36<br>7          | 53<br>5 x = 1    | 79,31           |
| D:1              |    | 100<br>Ô xét            | 32<br>Ô xét      | 32<br>Ô xét      | 80<br>2 x= 1     | 148             |
| $\lambda = 1,48$ |    | 1 $\lambda$             | 1,48 $\lambda$   | 2,12 $\lambda$   | 1,85             | W = 67,47       |
| A:1              |    | 38                      | 50<br>Ô xét      | 35<br>6          | 40               | 109,52          |
| B:1              |    | 80 Ô sửa<br>5 x = -0,23 | 54<br>1 x = 1,23 | 24               | 24               | 118,4 $\lambda$ |
| C:1              |    | 90                      | 36<br>Ô xét      | 36<br>7 x = 1    | 30               | 197,14          |
| D:1              |    | 100<br>3                | 32<br>Ô xét      | 32               | 80<br>2          | 148             |
| $\lambda = 1$    |    | 1,48                    | 2,19 $\lambda$   | 3,14 $\lambda$   | 1,85 $\lambda$   | W = 66,17       |
| A:1              |    | 38                      | 50<br>5 x = 0,24 | 35<br>6 x = 0,76 | 40               | 109,52          |
| B:1              |    | 80                      | 54<br>1 x = 1    | 24               | 24               | 118,4           |
| C:1              |    | 90                      | 36               | 36<br>7 x = 1    | 30               | 197,14          |
| D:1              |    | 100<br>3 x = 0,17       | 32               | 32               | 80<br>2 x = 0,83 | 148             |
| $\lambda = 1$    |    | 1,48                    | 2,19             | 3,14             | 1,85             | W = 66,17       |



## CHƯƠNG TRÌNH MÔN HỌC

### TOÁN KINH TẾ

Tên môn học: TOÁN KINH TẾ

Số tiết: 45 tiết

#### 1. Vị trí, mục đích và yêu cầu môn học:

##### 1.1. Vị trí môn học:

Là môn học cơ bản được dạy từ kỳ II năm thứ hai hoặc kỳ I năm thứ ba.

##### 1.2. Mục đích yêu cầu:

Sinh viên nắm được kiến thức cơ bản về môn học QHTT để có thể mô hình hóa các bài toán kinh tế về: lập kế hoạch sản xuất, sản xuất đồng bộ,...

##### 2. Đối tượng Sinh viên:

Sinh viên bậc Đại học, chuyên ngành Kinh tế nông nghiệp, Kế toán, Quản trị kinh doanh.

##### 3. Nội dung chương trình môn học:

#### CHƯƠNG I: ÔN TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

(Tổng số: 5 tiết, Lý thuyết: 3 tiết, Bài tập: 2 tiết)

- 1.1. Ma trận – Định thức
- 1.2. Hệ phương trình
- 1.3. Miền nghiệm của hệ

#### CHƯƠNG II: QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

(Tổng số: 15 tiết, Lý thuyết: 6 tiết, Bài tập: 9 tiết)

- 2.1. Các bài toán thực tế đến bài toán quy hoạch tuyến tính
- 2.2. Các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính
- 2.3. Biến đổi các dạng bài toán quy hoạch tuyến tính
- 2.4. Phương pháp hình học giải bài toán quy hoạch tuyến tính hai ẩn số
- 2.5. Thuật toán đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính
- 2.6. Thuật toán đơn hình mở rộng

### CHƯƠNG III: LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU

(Tổng số: 8 tiết, Lý thuyết: 3 tiết, Bài tập: 5 tiết)

- 3.1. Bài toán thực tế dẫn đến cặp bài toán đối ngẫu
- 3.2. Bài toán đối ngẫu
- 3.3. Bốn định lý đối ngẫu và ứng dụng

### CHƯƠNG IV: BÀI TOÁN VẬN TẢI

(Tổng số: 10 tiết, Lý thuyết: 4 tiết, Bài tập: 6 tiết)

- 4.1. Nội dung của các bài toán vận tải – Dạng bảng của bài toán vận tải
- 4.2. Mô hình toán học của bài toán vận tải dạng đóng
- 4.3. Phương án cơ bản của bài toán vận tải
- 4.4. Thuật toán thế vị giải bài toán vận tải
- 4.5. Các trường hợp riêng của bài toán vận tải

### CHƯƠNG V: BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ

(Tổng số: 7 tiết, Lý thuyết: 5 tiết, Bài tập: 2 tiết)

- 5.1. Nội dung của bài toán SXĐB – Dạng bảng của bài toán vận tải
- 5.2. Mô hình toán học cho bài toán SXĐB
- 5.3. Thuật toán nhân tử giải bài toán SXĐB

#### **4. Tài liệu tham khảo:**

1. Trần Đình Ánh (2009). *Bài tập Quy hoạch tuyến tính*. NXB Giáo dục.
2. GS. Trần Túc (2008). *Bài giảng Quy hoạch tuyến tính*. NXB Đại học Kinh tế quốc dân.
3. GS. Hoàng Tụy (1976). *Lý thuyết quy hoạch tuyến tính*. NXB Khoa học Kỹ thuật Hà Nội.
4. TS. Bùi Phúc Trung, TS. Nguyễn Thị Ngọc Thanh, Th.S. Vũ Thị Bích Liên (2003). *Giáo trình Quy hoạch tuyến tính*. NXB Lao động – Xã hội.
5. PGS. TS. Nguyễn Quang Dong, Ngô Văn Thứ, PGS. TS. Hoàng Đình Tuấn (2006). *Giáo trình Mô hình Toán kinh tế*. NXB Thống kê.
6. George B.Dantzig (1965). *Linear Programming and Extensions*. University of California.

Đồng Nai, ngày 15/08/2014

**Trưởng Ban Kinh tế**

**Tổ trưởng bộ môn**

**Giáo viên soạn**

Ths. Trần Văn Hùng

Ths. Vũ Thu Hương

Phùng Thị Thu Hà