

Chương 4. NỘI LỰC và ỨNG SUẤT

4.1. Lý thuyết về ngoại lực và nội lực

4.1.1. Khái niệm về ngoại lực và nội lực

1. Ngoại lực:

- Lực là đại lượng véc tơ có phương, chiều, độ lớn và điểm đặt.
- Nếu một trong 4 đại lượng số trên thay đổi theo thời gian ta có lực động, trái lại ta có lực tĩnh.
- Các lực do môi trường bên ngoài (*tải trọng*) hay do vật thể khác tác động lên vật thể đang xét (*lực liên kết*) được gọi là *ngoại lực*.

Phân loại:

- Lực tập trung (P) là lực tác dụng lên vật thể tại một điểm. Đơn vị là (N)
- Lực phân bố (q) là lực tác dụng lên vật thể trên một diện tích đủ lớn. Đơn vị là (N/m²). Trong bài toán phẳng ta xét lực phân bố theo chiều dài, đơn vị N/m.
- Mô men tập trung (M) là mômen tác dụng lên vật thể tại một điểm. Đơn vị là (Nm)

2. Nội lực:

Xét vật thể chịu tác dụng của của ngoại lực.

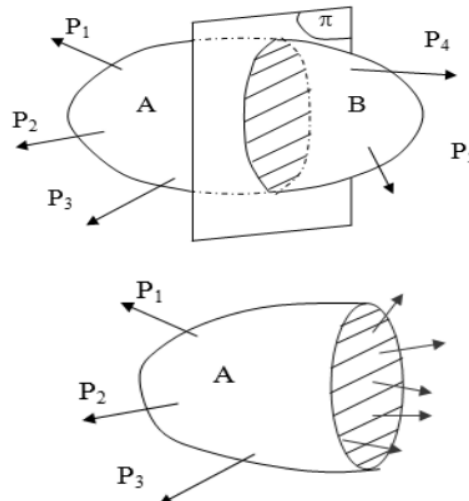
Tưởng tượng cắt vật thể làm 2 phần A và B.

Xét cân bằng cho phần A:

Phần A có thể cân bằng với các ngoại lực là do phần B tác dụng lên phần A một hệ lực được gọi là *hệ nội lực*.

Xét điểm ΔF quanh điểm M trên mặt cắt có nội lực ΔP ta có:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} = \frac{d\vec{P}}{dF} \text{ được gọi là ứng suất tại M}$$



Ta dựng một hệ trục tọa độ Oxyz với Oz vuông góc với mặt cắt. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz.

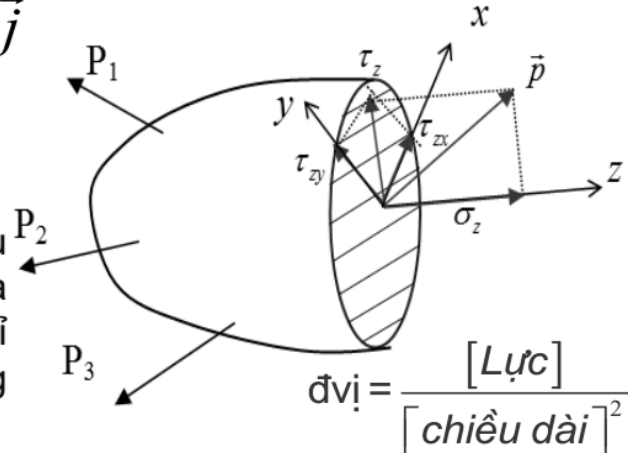
Khi đó ứng suất tại M có thể được biểu diễn như sau:

$$\vec{p} = \sigma_z \cdot \vec{k} + \tau_{zx} \cdot \vec{i} + \tau_{zy} \cdot \vec{j}$$

Trong đó ta gọi:

σ_z là ứng suất pháp.

τ_{zx}, τ_{zy} là các ứng suất tiếp. Ứng suất tiếp có chỉ số đầu chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt, chỉ số thứ hai chỉ phương song song của ứng suất tiếp đó.



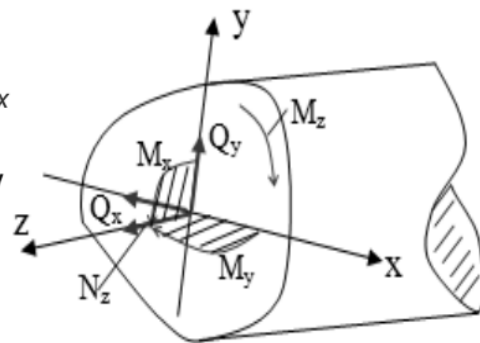
4.1.2. Các thành phần nội lực

Xét một thanh chịu tác dụng bởi ngoại lực. Để xét nội lực trong thanh ta cắt thanh làm 2 phần A và B. Phần A có thể cân bằng do hệ nội lực của phần B tác động lên.

Hệ nội lực này thu gọn về tâm mặt cắt được một véc tơ lực chính R và mômen chính M.

R chiếu lên trục z được lực dọc N_z
R chiếu lên trục x, y được lực cắt Q_x và Q_y

Momen chính chiếu lên các trục x, y được gọi là mômen uốn M_x, M_y , mômen trên trục z được gọi là mômen xoắn M_z .

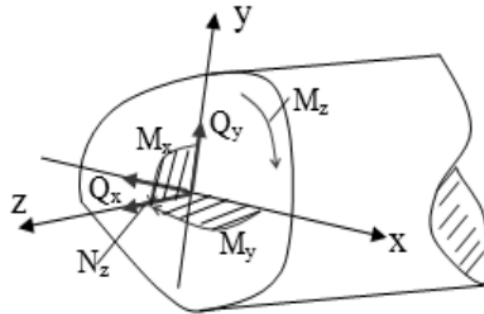


*) *Chú ý: Khi một thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm.*

**) Quy ước dấu các thành phần nội lực:*

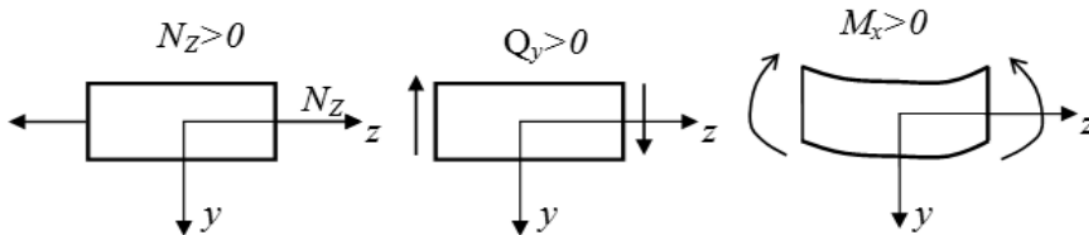
- Các nội lực N_z , Q_x , Q_y mang dấu dương khi chúng gây ra ứng suất dương. Cụ thể khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt cùng chiều dương của trục z thì N_z , Q_x , Q_y mang dấu dương khi chúng cùng chiều dương của trục z , x, y , và ngược lại

- Mômen uốn M_x và M_y mang dấu dương nếu chúng làm thanh căng về phía dương của các trục x, y .
- Mômen xoắn M_z mang dấu dương nhìn vào mặt cắt thấy nó quay theo chiều kim đồng hồ.



- Trong bài toán phẳng, vd khi tải trọng tác dụng trong một mặt phẳng Oyz thì nội lực chỉ gồm 3 thành phần N_z , Q_y , M_x , với dấu được quy ước như sau:

- N_z dương khi hướng ra ngoài mặt cắt
- Q_y dương khi có chiều quay phân tố đang xét on clockwise.
- M_x dương khi làm căng thớ nằm về phía dương của trục y .



và ngược lại thì mang dấu âm.

Ta có thể nói rằng, nội lực là lực phân bố bề mặt với cường độ chính là các ứng suất thành phần tương ứng. Đó đó ta có thể tính nội lực như sau:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF; \quad Q_x = \int_F \tau_{zx} dF; \quad Q_y = \int_F \tau_{zy} dF$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF; \quad M_y = \int_F \sigma_z x dF; \quad M_z = \int_F (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dF$$

4.1.3. Biểu đồ nội lực

*) *Định nghĩa:* Biểu đồ nội lực là đường biểu diễn sự biến thiên của nội lực theo vị trí của mặt cắt trên thanh.

Biểu diễn:

Hoành độ là đường // trục thanh.

Tung độ là độ lớn của nội lực tại mặt cắt vị trí tương ứng.

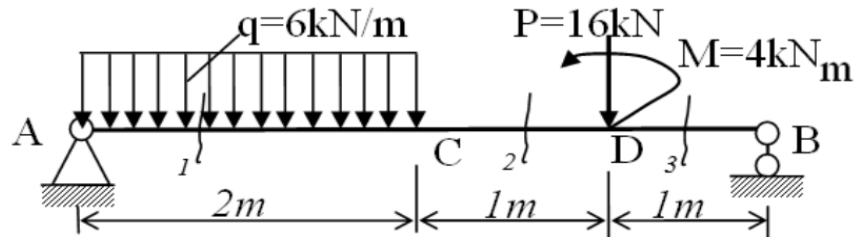
Biểu đồ lực dọc (N_z) và lực cắt (Q_y) chiều dương lấy phía trên trục hoành.

Biểu đồ mômen uốn (M_x) lấy chiều dương phía dưới.

A. Ví dụ vẽ biểu đồ nội lực

Ví dụ 1:

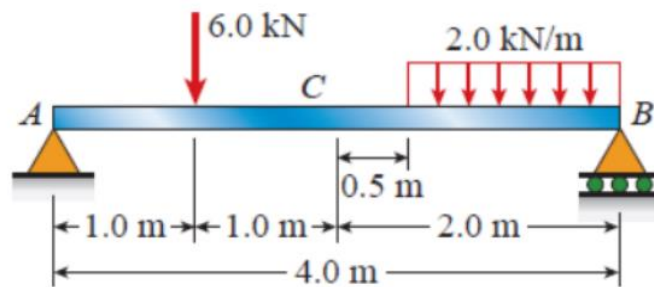
Vẽ biểu đồ nội lực



Hướng dẫn giải

Ví dụ 2:

Vẽ biểu đồ nội lực



Hướng dẫn giải

B. Phương pháp vẽ nhanh biểu đồ nội lực (phương pháp nhận xét)

“Tiến hành vẽ đi từ trái qua phải”

**) Biểu đồ lực cắt Q_y :*

- Tại đâu có lực tập trung, thì ở đó có bước nhảy đúng bằng độ lớn lực tập trung, và chiều nhảy theo chiều của lực tập trung.
- Nếu có lực phân bố bậc n thì biểu đồ Q_y là đường bậc $(n+1)$.
- Tại đâu có lực phân bố đi xuống thì biểu đồ Q_y cũng đi xuống và ngược lại. Lượng đi lên hay đi xuống đúng bằng diện tích của lực phân bố trên đoạn đó (do $Q_y = \int_{\Delta z} q dz = \text{diện tích lực phân bố } q$).

**) Biểu đồ mômen uốn M_x :*

- Tại đâu có mômen trung thì ở đó có bước nhảy đúng bằng độ lớn của mômen tập trung, Mômen tập trung làm căng thớ nào thì biểu đồ nhảy về phía đó.
- Nếu có lực phân bố bậc n thì biểu đồ M_x là đường bậc $(n+2)$.
- Nếu M_x có dạng đường cong thì phía lõm của biểu đồ M_x sao cho nó hứng lấy các mũi tên của lực phân bố q .
- Nhìn biểu đồ lực cắt, nếu trên đoạn đang xét lực cắt dương thì biểu đồ M_x đồng biến (đi xuống vì chiều dương của M_x ta chọn phía dưới) và ngược lại nếu lực cắt âm thì biểu đồ đi lên (nghịch biến). Lượng biến thiên đúng bằng diện tích của biểu đồ lực cắt trên toàn đoạn đó (do $M_x = \int Q dz = \text{diện tích biểu đồ } Q_y$).

C. Ví dụ vẽ biểu đồ nội lực bằng pp nhận xét

(Vẽ lại biểu đồ nội lực bằng phương pháp nhận xét với Ví dụ 1 và 2)

4.1.4. Liên hệ vi phân giữa lực cắt, mômen uốn và tải trọng phân bố

-Xét một thanh chịu lực trong mặt phẳng Oyz. Các ngoại lực tác dụng vuông góc với trục Oz (quy ước dấu của ngoại lực hướng lên là mang dấu dương). Tách ra một đoạn phân tử của thanh như hình vẽ.

-Xét CB phân tử ta có:

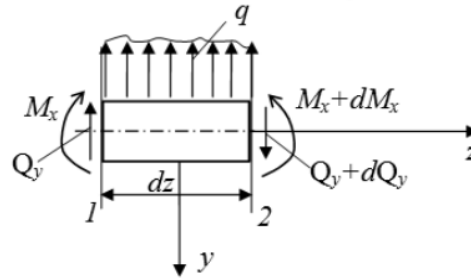
$$\downarrow: (Q_y + dQ_y) - Q_y - qdz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_y}{dz} = q$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y dz + q \frac{(dz)^2}{2} = 0 \quad \text{Bỏ qua VCB bậc cao } q \frac{(dz)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

“Đạo hàm của mômen uốn là bằng trị số của lực cắt, và đạo hàm của lực cắt thì bằng cường độ của lực phân bố.”



4.2. Ứng suất và trạng thái ứng suất

4.2.1. Ứng suất và các thành phần

(đã xét ở mục 4.1.1 – Nội lực)

* Ứng suất là đại lượng đặc trưng cho giá trị của nội lực tại một vị trí nhất định mà ta đang xét

* Xét ứng suất tại điểm M trên diện tích ΔF trong mặt cắt ngang của thanh gồm các thành phần:

σ_z là ứng suất pháp.

τ_{zx}, τ_{zy} ứng suất tiếp trên trục Ox; Oy

$$\rightarrow \vec{p} = \sigma_z \cdot \vec{k} + \tau_{zx} \cdot \vec{i} + \tau_{zy} \cdot \vec{j}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị chỉ phương theo các trục Ox, Oy, Oz

4.2.2. Trạng thái ứng suất tại một điểm

- Vật thể chịu lực, cắt một mcn qua M, tại M có véc tơ ứng suất toàn phần $\vec{p}_1$.

- Qua M có vô số cắt mặt cắt khác nhau, ứng với mỗi mcn đó ta cũng có một véc tơ ứng suất tại M.

- Tập hợp các véc tơ ứng suất tại M được gọi là *trạng thái ứng suất* tại M.

- Trong tập hợp các véc tơ ứng suất tại M, chỉ có 3 véc tơ U'S trên 3 mcn độc lập.

- Để nghiên cứu ứng suất tại một điểm ta xét phân tố hình hộp vô cùng bé bao quanh điểm đó.

- 3 véc tơ US độc lập trên 3 mặt cắt vuông góc với nhau.

- Gắn hệ trục Oxyz lên phân tố.

- Chiếu véc tơ US trên mỗi mặt hình hộp lên 3 trục ta được 3 thành phần.

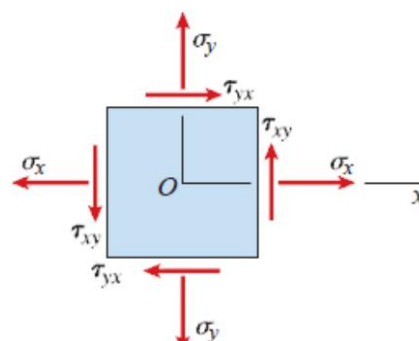
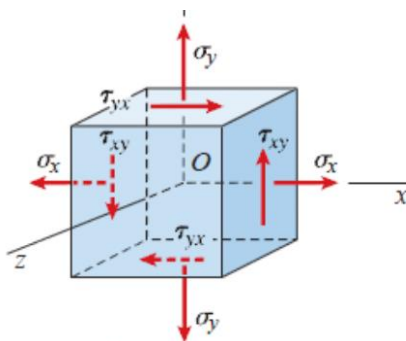
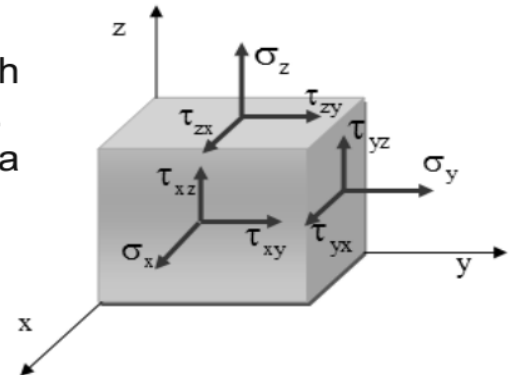
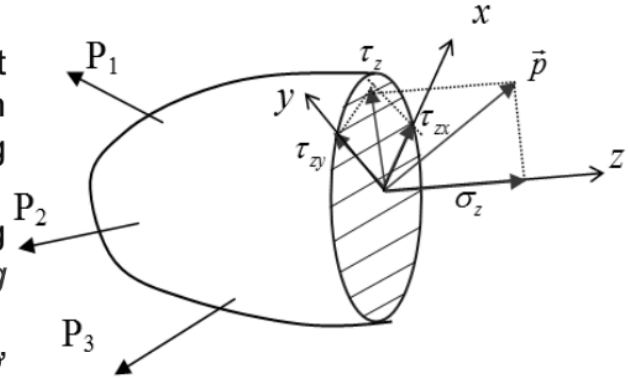
- 9 thành phần trên biểu diễn cho ta TTUS tại một điểm:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

T_{σ} được gọi là ten-xơ ứng suất.

Do phân tố CB, $\sum M = 0$ nên ta có:

$\zeta_{xy} = \zeta_{yx}$, $\zeta_{yz} = \zeta_{zy}$, $\zeta_{zx} = \zeta_{xz}$ Định luật đối ứng của ứng suất tiếp.



4.2.3. Ứng suất trên mặt cắt xiên

Xét mcn có vectơ pháp tuyến u với $(u, x) = \theta$.
Ta sử dụng pp mặt cắt để tìm σ_u và ζ_{uv} :

Xét phân tử CB ta có:

$\Sigma X = 0$:

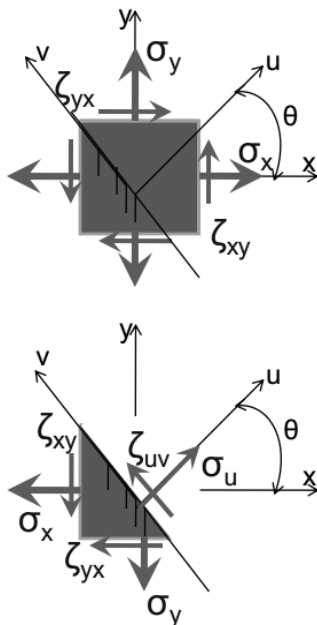
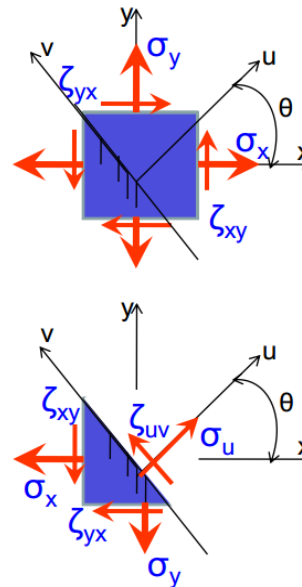
$$\sigma_u F \cos \theta - \tau_{uv} F \sin \theta - \sigma_x F \cos \theta - \tau_{yx} F \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$\Sigma Y = 0$:

$$\sigma_u F \sin \theta + \tau_{uv} F \cos \theta - \sigma_y F \sin \theta - \tau_{xy} F \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Triệt tiêu F , chú ý $\zeta_{xy} = \zeta_{yx}$ lấy:

$$(1) \cdot \cos \theta + (2) \cdot \sin \theta = ? ; \quad (2) \cdot \cos \theta - (1) \cdot \sin \theta = ?$$



$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

là CT xđ cho ta gtri ứng suất trên mcn bất kỳ. Đặc biệt:

Khi $\theta = 0^\circ$: $\sigma_u = \sigma_x$ và $\zeta_{uv} = \zeta_{ux}$

Khi $\theta = 90^\circ$: $\sigma_u = \sigma_y$ và $\zeta_{uv} = -\zeta_{xy}$

Biến đổi pt trên ta có:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Tính giá trị ứng suất pháp σ_v ?

Khi đó $\alpha = \theta + 90^\circ$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y$$

4.2.4. Thế năng biến dạng đàn hồi

* Thế năng riêng biến dạng đàn hồi

- Trạng thái ứng suất đơn

$$u = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x$$

- Trạng thái ứng suất khối

Xét phân tố chính với ứng suất và biến dạng dài tương ứng.

Do tương quan giữa biến dạng và ứng suất là bậc nhất nên Công thế năng bằng tổng công thực của tất cả các ứng suất trên các biến dạng tương ứng. Vậy thế năng biến dạng đàn hồi riêng là:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z)$$

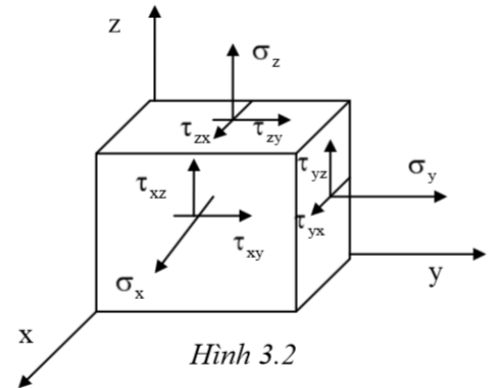
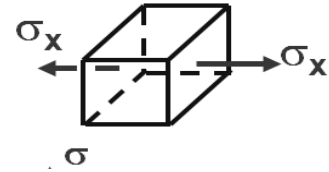
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ là biến dạng dài theo các phương chính do tất cả các ứng suất chính gây ra :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

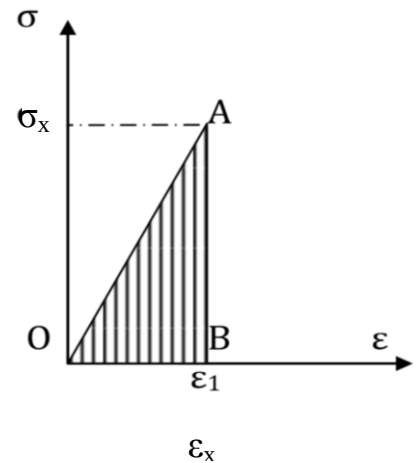
μ - hệ số Poatxông : tỷ số biến dạng giữa 2 phương vuông góc

Suy ra:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)]$$



Hình 3.2



* Thế năng biến dạng đàn hồi thể tích và hình dáng

Có thể phân tích trạng thái ứng suất khối thành tổng hai TTU'S:

- Một trạng thái ứng suất trung bình là ứng suất chính (kéo/nén đều 3 phương)

$$\sigma_{tb} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \rightarrow \text{chỉ biến dạng thể tích}$$

- Một trạng thái đặc trưng bởi các ứng suất chính:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{tb};$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{tb};$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{tb}$$

$$\text{Vì } \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$$

nên chỉ thay đổi về hình dáng

Vậy:

$$U = U_{hd} + U_{tt}$$

Ta tính được các thành phần thế năng như sau:

$$U_{tt} = 3 \frac{1-2\mu}{2E} \sigma_{tb}^2 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

4.2.5. Tính chất cơ học của vật liệu

Để kiểm tra cơ tính một vật liệu sau khi chế tạo → tiến hành thí nghiệm. Thí nghiệm kéo, nén là những TN° đơn giản giúp ta xác định giới hạn phá hủy của vật liệu.

Mẫu thí nghiệm:

Kéo:



Nén:



Vật liệu nói chung chia làm 2 nhóm:

- Vật liệu giòn như: gang, bê tông, gốm... bị phá hủy ở BD nhỏ.
- Vật liệu dẻo như: thép, nhôm,... bị phá hủy ở Bdạng lớn.

***) Mục đích thí nghiệm:**

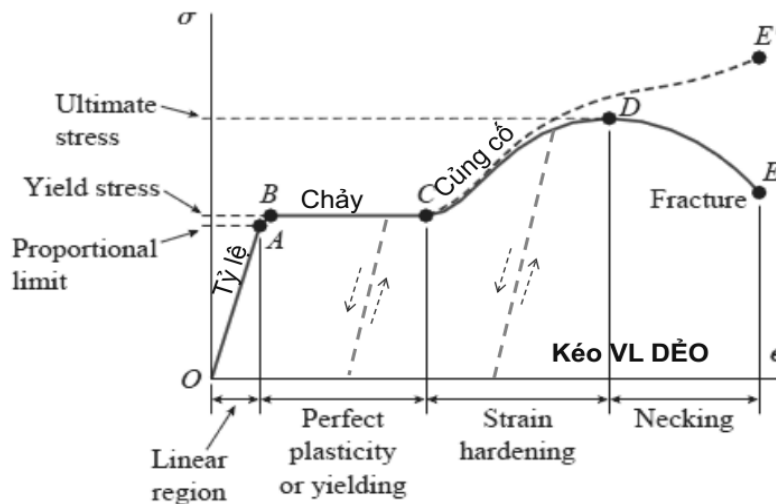
- Xác định khả năng chịu lực.
- Xác định khả năng chịu biến dạng.
- Đồ thị quan hệ biến dạng và lực.
- So sánh đặc tính giữa các vật liệu khác nhau

***) Chú ý:**

Khi thí nghiệm cần gia tải chậm để quan sát quá trình biến đổi của mẫu.



***) Kết quả thí nghiệm KÉO:**



Điểm A, B, D cần quan tâm.

$$\sigma_A = \sigma_{t\ell e}$$

$$\sigma_B = \sigma_{ch\ddot{a}y}$$

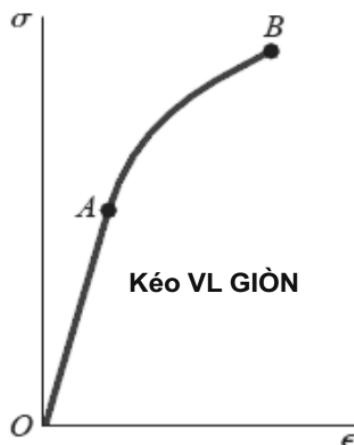
$$\sigma_D = \sigma_{b\grave{e}n}$$

BD tỷ đối:

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} 100\%$$

Độ thắt tỷ đối:

$$\psi = \frac{A_1 - A_0}{A_0} 100\%$$



A, B cần quan tâm.

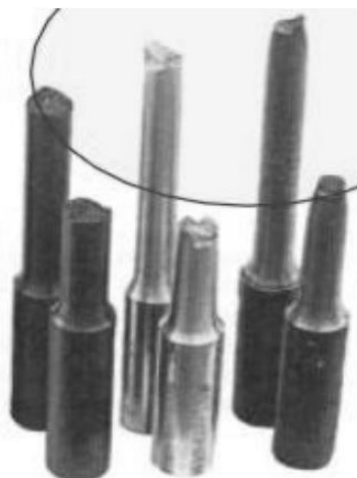
$$\sigma_A = \sigma_{t\ell e} ; \sigma_B = \sigma_{b\grave{e}n}$$

Tuy vậy do vật liệu giòn biến dạng rất ít trước khi phá hủy nên:

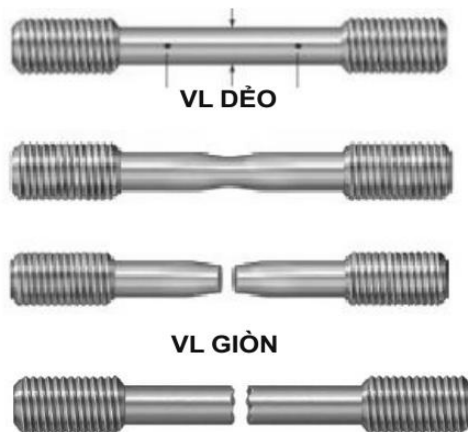
→ Khó phát hiện được điểm A.

→Giới hạn bền VL giòn khá bé so với vật liệu dẻo.

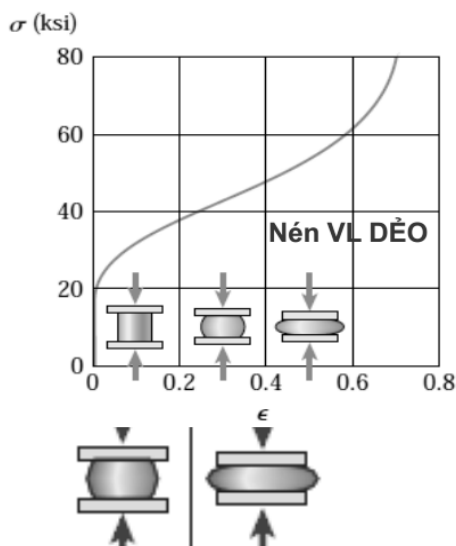
*) Kết quả thí nghiệm KÉO:



Biến dạng mẫu

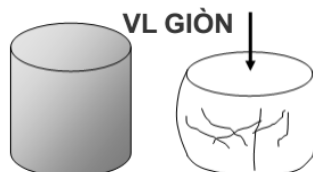


*) Kết quả thí nghiệm NÉN:



VL Dẻo: vẫn có xác được σ_{tle} , σ_{chay} nhưng khó xác định được giới hạn bền do VL dẻo chịu được biến dạng rất lớn.

VL Giòn: ta vẫn chỉ xác định được giới hạn bền, nhưng nó lớn hơn nhiều so với giới hạn bền khi kéo.



Vật liệu	E (kN/cm ²)	μ	KÉO (kN/cm ²)		NÉN (kN/cm ²)		$\delta(\%)$
			σ_{chay}	$\sigma_{bền}$	σ_{chay}	$\sigma_{bền}$	
Thép CT3	$2,1 \cdot 10^4$	$0,24 \div 0,3$	24	$38 \div 47$	24	---	$21 \div 23$
Gang xám	$(1,15 \div 1,7) \cdot 10^4$	$0,2 \div 0,3$	$12 \div 29$	$12 \div 38$	---	$50 \div 140$	---
Bê tông	$(0,17 \div 0,31) \cdot 10^4$	$0,1 \div 0,2$	---	$0,025 \div 0,175$	---	$1 \div 7$	---
Hợp kim Titan	$1,12 \cdot 10^4$	0,33	$70 \div 80$	$80 \div 90$	---	----	$22 \div 15$

4.2.6. Ứng suất cho phép và hệ số an toàn

***) Ứng suất cho phép $[\sigma]$:**

-VL dẻo: lấy $\sigma_{\text{cho phép}} = [\sigma] = \sigma_{\text{chảy}}$.

-VL giòn: lấy $\sigma_{\text{cho phép}} = [\sigma] = \sigma_{\text{bền}}$.

***) Ktra điều kiện bền:**

-VL dẻo: $\max \{ \sigma_{\text{zmax}}, |\sigma_{\text{zmin}}| \} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{ch}}}{n}$

-VL giòn: $\sigma_{\text{zmax}} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n} \quad |\sigma_{\text{zmin}}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$

$n > 1$ được gọi là hệ số an toàn. (sao cần n ?).

n lớn thì an toàn nhưng tốn kém vật liệu và ngược lại.

4.2.7. Các thuyết bền

Khi kiểm tra 1 điểm của bộ phận công trình chịu lực phức tạp, không có mẫu thử thí nghiệm tương tự đã nghiên cứu, thì người ta căn cứ vào những giả thuyết về độ bền hay những lý thuyết bền

1 – Thuyết bền ứng suất pháp (TTUS đơn)

** Nguyên nhân gây ra sự phá hủy vật liệu là do trị số lớn nhất của ứng suất pháp đạt tới giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTUS.*

$$\sigma_1 \leq [\sigma]_k \quad ; \quad |\sigma_3| \leq [\sigma]_n$$

2 – Thuyết bền biến dạng dài (phù hợp vật liệu giòn)

** Nguyên nhân gây ra sự phá hủy vật liệu ở TTUS khối là do trị số của biến dạng dài lớn nhất đạt tới giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTUS.*

Biến dạng dài lớn nhất của $\epsilon = \sigma/E$ có giới hạn $[\sigma]/E$

$$\Rightarrow \text{ĐK bền: } \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

3 – Thuyết bền ứng suất tiếp (phù hợp vật liệu dẻo)

* Nguyên nhân gây ra sự phá hủy vật liệu ở TTUS khối là do trị số lớn nhất của ứng suất tiếp đạt tới giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTUS.

Ứng suất tiếp lớn nhất có giới hạn $\tau_{\max} = [\sigma]/2$

⇒ ĐK bền: $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

4 – Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (vật liệu dẻo)

* Nguyên nhân gây ra sự phá hủy vật liệu ở TTUS khối là do trị số lớn nhất của TNBĐHD đạt tới giới hạn xác định, giới hạn này không phụ thuộc vào dạng của TTUS.

TNBĐHD lớn nhất có giới hạn $U_{hd} = [(1+\mu)/3E] \cdot [\sigma]^2$

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]$$

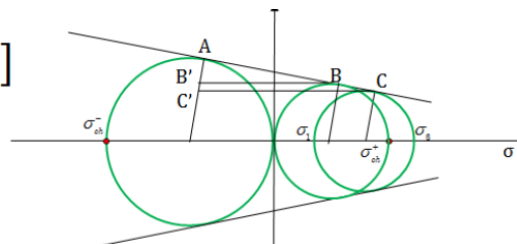
5 - Thuyết bền Mohr (TTUS tới hạn)

* Trên cơ sở kết quả các thí nghiệm, mỗi TTUS khối với các ứng suất chính σ_1 ; σ_2 ; σ_3 sẽ có 3 vòng tròn Mohr với các đường kính tương ứng $\sigma_1 - \sigma_2$; $\sigma_2 - \sigma_3$; $\sigma_1 - \sigma_3$. Đường bao giới hạn miền an toàn gần đúng bằng tiếp tuyến chung của 2 vòng tròn giới hạn.

Vòng tròn Mohr lớn nhất $\sigma_1 - \sigma_3$ là vòng tròn Mohr giới hạn

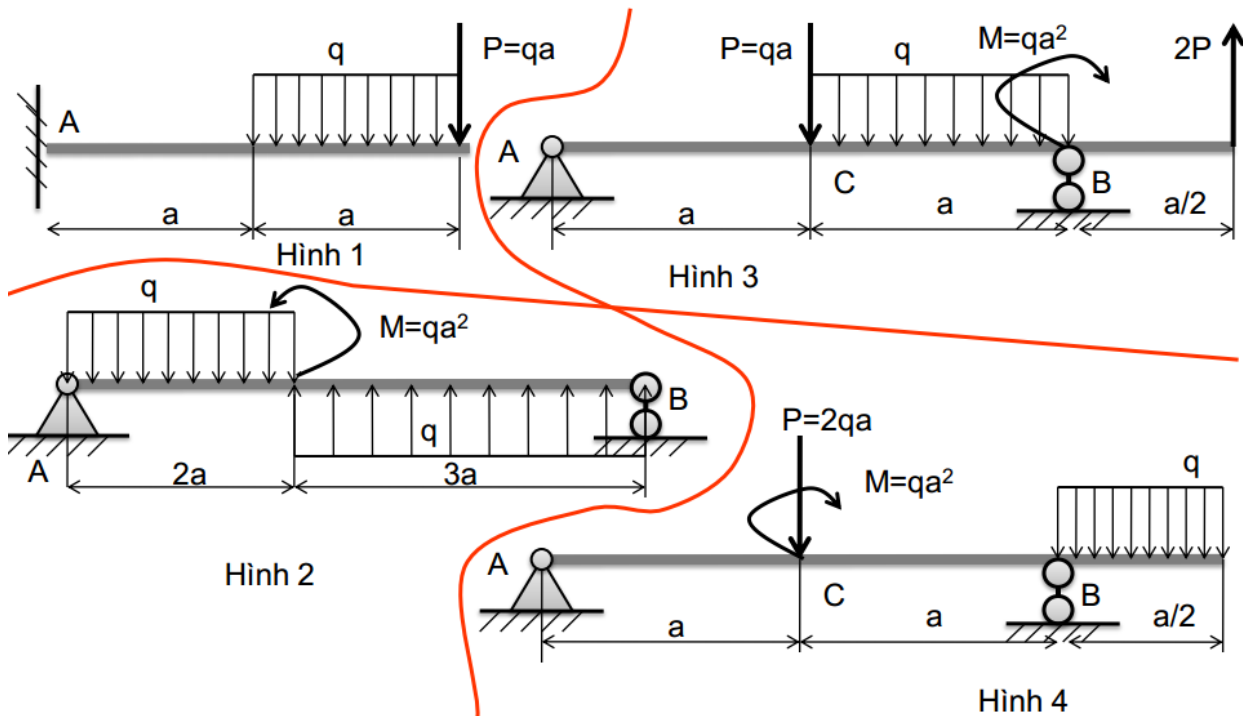
$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_{kéo}}{[\sigma]_{nén}} \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Hạn chế: ko xét đến σ_2 .

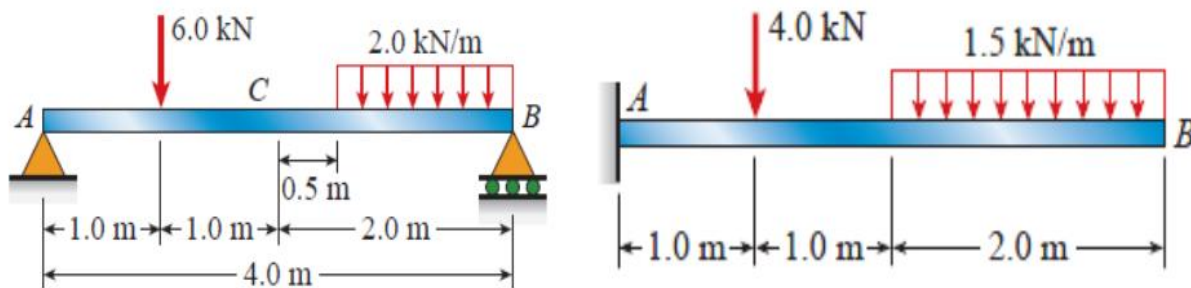


Bài tập Vẽ biểu đồ nội lực

BT 4.1 – 4.4:

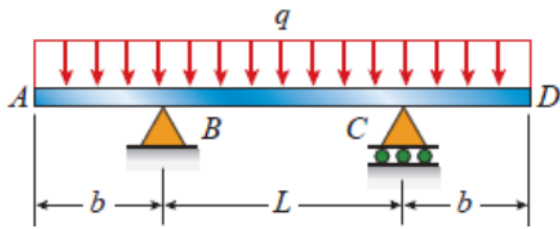


BT 4.5 – 4.6:

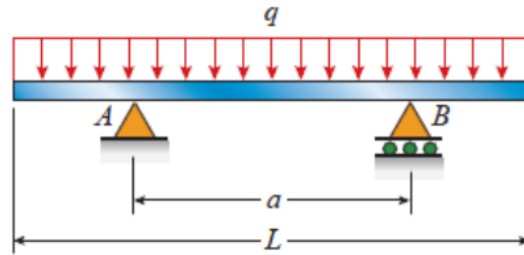


BT 4.7 – 4.8: Xác định KT?

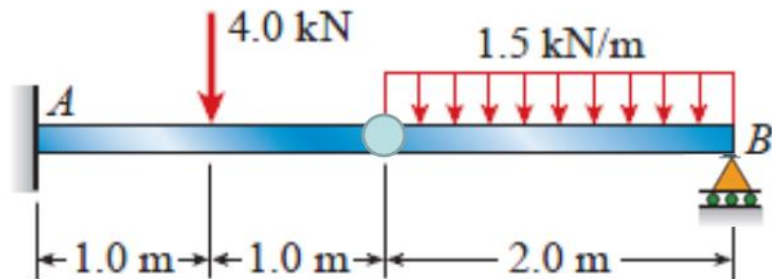
$L/b=?$ Để mômen giữa dầm $=0$



$a=?$ Để mômen đạt min



BT 4.9: Vẽ biểu đồ mô men dầm tĩnh định nhiều nhịp



Chương 5. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

5.1. Momen tĩnh

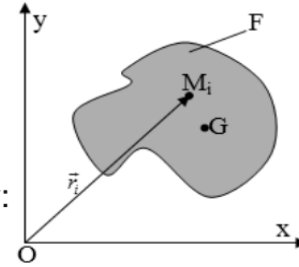
*) *Định nghĩa:*

- Mô men tĩnh của hình F đối với điểm O:

$$\vec{S}_o = \int_F \vec{OM}_i dF$$

- Mô men tĩnh của hình F đối với trục Ox, Oy:

$$S_x = \int_F y dF; S_y = \int_F x dF$$



Thứ nguyên của S là [chiều dài]³. S có thể >0, =0 hoặc <0.

Nếu trục x có $S_x=0$ thì trục x được gọi là trục trung tâm.

Nếu điểm G có $S_G=0$ thì G được gọi là trọng tâm.

Giao hai trục trung tâm được là trọng tâm.

*) *Công thức xác định trọng tâm:*

$$\begin{cases} S_x = y_G \cdot F \\ S_y = x_G \cdot F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{S_y}{F} \\ y_G = \frac{S_x}{F} \end{cases}$$

*) *Cách xác định trọng tâm hình được ghép từ các hình đơn giản:*

Bước 1: Chọn một hệ trục tọa độ (bất kỳ), sau đó tính các mômen tĩnh của từng hình nhỏ đối với hệ trục vừa chọn, và tính diện tích các hình nhỏ.

Bước 2: Tính tọa độ trọng tâm G trong hệ trục tọa độ vừa chọn theo công thức sau:

$$x_G = \frac{S_{y\Sigma}}{F_\Sigma} = \frac{\sum S_{y(i)}}{\sum F_{(i)}}; y_G = \frac{S_{x\Sigma}}{F_\Sigma} = \frac{\sum S_{x(i)}}{\sum F_{(i)}}$$

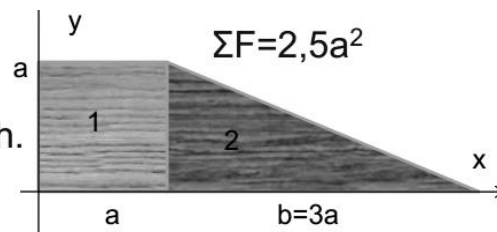
*) *Ví dụ 1: xác định trọng tâm.*

- Chọn hệ trục tọa độ.

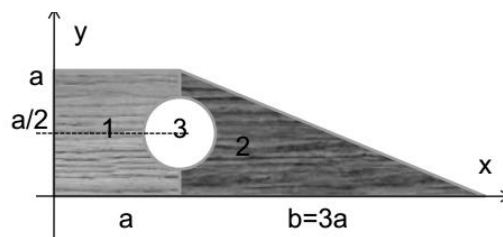
- Tính mômen tĩnh S của từng hình.

Hình vuông:

$$\begin{cases} S_{x1} = \\ S_{y1} = \end{cases}$$



*) Ví dụ 2: xác định trọng tâm.
Hình khoét rỗng coi như hình
bình thường với diện tích âm.



5.2. Momen quán tính

5.2.1. Định nghĩa – Biểu thức – Tính chất

*) Định nghĩa:

- Mômen quán tính độ cực của hình F đối với điểm O:

$$J_p = \int_F r_i^2 dF$$

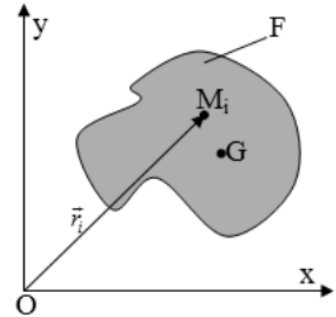
- Mômen quán tính của hình F đối với trục Ox, Oy:

$$J_x = \int_F y^2 dF; J_y = \int_F x^2 dF$$

- Mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục Oxy: $J_{xy} = \int_F xy dF$

Nếu $J_{xy}=0$ thì hệ trục Oxy đc gọi là hệ trục qt chính.

Nếu hệ trục qt chính có gốc $O \equiv G$ thì đc gọi là hệ trục qt chính trung tâm.



*) Tính chất:

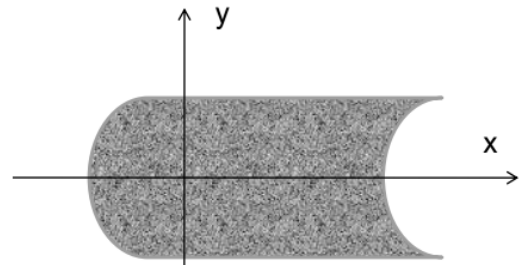
-Thứ nguyên của J là [chiều dài]⁴

- J_p, J_x, J_y luôn >0 . nhưng J_{xy} có thể $>0, =0, <0$.

- Hình có trục đối xứng thì trục đối xứng cùng với một trục vuông góc tạo nên hệ trục quán tính chính.

- Hình được gồm từ nhiều hình đơn giản thì tính J, S hình lớn bằng tổng từ các hình nhỏ:

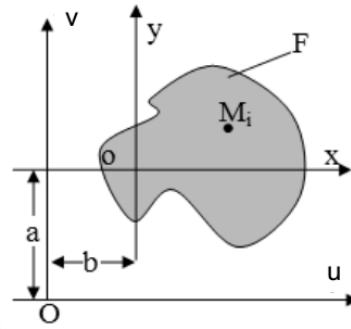
$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n S_x^i & S_y &= \sum_{i=1}^n S_y^i \\ I_x &= \sum_{i=1}^n I_x^i & I_y &= \sum_{i=1}^n I_y^i \end{aligned}$$



5.2.2. Công thức chuyển trục song song

$$S_u = S_x + aF; S_v = S_y + bF$$

$$\begin{cases} J_u = J_x + 2bS_x + a^2F \\ J_v = J_y + 2aS_y + b^2F \\ J_{uv} = J_{xy} + aS_x + bS_y + abF \end{cases}$$



Nếu hệ ban đầu oxy có gốc o≡G trọng tâm:

$$\begin{cases} J_u = J_x + a^2F \\ J_v = J_y + b^2F \\ J_{uv} = J_{xy} + abF \end{cases}$$

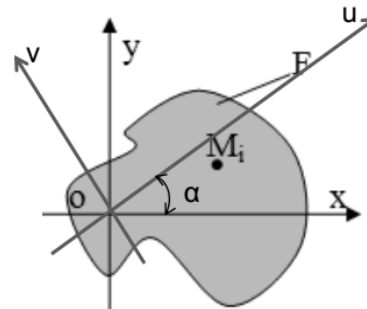
5.2.3. Công thức xoay trục

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

$$S_u = \int_F v dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF = S_x \cos \alpha - S_y \sin \alpha$$

$$S_v = \int_F u dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha) dF = S_x \sin \alpha + S_y \cos \alpha$$

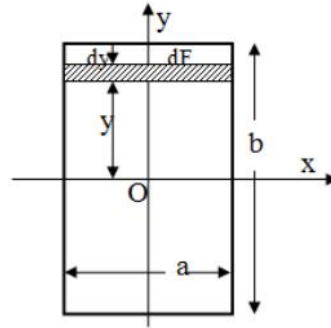
$$\begin{cases} J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_v = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$



5.2.4. Mô men quán tính một số tiết diện thường gặp

**) Hình chữ nhật:*

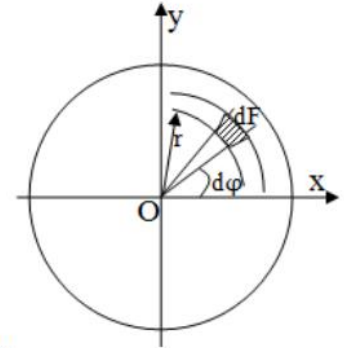
$$J_x = \frac{ab^3}{12}; \quad J_y = \frac{ba^3}{12}$$



**) Hình tròn:*

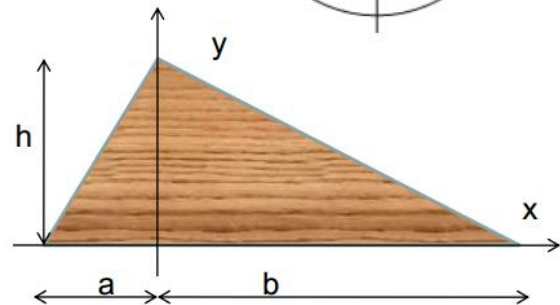
$$J_P = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

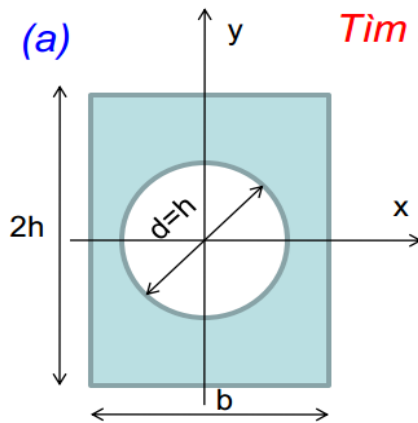


**) Hình tam giác:*

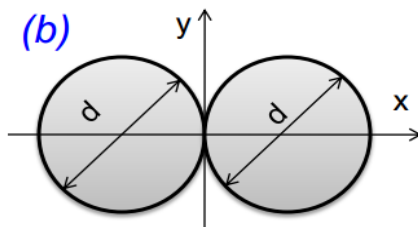
$$J_x = \frac{(a+b)h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h(a^3 + b^3)}{12}$$



BT 5.1:

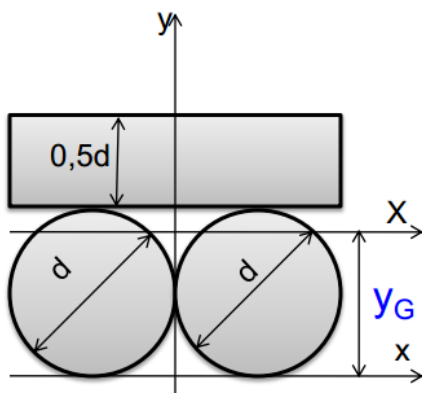


Tìm mômen qt chính trung tâm J_x, J_y ?



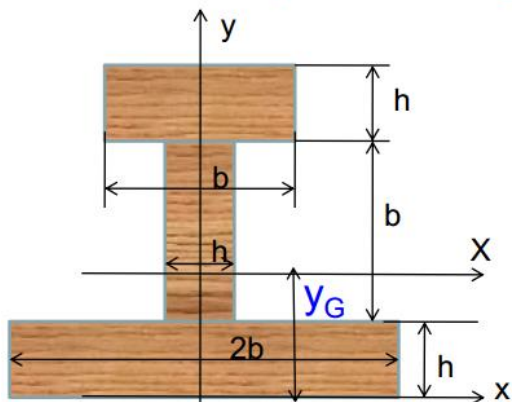
BT 5.2:

Tìm mômen qt chính trung tâm J_x, J_y ?



BT 5.3:

Tìm mômen qt chính trung tâm J_x, J_y ?

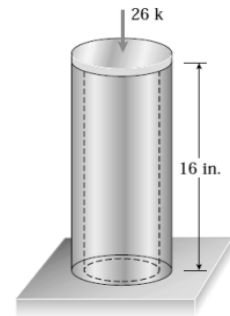


Chương 6

THANH CHỊU KÉO, NÉN ĐÚNG TÂM

6.1. Định nghĩa và các giả thuyết

- Một thanh được gọi là chịu kéo nén đúng tâm nếu trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có thành phần lực dọc N_z .
- Lực dọc N_z có thể tìm được thông qua phương pháp mặt cắt.

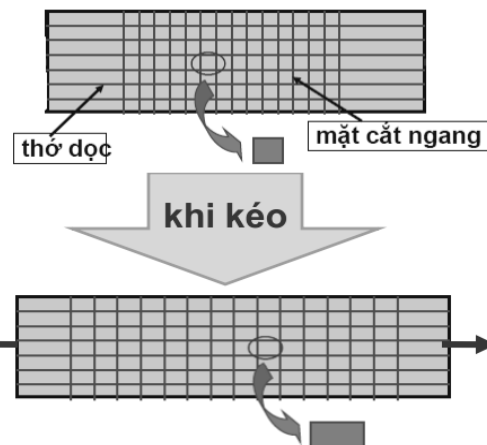


- Trong thực tế: các xà chống, cột điện, thanh giằng, dây văng cầu treo... là các trường hợp chịu kéo nén đúng tâm.

6.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang

*) Thí nghiệm:

- Xét một mẫu thanh chịu kéo đúng tâm.
- Trước khi kéo: vạch lên mẫu các đường thẳng // và $\perp$ trục thanh.
- Quan sát mẫu sau khi kéo:
Đường // trục vẫn // trục. k/c giữa chúng không đổi.
Đường $\perp$ trục thanh vẫn $\perp$ nhưng khoảng cách đã thay đổi



→ Giả thuyết về biến dạng:

- Mặt cắt ngang: luôn phẳng và $\perp$ với trục thanh.
- Thớ dọc: luôn // trục thanh, ko chèn ép, tác dụng lên nhau.
- Quá trình biến dạng tuân theo định luật Hooke: $\sigma_x = E\varepsilon_x$

***) Công thức tính ứng suất:**

- Dựa trên giả thuyết về biến dạng:



Giả thuyết về mcn $\rightarrow$ các ứng suất tiếp bằng không.

Giả thuyết về thờ dọc $\rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 0$, chỉ còn σ_z

Theo công thức liên hệ nội lực và ứng suất ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF$$

Trong đó: $\sigma_z = E\varepsilon_z = \text{const}$ trên toàn mặt cắt F nên:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \sigma_z F \Rightarrow \sigma_z = \frac{N_z}{F}$$

6.3. Biến dạng của thanh chịu kéo, nén đúng tâm

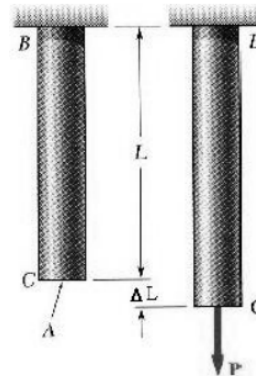
Thanh chiều dài L chịu kéo (nén) sẽ dãn ra (co lại) một đoạn ΔL được gọi là biến dạng dọc thanh.

*) Công thức tính biến dạng ΔL :

Ta có:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \Rightarrow \Delta dz = \varepsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{N}{EF} dz$$

$$\Rightarrow \Delta L = \int_l \Delta dz = \int_l \frac{N}{EF} dz$$



Trong đó E được gọi là môđun đàn hồi hay hằng số Young.

Tích EF được gọi là độ cứng chịu kéo, nén của thanh.

Nếu đoạn có EF ko đổi: $\Rightarrow \Delta L = \frac{1}{EF} \int_l N dz = \frac{\text{Diện tích biểu đồ } N_z}{EF}$

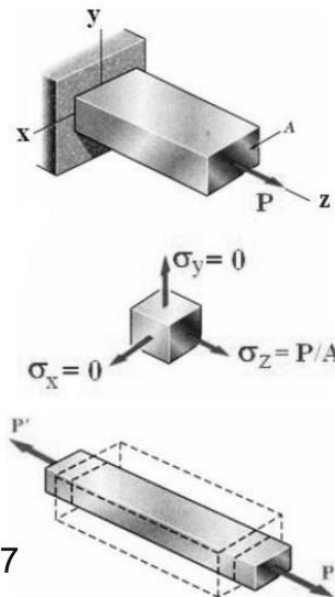
*) Hệ số poisson:

Khi thanh bị kéo đúng tâm bởi lực P theo phương z , phương z bị dãn ra với biến dạng tỷ đối là ε_z thì phương vuông góc x , y bị biến dạng co lại với biến dạng tỷ đối:



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z$$

Hệ số μ được gọi là hệ số poisson – tên của người tìm ra nó.



Hệ số poisson một số vật liệu:

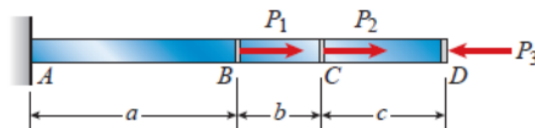
$$\mu_{\text{thép}} = 0,25-0,33; \mu_{\text{đồng}} = 0,31-0,34; \mu_{\text{cao su}} = 0,47$$

Ví dụ 1: Cho $a=60\text{cm}$, $b=24\text{cm}$, $c=36\text{cm}$. $F=15\text{cm}^2$, $E=200\text{GPa}$

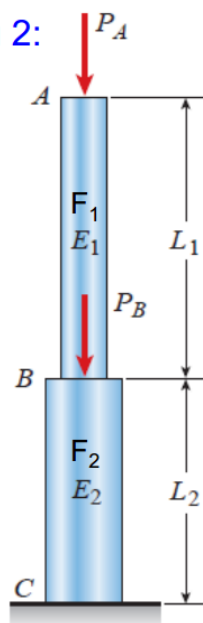
$P_1= 270\text{kN}$, $P_2= 180\text{kN}$, $P_3= 130\text{kN}$,

Hỏi.

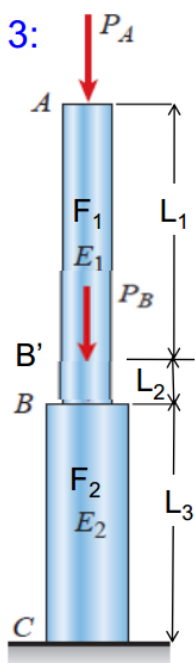
- Ứng suất trong thanh?
- $\Delta_{AD}=?$
- P_3 thay đổi? Để $\Delta_{AD}=0$.



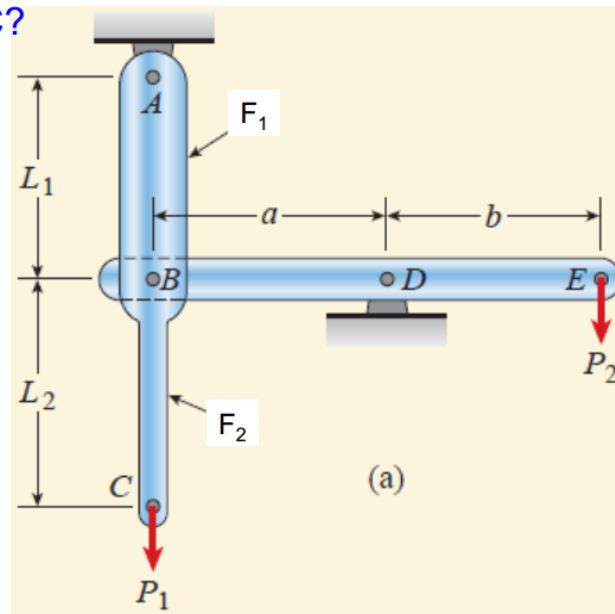
Ví dụ 2: P_A Tính U'S trong thanh và chuyển vị tại A



Ví dụ 3: P_A Tính U'S trong thanh và chuyển vị tại A



Ví dụ 4: Tính chuyển vị tại C?



6.4. Điều kiện bền

***) Ứng suất cho phép $[\sigma]$:**

-VL dẻo: lấy $\sigma_{\text{cho phép}} = [\sigma] = \sigma_{\text{chảy}}$.

-VL giòn: lấy $\sigma_{\text{cho phép}} = [\sigma] = \sigma_{\text{bền}}$.

***) Ktra điều kiện bền:**

-VL dẻo: $\max \{ \sigma_{\text{zmax}}, |\sigma_{\text{zmin}}| \} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{ch}}}{n}$

-VL giòn: $\sigma_{\text{zmax}} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n} \quad |\sigma_{\text{zmin}}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$

$n > 1$ được gọi là hệ số an toàn. (sao cần n ?).

n lớn thì an toàn nhưng tốn kém vật liệu và ngược lại.

6.5. Bài toán siêu tĩnh

Nếu trong hệ vật, số ẩn số nhiều hơn số phương trình cân bằng thì bài toán đó là bài toán siêu tĩnh

Hệ vật có số ẩn số nhiều hơn số phương trình cân bằng lập được gọi là hệ siêu tĩnh

Trong mặt phẳng, nếu số bậc tự do bị khống chế nhiều hơn 3 (có hơn 3 ẩn số) thì đó là bài toán siêu tĩnh

Bậc siêu tĩnh là số chênh lệch giữa số ẩn số (phản lực liên kết khống chế bậc tự do) và số phương trình cân bằng lập được

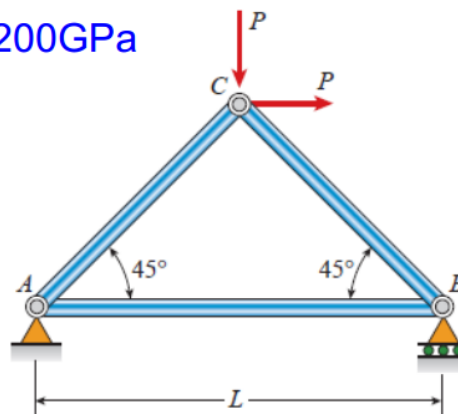
Để giải bài toán siêu tĩnh, ngoài các phương trình cân bằng ta phải cần thêm các phương trình biến dạng và các dữ kiện ban đầu.

- Chuyển vị tại đầu ngàm bằng 0
- Tổng chuyển vị tại vị trí giữa dầm chịu ngàm hai đầu bằng 0
- V.V...

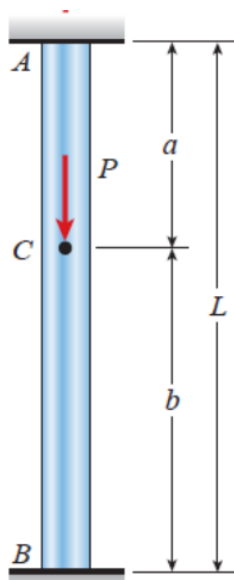
Ví dụ 5: Cho $L=3\text{m}$, $F=3900\text{mm}^2$, $E=200\text{GPa}$

a) $P= 650\text{kN}$. Hỏi $\Delta_B=?$

b) $[P]= ?$. Biết $[\Delta_B]=1,5\text{mm}$.



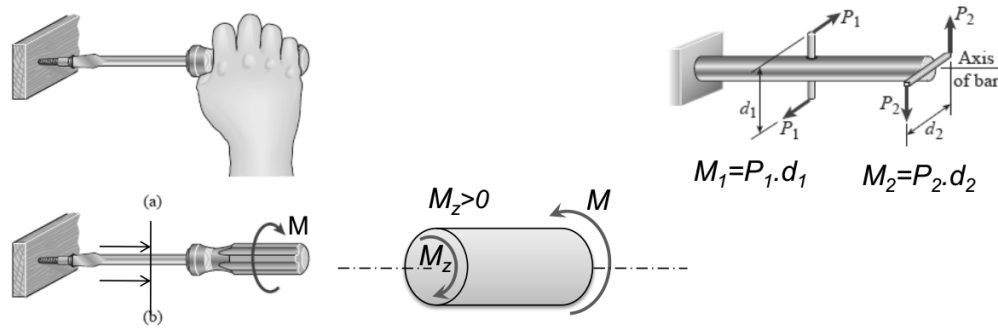
Ví dụ 6: Tìm chuyển vị tại C, biết độ cứng của thanh là EF .



Chương 7. XOẮN THANH THẲNG

7.1. Định nghĩa và các giả thuyết

7.1.1. Xoắn thuần túy



- Xoắn thuần túy là trường hợp thanh chịu lực mà trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có nội lực mômen xoắn M_z .
- Quy ước dấu: M_z mang dấu dương khi nhìn vào mặt cắt ngang thấy chiều M_z quay cùng chiều kim đồng hồ.
- Xoắn thuần túy xảy ra khi thanh chịu mômen hay ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh.

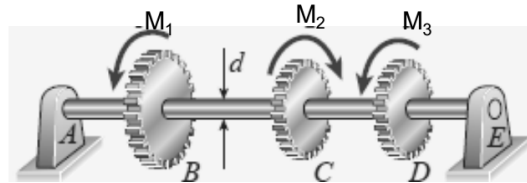
- *) Biểu đồ mômen xoắn: là đường biểu diễn sự biến thiên của mômen xoắn theo vị trí của mặt cắt trên trục.
- Xác định bằng phương pháp mặt cắt.

*) Ví dụ 1:

Cho trục AE có thể quay không ma sát quanh A, E.

$M_1 = 275 \text{ Nm}$, $M_2 = 450 \text{ Nm}$,
 $M_3 = 175 \text{ Nm}$.

Vẽ biểu đồ mômen xoắn?



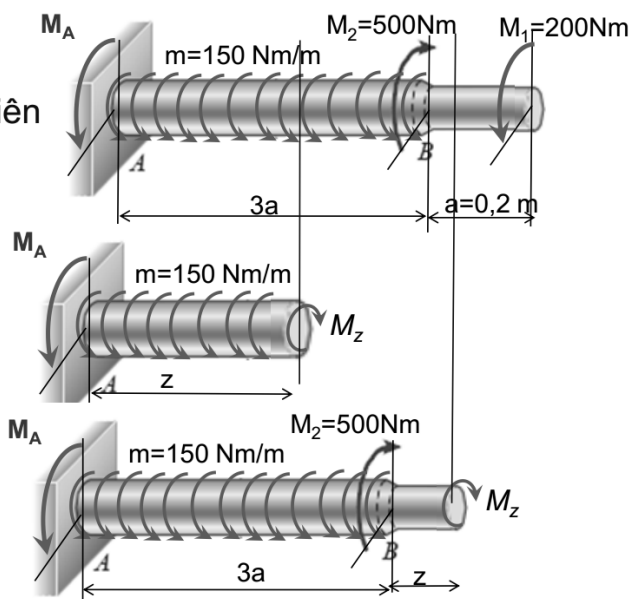
Tại đầu A và E mômen bằng bao nhiêu?

*) Biểu đồ mômen xoắn:

Ví dụ 2:

- Xác định phản lực liên kết tại ngàm:

$M_A =$

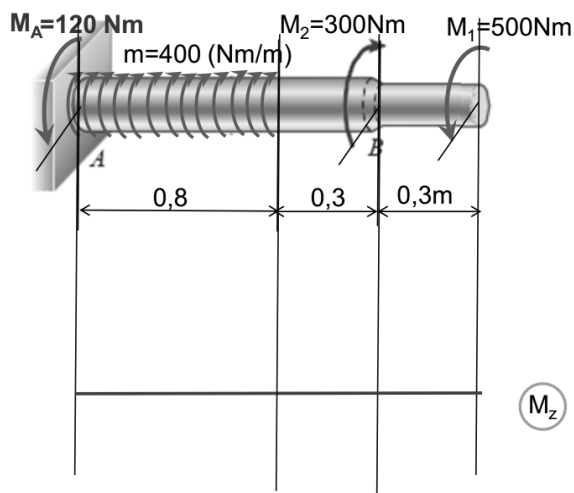


*) Biểu đồ mômen xoắn:

Ví dụ 3:

C1: Tính phản lực liên kết M_A rồi vẽ theo chiều $\rightarrow$

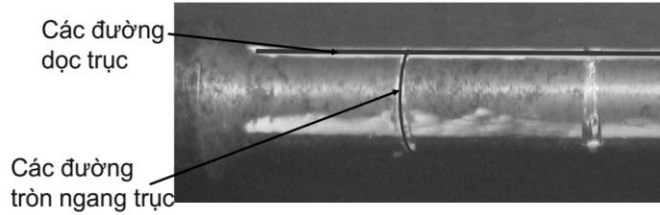
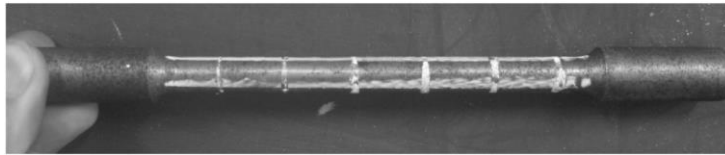
C2: Vẽ ngay từ đầu tự do theo chiều $\leftarrow$ sẽ không cần tính phản lực liên kết.



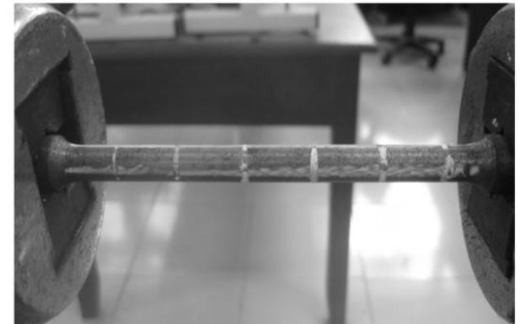
7.1.2. Các giả thuyết về biến dạng

a) Thí nghiệm xoắn thuần lý thanh trịn

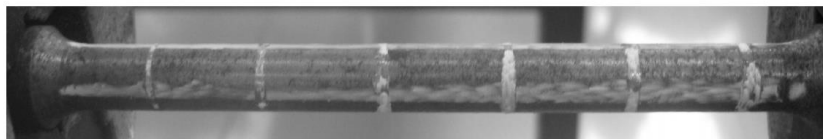
Mẫu thí nghiệm:



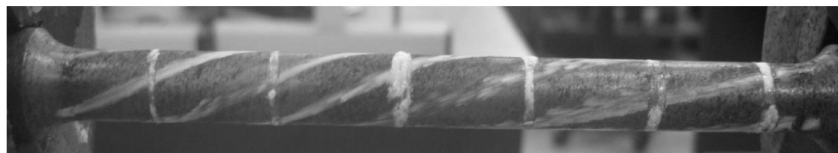
Kẹp mẫu vào mâm cặp:



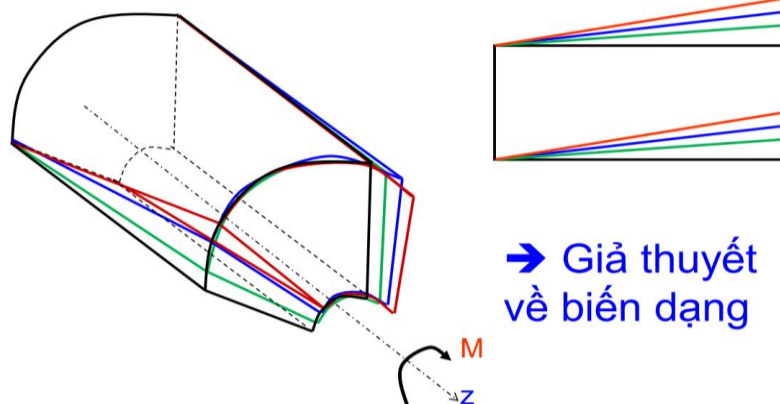
So sánh mẫu TRƯỚC thí nghiệm:



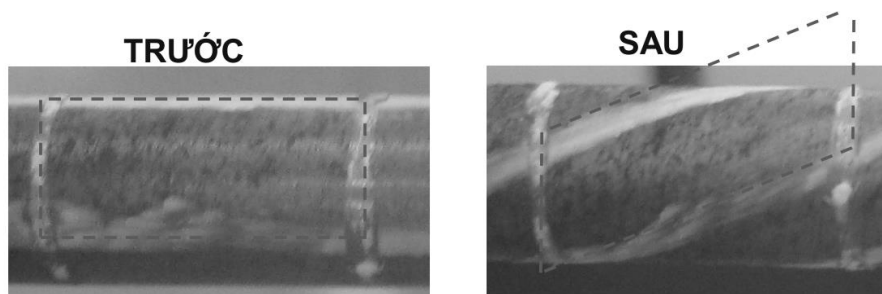
Và SAU thí nghiệm:



Mô tả quá trình biến dạng:



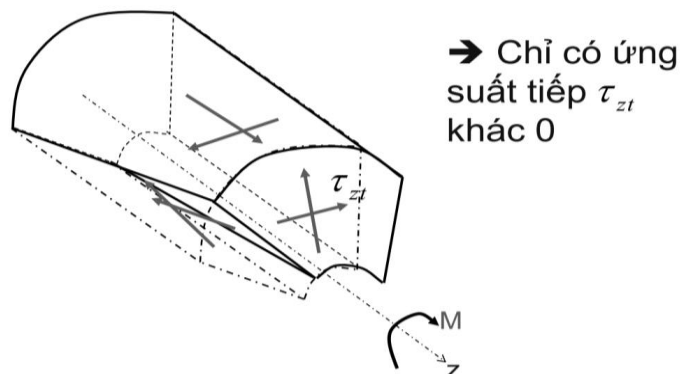
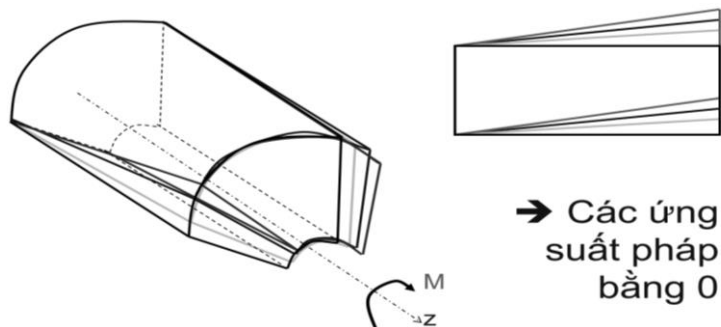
b) Các giả thuyết



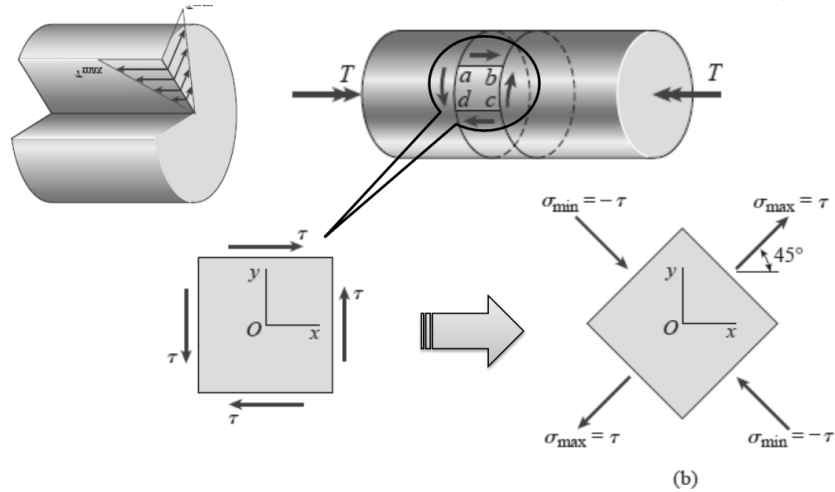
Giả thuyết về mặt cắt ngang: trước và sau khi chịu xoắn mặt cắt ngang luôn tròn, phẳng và vuông góc với trục của thanh. Khoảng cách giữa chúng không đổi.

Giả thuyết về bán kính: trước và sau khi chịu xoắn bán kính tại mọi mặt cắt ngang không đổi.

7.2. Ứng suất khi xoắn thanh tròn

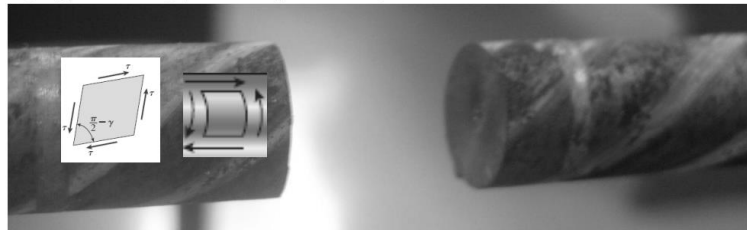


TTU'S của tổ chịu xoắn thuần túy là TTU'S trượt thuần túy.

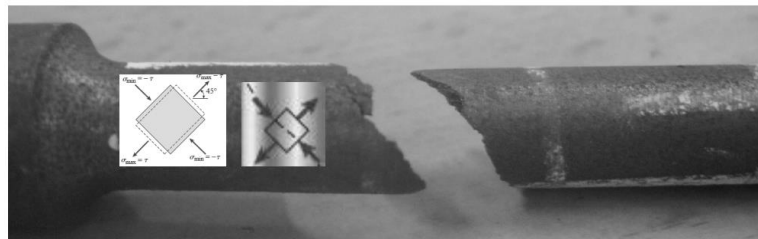


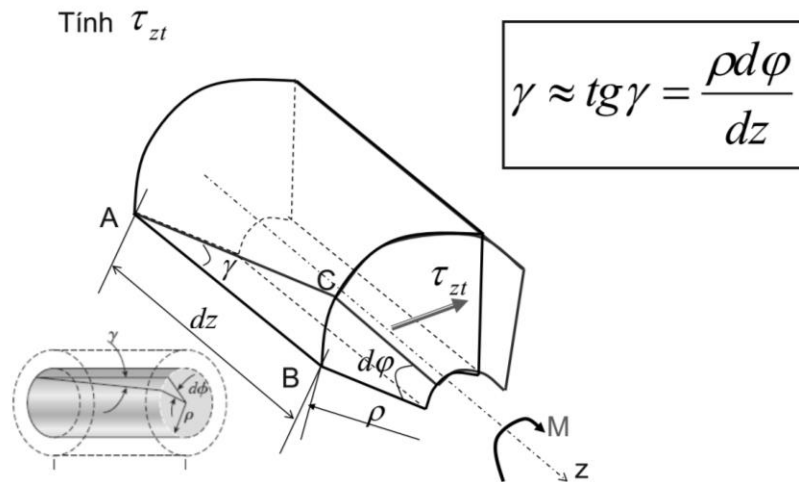
Hình dạng mẫu bị phá hủy khi chịu xoắn tới hạn:

Vật
liệu
DẼO



Vật
liệu
GIÒN





Tính τ_{zt} :

Ta có: $\tau_{zt} = \gamma \cdot G = \frac{\rho d\phi}{dz} G$

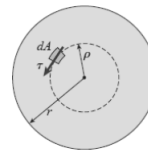
Mặt khác:

$$M_z = \int_F \tau_{zt} dF \cdot \rho = \int_F \frac{\rho d\phi}{dz} G dF \cdot \rho$$

$$= \frac{G d\phi}{dz} \int_F \rho^2 dF = \frac{G d\phi}{dz} J_p$$

mômen quán
tính độc cực
của mcn. (J_p)

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p}$$



$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_p} \rho$$

ρ là bán kính
tại điểm cần
tính U'S tiếp.

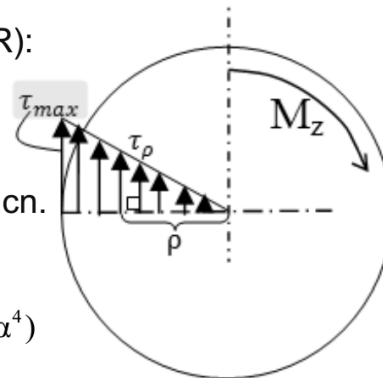
***) Biểu đồ ứng suất tiếp - ứng suất tiếp lớn nhất:**

τ_ρ tỷ lệ thuận với ρ và có phương vuông góc với bán kính.

$\tau_{\max}$ tại các điểm nằm trên chu vi ($\rho=R$):

$$\tau_{\max} = \tau_R = \frac{M_z}{J_p} R = \frac{M_z}{W_p}$$

$W_p = \frac{J_p}{R}$ là mômen chống xoắn của mcn.



$$\begin{cases} J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^4 (1 - \alpha^4) \\ W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16} = 0.2 D^3 (1 - \alpha^4) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

7.3. Biến dạng của thanh tròn chịu xoắn

Ta có: $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \Rightarrow d\varphi = \frac{M_z}{GJ_p} dz$

$$\Rightarrow \varphi = \int_l \frac{M_z}{GJ_p} dz \quad \begin{array}{l} GJ_p \text{ độ cứng khi xoắn.} \\ \varphi \text{ có đơn vị là radian.} \end{array}$$

N xét: φ chính là diện tích biểu đồ M_z/GJ_p chiếu xuống trục z .

Nếu trên đoạn thanh có GJ_p và M_z const thì:

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}$$

Nếu trên thanh gồm nhiều đoạn có GJ_p và M_z const thì:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_z l}{GJ_p} \right)_i$$

a) **Điều kiện bền**

***) Điều kiện bền:** $\max(|\tau|) = \max\left(\frac{|M_z|}{W_p}\right) \leq [\tau]$

Cách xác định ứng suất tiếp cho phép:

- Theo thí nghiệm: $[\tau] = \frac{\tau_0}{n}$

- Theo thuyết bền U'STLN: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$

- Theo thuyết bền TNBĐHD: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

***) Điều kiện cứng:**

$$\max(|\theta|) = \max\left(\frac{|M_z|}{GJ_p}\right) \leq [\theta] \quad \begin{array}{l} [\theta] \text{ có đơn vị là} \\ \text{radian/[chiều dài].} \end{array}$$

b) **Bì tổn cơ bản**

*) *Bài toán kiểm tra*: Mọi thông số đã cho, kiểm tra bền, cứng?

$$\max(|\tau|) = \max\left(\frac{|M_z|}{W_p}\right) \leq [\tau]; \quad \max(|\theta|) = \max\left(\frac{|M_z|}{GJ_p}\right) \leq [\theta]$$

*) *Bài toán thiết kế*: Tìm thông số kích thước mcn?

$$W_p \geq \frac{\max(|M_z|)}{[\tau]} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{\max(|M_z|)}{0.2[\tau](1-\alpha^4)}} = [D]_1 \quad \text{Ta chọn:}$$

$$J_p \geq \frac{\max(|M_z|)}{G[\theta]} \Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{\max(|M_z|)}{0.1[\theta](1-\alpha^4)G}} = [D]_2 \quad D \geq \max([D]_1, [D]_2)$$

*) *Bài toán tìm tải trọng cho phép*: Biết vật liệu, kích thước mcn.

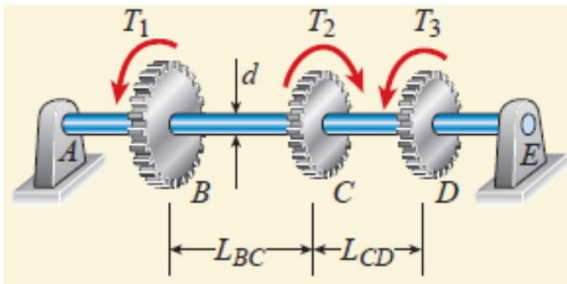
$$M_z \leq W_p [\tau] = [M_z]_1 \quad \Rightarrow M_z \leq \max([M_z]_1, [M_z]_2)$$

$$M_z \leq GJ_p [\theta] = [M_z]_2$$

c) Ví dụ tính thanh trục chịu xoắn

*) *Ví dụ 1*: Trục đường kính $d=30$ mm, quay ko ma sát quanh A, E. Tại C có mômen dẫn $T_2=450$ Nm, tại B và D có $T_1=275$ Nm và $T_3=175$ Nm, chiều dài $L_{BC}=500$ mm and $L_{CD}=400$ mm, modun $G=80$ GPa.

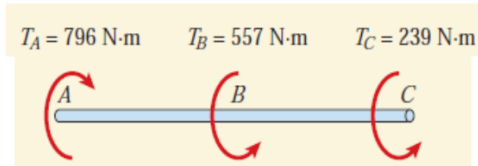
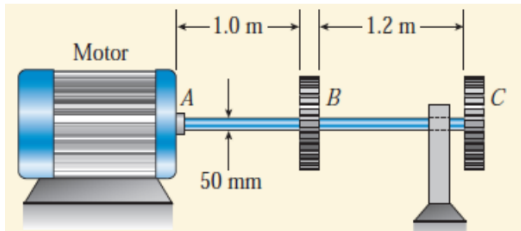
Determine $\zeta_{\max}$ trên trục và góc xoắn tương đối φ_{BD} ?



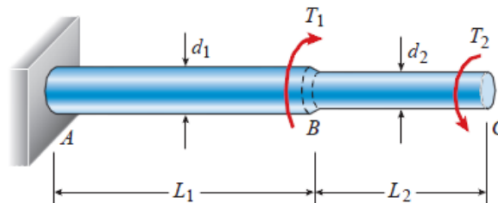
*) *Giải ví dụ 1*: để tìm $\zeta_{\max}$ trên trục ta áp dụng công thức:

$$\max(|\tau|) = \max\left(\frac{|M_z|}{W_p}\right)$$

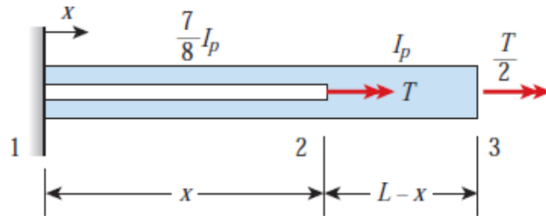
*) Ví dụ 2: Trục đường kính $d=50$ mm. Công suất động cơ truyền tại A là $P_A=50$ kW, tần số $f=10$ Hz. Bánh răng B và C yêu cầu công suất $P_B=35$ kW and $P_C=15$ kW, (Cho $G=80$ Pa.)
Determine $\zeta_{\max}$ trên trục và góc xoắn tương đối φ_{AC} ?



*) Ví dụ 3: Cho trục bậc ($d_1=30$ mm; $d_2=20$ mm) chịu xoắn bởi mômen $T_1= 500$ Nm, $T_2=200$ Nm, chiều dài $L_1=600$ mm and $L_2=400$ mm, modun $G = 80$ GPa.
Determine $\zeta_{\max}$ trên trục và góc xoắn φ_C tại đầu tự do C?

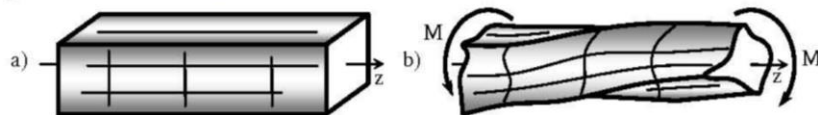


*) Ví dụ 4: Tìm x để góc xoắn tại đầu tự do $\varphi_3 = TL/GJ_p$



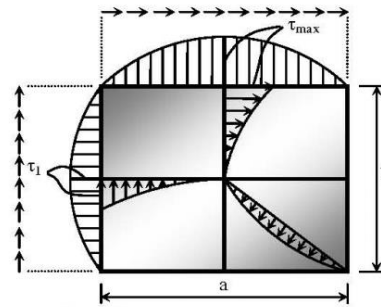
7.4. Xoắn thanh có tiết diện hình chữ nhật

Thực nghiệm cho thấy, khi xoắn thanh có tiết diện không tròn thì mặt cắt ngang của thanh sẽ bị vênh không còn phẳng nữa (hình 8.8b). Vì vậy giả thiết về mặt cắt ngang vẫn phẳng không còn được chấp nhận. Ta thừa nhận một số kết quả tìm được bằng lý thuyết đàn hồi (bài toán Saint-Venant). Theo đó, biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật kích thước $h \times b$ có dạng như trên hình 8.9.



Hình 8.8: Sự vênh của tiết diện không tròn khi chịu xoắn.

Hình 8.9: Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật chịu xoắn.



Ứng suất tiếp bằng không tại các góc và trọng tâm của tiết diện.

Ứng suất tiếp đạt trị số lớn nhất tại trung điểm của cạnh dài a:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{xo}} \quad (8.16).$$

Tại trung điểm cạnh ngắn b, ứng suất tiếp cũng có giá trị khá lớn:

$$\tau_1 = \gamma \tau_{max} \quad (8.17).$$

Góc xoắn tỷ đối của thanh:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_{xo}} \quad (8.18).$$

Bảng 8.2.

$\frac{a}{b}$	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	0,333
γ	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,741

Trong đó:

$W_{xo} = \alpha ab^2$ - mômen chống xoắn tiết diện chữ nhật.

$J_{xo} = \beta ab^3$ - mômen quán tính của tiết diện chữ nhật.

Các hệ số α, β, γ được cho trong bảng 8.2 theo tỷ số các cạnh $\frac{a}{b}$ với qui ước $a > b$.

Theo bảng 8.2 ta thấy khi tỷ số $\frac{a}{b} \geq 10$ thì có thể lấy $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

Điều kiện bền và điều kiện cứng của thanh tiết diện chữ nhật chịu xoắn:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{\alpha ab^2} \leq [\tau] \quad (8.19).$$

$$\theta_{max} = \frac{M_z}{G\beta ab^3} \leq [\theta] \quad (8.20).$$

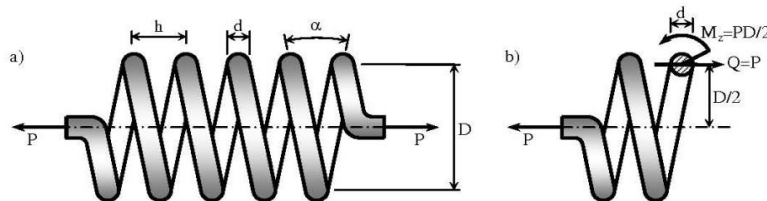
7.5. Tính lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn

Xét lò xo xoắn ốc hình trụ có tiết diện của dây là hình tròn đường kính d và đường kính trung bình của vòng lò xo là D , chịu lực kéo P trùng với trục của lò xo như trên hình 8.6a. Khoảng cách giữa hai vòng lò xo gọi là bước của lò xo ký hiệu h ; góc nghiêng giữa các dây lò xo ký hiệu α ; số vòng dây làm việc của lò xo ký hiệu là n .

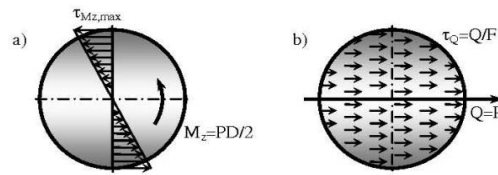
Nếu góc nghiêng α lớn ta gọi là lò xo bước dài, ngược lại thì gọi là lò xo bước ngắn.

Trường hợp lò xo bước ngắn, mặt phẳng tiết diện của dây có thể coi là trùng với mặt phẳng chứa trục lò xo, khi đó lực cắt Q và mômen xoắn M_z (hình 8.6b) được tính:

$$\text{Lực cắt } Q = P; \text{ mô men xoắn } M_z = \frac{PD}{2}.$$



Hình 8.6: Lò xo và ứng lực trên tiết diện.



Hình 8.7: Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện.

Mômen xoắn gây ra ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{Mz,max} = \frac{M_z}{W_\rho}$ tiếp xúc với chu vi của tiết diện

(hình 8.7a). Còn lực cắt gây ra ứng suất tiếp phân bố đều, có trị số $\tau_Q = \frac{Q}{F}$ trùng với chiều của lực cắt (hình 8.7b).

Trên hình 8.7 ta thấy: mép dưới của tiết diện là nguy hiểm nhất vì hai thành phần của ứng suất tiếp cùng chiều nhau, ứng suất tiếp tổng có giá trị lớn nhất là:

$$\tau_{max} = \frac{Q}{F} + \frac{M}{W_\rho} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PD}{2\pi d^3} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{D}\right) \frac{8PD}{\pi d^3} = K_1 \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (8.13).$$

Trong đó K_1 là hệ số điều chỉnh được tìm bởi công thức:

$$K_1 = \frac{4D/d - 1}{4D/d - 4} + \frac{0,615}{D/d} \quad (8.14).$$

Trị số của K_1 tùy thuộc vào tỷ số D/d và cho ở bảng 8.1.

Bảng 8.1												
D/d	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	>12
K_1	2,06	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1

Điều kiện bền của lò xo:

$$\tau_{max} \leq [\tau] \quad (8.15).$$

7.6. Bài toán siêu tĩnh trong xoắn

Bài toán siêu tĩnh khi chịu xoắn thuần túy ta thường gặp là: hai đầu của trục bị ngàm chặt hoặc một đầu bị ngàm chặt, một số vị trí khác của trục hay đầu còn lại chịu liên kết nửa cứng, tức là bài toán có nhiều trạng thái, chẳng hạn khi tác dụng mômen M_1 , trục ở trạng thái tĩnh định, nhưng khi tăng lên bởi mômen M_2 nào đó thì trượt thành trạng thái siêu tĩnh bậc một hay bậc cao hơn.

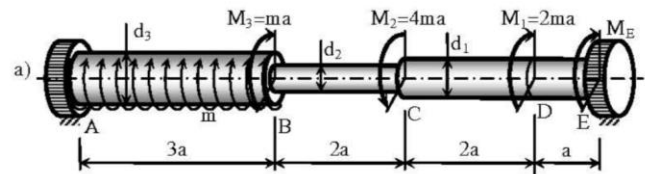
Phương trình cân bằng tĩnh học cho trục chịu xoắn thuần túy chỉ có một phương trình tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên trục lấy đối với trục quay bằng không ($\sum m_z(M_i) = 0$).

Do đó, phương trình thêm vào chỉ có thể là các phương trình mô tả về điều kiện góc xoay tại những nơi có liên kết thừa.

Ví dụ 5

Trục trụ bậc AD có các đường kính d_1, d_2, d_3 , bị ngàm chặt ở hai đầu và chịu lực như trên hình 8.12a. Xác định phản lực tại ngàm E, vẽ biểu đồ nội lực và xác định tải trọng cho phép $[m]$ tác dụng lên trục theo điều kiện bền. Tính góc xoay của mặt cắt qua C theo tải trọng tìm được.

Biết: $G = 8.10^3 \text{ KN/cm}^2$; $[\tau] = 6 \text{ KN/cm}^2$; $d_1 = 4 \text{ cm}$; $d_2 = 3 \text{ cm}$; $d_3 = 5 \text{ cm}$; $a = 0,15 \text{ m}$.



Ví dụ 6

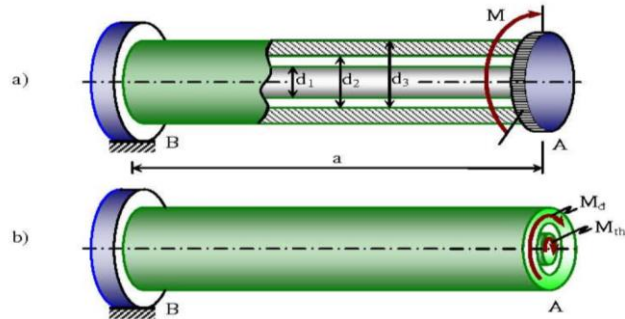
Kết cấu gồm một thanh thép tròn và một ống đồng bị ngâm một đầu và đầu kia được gắn với một đĩa cứng, chịu xoắn bởi mômen M như trên hình 8.13a.

Biết: $M = 200 \text{ N.m}$; $G_{th} = 2G_d = 8.10^6 \text{ N/cm}^2$; $d_1 = 3 \text{ cm}$; $d_2 = 4 \text{ cm}$; $d_3 = 8 \text{ cm}$; $a = 2 \text{ m}$.

(G_{th} , G_d : môđun đàn hồi trượt của thép và đồng).

Tính góc xoắn tại A, ứng suất tiếp lớn nhất trong thanh thép và trong ống đồng.

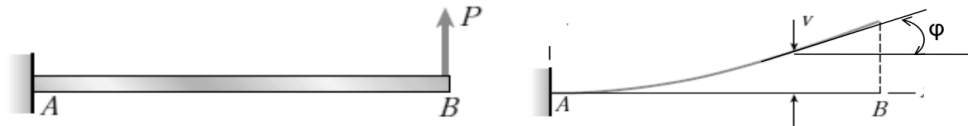
Nếu M di chuyển từ A đến B, nhưng tác dụng vào ống đồng thì góc xoắn tại A thay đổi như thế nào.



Chương 8. UỐN NGANG PHẪNG CÁC THANH THẲNG

8.1. Uốn phẳng thuần túy

8.1.1. Định nghĩa và các giả thuyết

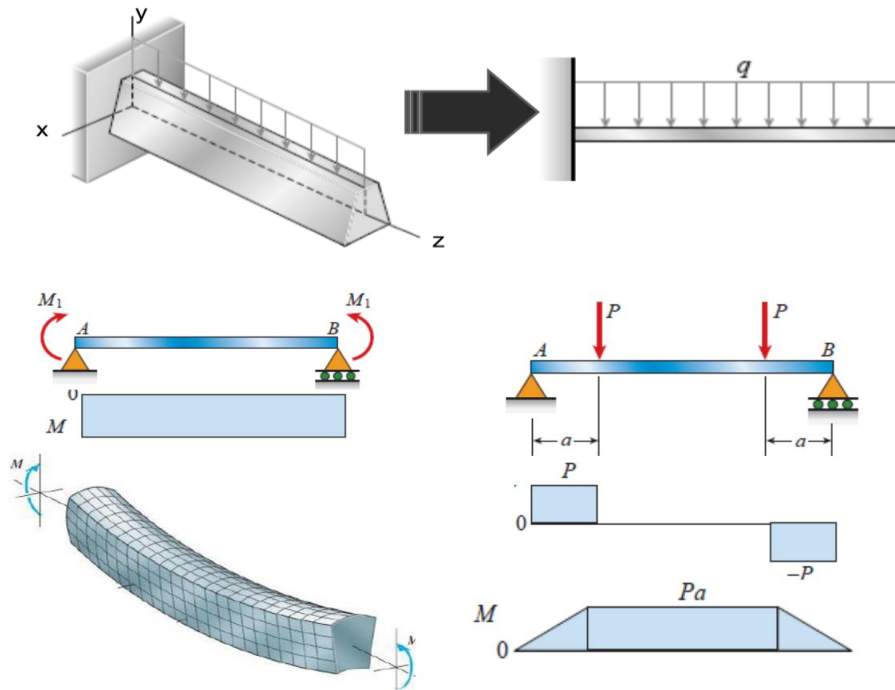


- Tải trọng tác dụng lên thanh, khiến thanh bị cong đi, ta nói thanh chịu uốn.
- Đg biểu diễn trục của thanh khi chịu uốn đc gọi là đg đàn hồi.
- K/c từ vị trí ban đầu của mỗi điểm trên trục tới vị trí điểm đó trên đường đàn hồi được gọi là chuyển vị.
- Góc tạo bởi tiếp tuyến của đg đàn hồi với đường nằm ngang được gọi là góc xoay φ . Xét chuyển vị bé ta có: $\varphi = y'$.
- Thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm.

- Nội lực xuất hiện trong dầm tồn tại cả *lực cắt* và *mômen uốn*.

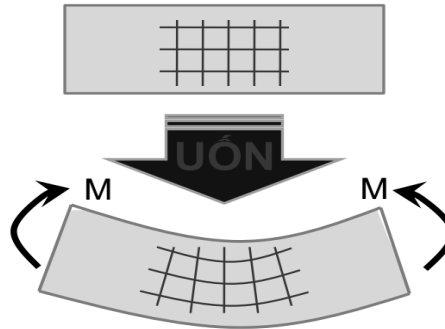
Nếu chỉ tồn tại mômen uốn ta gọi dầm chịu *uốn thuần túy*.

- Trong chương này ta chỉ quan tâm tới dầm có mặt phẳng đối xứng (Oyz) và các tải trọng tác động lên dầm đều thuộc mp đối xứng Oyz thì khi đó ta gọi đó là dầm chịu *uốn ngang phẳng*. Mặt phẳng đối xứng chứa tải trọng khi đó đc gọi là *mp tải trọng*.



***) Thí nghiệm:**

- Xét một mẫu thanh chịu uốn thuần túy.
- Trước khi uốn: vạch lên mẫu các đường thẳng // và $\perp$ trục thanh.
- Quan sát mẫu sau khi uốn:
Đường // trục trở thành đường cong vẫn cùng // trục. k/c giữa chúng không đổi.
Đường $\perp$ trục thanh vẫn $\perp$.

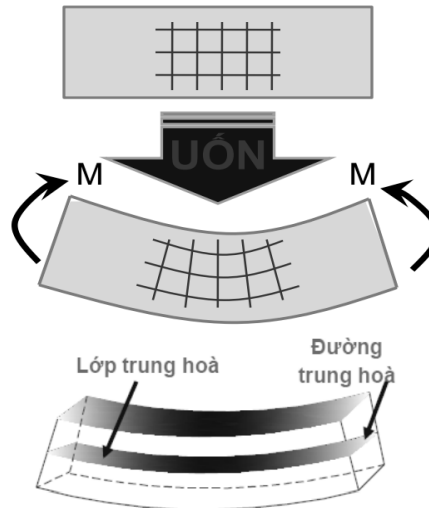


→ Giả thuyết về biến dạng:

- Mặt cắt ngang: luôn phẳng và $\perp$ với trục thanh.
- Thớ dọc: luôn // trục thanh, ko chèn ép và ko tách xa nhau.
- Các góc vuông trước sau biến dạng vẫn vuông.

***) Quan hệ biến dạng:**

- Quan sát mẫu ta thấy có các thớ co lại, có thớ giãn ra, danh giới giữa hai vùng đó là một thớ ko bị biến dạng → thớ trung hòa.
- Giao tuyến thớ trung hòa với mcn được gọi là đường trung hòa.
- Giả thiết biến dạng bé, ta coi các mcn vẫn phẳng.
- Vậy ta có thể tưởng tượng uốn thuần túy làm quay các mcn quanh đường trung hòa.



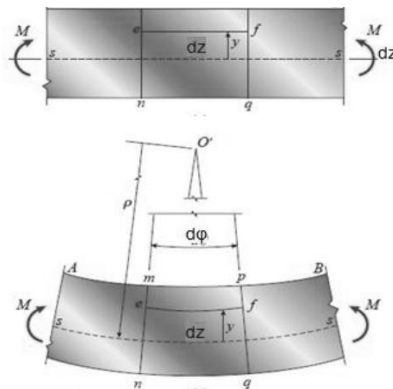
- Xét phân tố tạo bởi 2 mcn (mn-pq) sau khi chịu uốn thuần túy, chúng tạo với nhau góc $d\varphi$, bán kính cong ρ ta có:

$$\rho d\varphi = dz$$

- Xét thớ e-f có tung độ y so với trục trung hòa. sau biến dạng:

$$e'f' = dz = \rho d\varphi \xrightarrow{\text{Sau BD}} e'f' = (\rho + y) d\varphi$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}}$$



8.1.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang

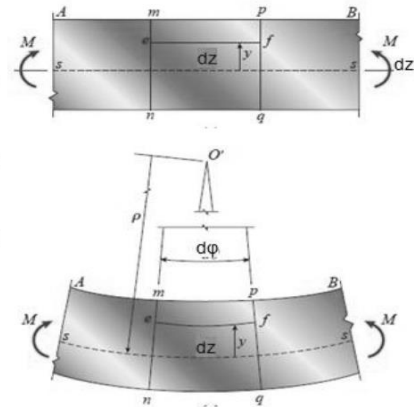
*) Ứng suất dầm chịu uốn thuần túy:

- Từ giả thuyết rút ra từ thí nghiệm:
 Các góc vuông sau BD vẫn vuông suy ra không tồn tại ứng suất tiếp.
 Các thớ tuy bị cong nhưng vẫn giữ k/c ko đổi với nhau $\rightarrow \sigma_y = 0$.
 Chỉ còn lại $\sigma_z \neq 0 \rightarrow$ TTU'S phân tố chịu uốn thuần túy là TTU'S đơn.

*) Tìm σ_z . Ta có:

$$M_x = \int_F y \sigma_z dF = \int_F E \varepsilon_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}} \Rightarrow \sigma_z = E \varepsilon_z = E \left(\frac{y}{\rho} \right) = E \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y}$$



M_x là mômen uốn, quy ước dấu “+” khi làm căng thớ dương và ngược lại.

y là tung độ của điểm đang xét tới trục trung hòa.

J_x là mômen quán tính của mcn với trục trung hòa Ox .

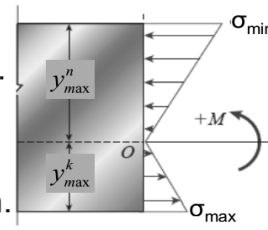
*) Ứng suất lớn nhất trên mcn:

Ta nhận thấy σ_z là đường bậc nhất theo y .

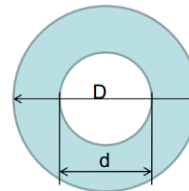
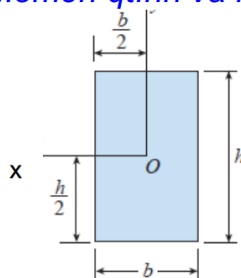
σ_z đạt min, max tại điểm xa trục trung hòa nhất.

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^n = \frac{M_x}{W_x^n} ; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^k = \frac{M_x}{W_x^k}$$

$W_x = \frac{y_{\max}}{J_x}$ được gọi là mômen chống uốn của mcn.



*) Mômen quán tính và mômen chống uốn của một số mcn:



*) *Vị trí đường trung hòa:*

Đường trung hòa tại đó $\sigma_z=0$. Ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \int_F \frac{M_x}{J_x} y dF = \frac{M_x}{J_x} \int_F y dF = 0$$

$$\Rightarrow \int_F y dF = S_x = 0$$

→ Đường trung hòa đi qua trọng tâm của mcn.

*) *Kiểm tra bền:*

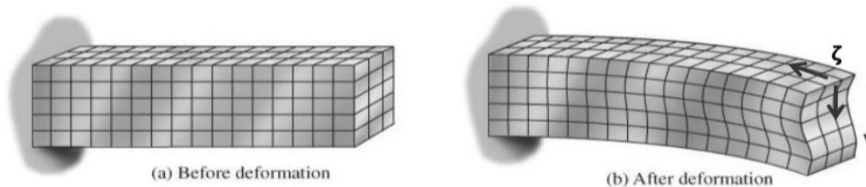
VL dẻo: $\max \{ \sigma_{z_{\max}}, |\sigma_{z_{\min}}| \} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$

VL giòn: $\sigma_{z_{\max}} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n}$

$$|\sigma_{z_{\min}}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$$

8.2. Uốn ngang phẳng

8.2.1. Ứng suất trên mặt cắt ngang



- Nội lực xuất hiện trong dầm bao gồm cả lực cắt Q_y và mômen uốn M_x ta nói dầm chịu *uốn ngang phẳng*.

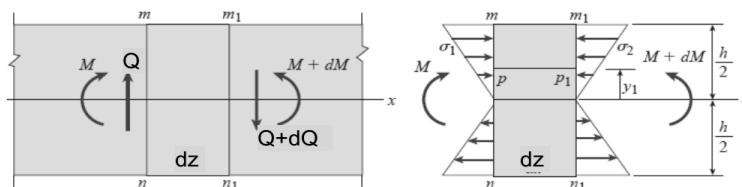
- Lúc này ngoài U'S pháp:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

Còn có thêm cả ứng suất tiếp.

Tìm ứng suất tiếp bằng cách xét phân tố chiều dài dz .

- Xét phân tố theo phương ngang ta có các lực:

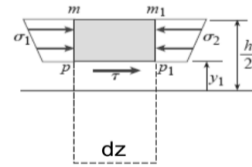


$$F_1 = \int_F \sigma_{z1} dF = \int_F \frac{M_x}{J_x} y dF$$

$$F_2 = \int_F \sigma_{z2} dF = \int_F \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF$$

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dz$$

$$\text{Phân tố CB} \rightarrow F_3 = F_2 - F_1$$



Ta có:

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dz = F_2 - F_1 = \int_F \frac{dM_x}{J_x} y dF$$

$$\Rightarrow \tau = \int_F \frac{dM_x}{dz \cdot b \cdot J_x} y dF = \int_F \frac{Q_y}{b \cdot J_x} y dF \Rightarrow \tau = \frac{Q_y S}{J_x \cdot b}$$

Trong đó:

Q là lực cắt trên mcn.

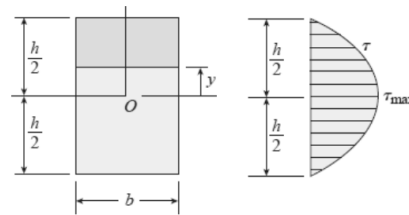
S là mômen tĩnh của diện tích cắt,

b là chiều dài cắt.

*) Ứng suất tiếp trên mcn hình chữ nhật:

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

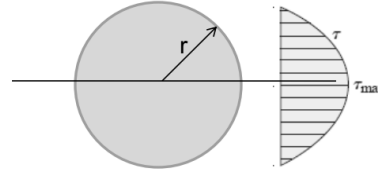
$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2F}$$



*) Ứng suất tiếp trên mcn hình tròn:

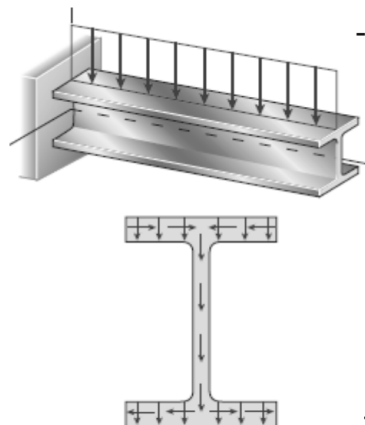
$$\tau = \frac{Q_y}{3J_x} (r^2 - y^2)$$

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3F}$$

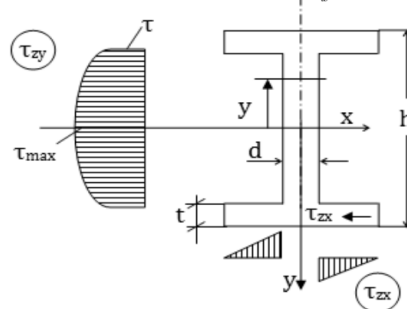


$$*) \text{ Mở rộng cho hình vành khăn: } \tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3F} \left(\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \right)$$

*) Ứng suất tiếp trên mcn hình chữ I :

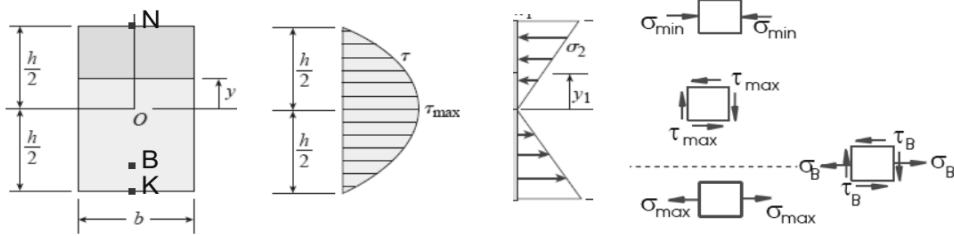


$$\text{- Phần lòng hẹp: } \tau_{zy} = \frac{Q_y (S_x - 0,5d \cdot y^2)}{J_x d}$$



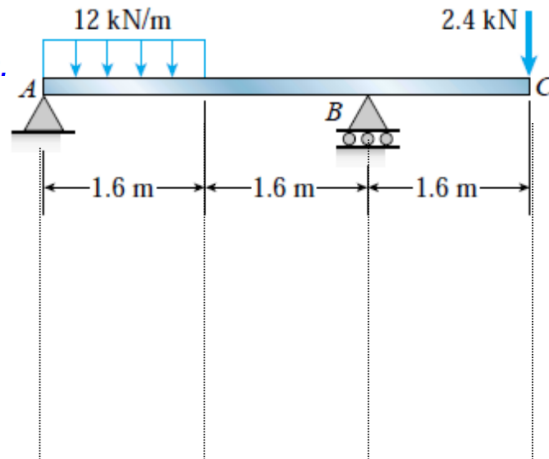
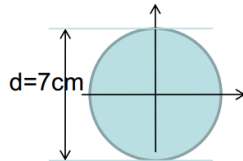
$$\text{- Phần chân đế: } \tau_{zx} = \frac{Q_y (h - t)}{2J_x} x$$

8.2.2. Kiểm tra bền dầm chịu uốn ngang phẳng



- Tại K, N: TTUS đơn: $\sigma_{\min} \leq [\sigma]_n$; $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$;
- Tại O: TTUS trượt thuần túy: $\zeta \leq [\zeta]$
 - USTLN: $[\tau] \leq \frac{[\sigma]}{2}$
 - TNBĐHD: $[\tau] \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$
- Tại B: TTUS phẳng đặc biệt. Áp dụng các thuyết bền:
 - USTLN: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$
 - TNBĐHD: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

Ví dụ 1: Tìm $\sigma_{\max}$, $\zeta_{\max}$?
Biết dầm tròn, $d=7\text{cm}$.



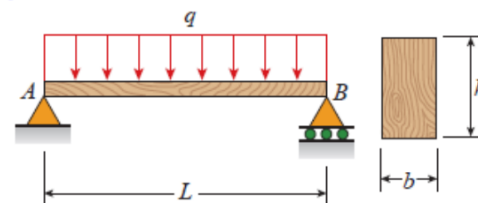
*) Ví dụ 2: Tìm $\sigma_{\max}$, $\zeta_{\max}$ trong dầm:

$q=5,8$ (kN/m)

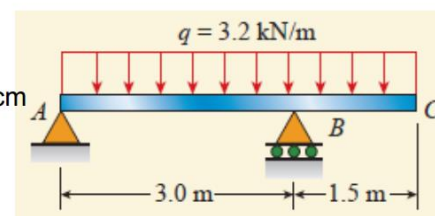
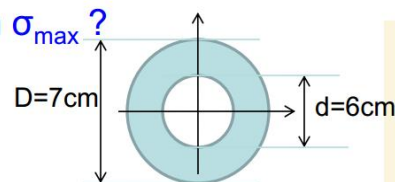
$L=4$ (m)

$b=140$ (mm)

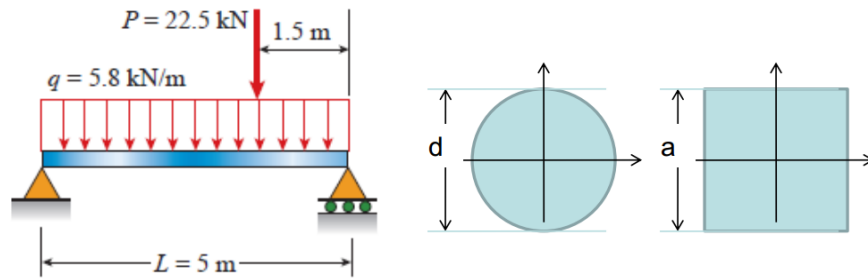
$h=240$ (mm)



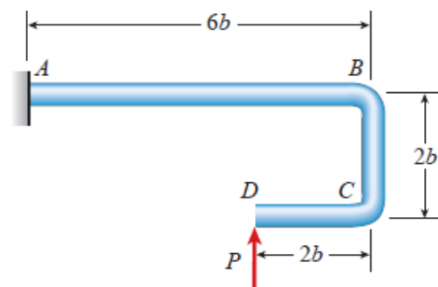
*) Ví dụ 3: Tìm $\sigma_{\max}$?



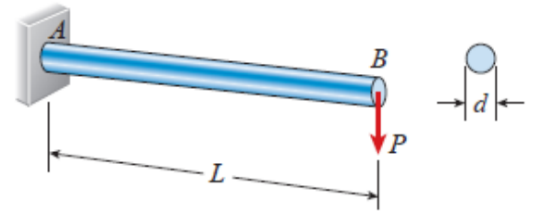
**) Ví dụ 4: Cho $[\sigma]=110 \text{ Mpa}$. Hỏi $d=?$ hoặc $a=?$ để dầm đủ bền.
Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.*



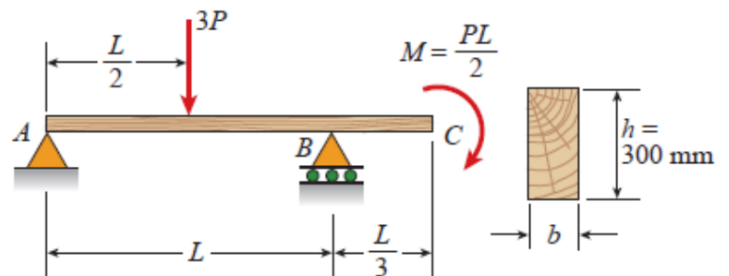
**) Ví dụ 5: Khung ABCD có mcn tròn đường kính d. Chịu lực $P=40\text{N}$. Hỏi $d=?$ để khung đủ bền.
Cho $[\sigma]=30 \text{ Mpa}$. $b= 37 \text{ mm}$
Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.*



*) Ví dụ 6: Dầm AB chiều dài $L=450\text{mm}$. Chịu lực $P=400\text{N}$. Hỏi $d=?$ để dầm đủ bền.
Cho $[\sigma]=60\text{ Mpa}$.
Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.

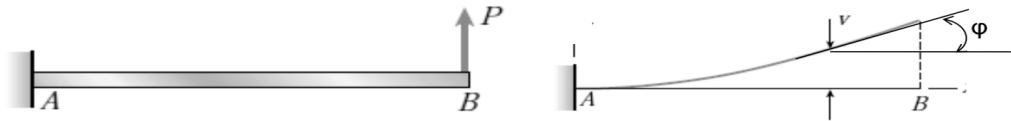


*) Ví dụ 7: Cho $L=3,6(\text{m})$, $P=6(\text{kN})$. Tìm $[b]$?
a) Theo $[\sigma]=8,2\text{ Mpa}$.
b) Theo $[\zeta]=0,7\text{ Mpa}$.



8.3. Chuyển vị của dầm chịu uốn

8.3.1. Khái niệm



- Tải trọng tác dụng lên thanh, khiến thanh bị cong đi, ta nói thanh chịu uốn.
- Đg biểu diễn trục của thanh khi chịu uốn đc gọi là đg đàn hồi.
- K/c từ vị trí ban đầu của mỗi điểm trên trục tới vị trí điểm đó trên đường đàn hồi được gọi là chuyển vị .
- Góc tạo bởi tiếp tuyến của đg đàn hồi với đường nằm ngang được gọi là góc xoay φ . Xét chuyển vị bé ta có: $\varphi = y'$.
- Thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm.

8.3.2. Phương trình vi phân đường đàn hồi

Ta có:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

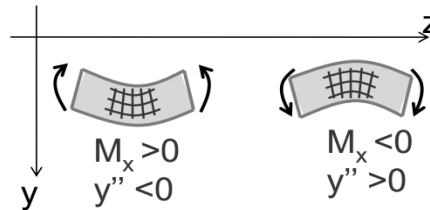
Theo hình học vi phân ta có: $\frac{1}{\rho} = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|$

Bỏ qua VCB bậc cao ta có:

$$|y''| = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Ta thấy y'' luôn ngược dấu so với M_x nên suy ra:

$$y'' = \frac{-M_x}{EJ_x} \text{ là ptvp đg đàn hồi.}$$



8.3.2. Phương trình vi phân đường đàn hồi

- Phương pháp tích phân không định hạn.
- Phương pháp thông số ban đầu.
- Phương pháp hàm gián đoạn.
- Phương pháp vạn năng.
- Phương pháp mômen diện tích.
- Phương pháp dầm giả tạo.
- Phương pháp nhân biểu đồ vê-rê-sa-ghin.
- Phương pháp năng lượng.

***) Phương pháp tích phân không định hạn:**

Từ ptvp đg đàn hồi ta có:

$$y'' = \frac{-M_x}{EJ_x} \Rightarrow y' = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C$$

$$\Rightarrow \varphi = y' = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C$$

$$y = \int \left(-\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D$$

Các hằng số C, D được xác định qua điều kiện biên.

- Ngàm: chuyển vị, góc xoay bằng 0.

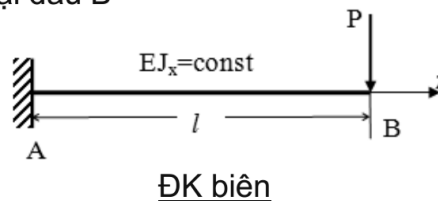
- Gối tựa: chuyển vị bằng không, góc xoay KHÁC 0.

Kết luận: Tìm biểu thức $M_x \rightarrow$ tích tích phân dựa trên đk biên.

Ví dụ 1: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu B

Mômen uốn:

Ptvp đg đàn hồi:



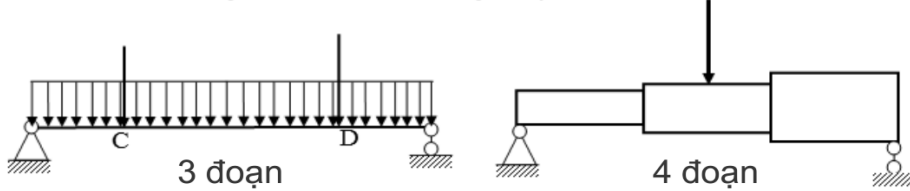
Góc xoay:

Độ võng:

***) Phương pháp thông số ban đầu:**

Nội dung của p² là xây dựng pt đg đàn hồi trên từng ĐOẠN.

Mỗi đoạn có cùng EJ=const, cùng quy luật chịu lực.



-Mỗi đoạn sẽ khác nhau một biểu thức $\Delta y(z)$:

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y(z)$$

Khai triển Taylor của $\Delta y(z)$:

$$\Delta y(z) = \Delta y(a) + \frac{\Delta y'(a)}{1!}(z-a) + \frac{\Delta y''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{\Delta y'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \dots$$

Trong đó:

$\Delta y(a)$, $\Delta y'(a)$ là bước nhảy của độ võng, góc xoay tại $z=a$.

(Dầm thông thường là liên tục nên $\Delta y(a) = \Delta y'(a) = 0$).

$$\Delta y''(a) = \frac{M_n(a)}{E_n J_n} - \frac{M_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \quad \Delta y^{(4)}(a) = \frac{q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}}$$

$$\Delta y'''(a) = \frac{Q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{Q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \quad \Delta y^{(5)}(a) = \frac{q'_n(a)}{E_n J_n} - \frac{q'_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}}$$

Thay vào ta có:

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a(z-a) + \frac{1}{2!} \left[\frac{M_n(a)}{E_n J_n} - \frac{M_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \right] (z-a)^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{Q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{Q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \right] (z-a)^3 + \frac{1}{4!} \left[\frac{q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \right] (z-a)^4 + \dots$$

Với:

$$y_1(z) = y_0 + y'_0 z + \frac{1}{2!} \left[-\frac{M_0}{E_1 J_1} \right] z^2 + \frac{1}{3!} \left[-\frac{Q_0}{E_1 J_1} \right] z^3 + \frac{1}{4!} \left[-\frac{q_0}{E_1 J_1} \right] z^4 + \frac{1}{5!} \left[-\frac{q'_0}{E_1 J_1} \right] z^5 + \dots$$

Trong đó: $y_0, y'_0, M_0, Q_0, q_0, q'_0$ được gọi là thông số ban đầu.

Đặc biệt với dầm có EJ không đổi:

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a(z-a) - \frac{\Delta M_{n+1}}{EJ.2!}(z-a)^2 - \frac{\Delta Q_{n+1}}{EJ.3!}(z-a)^3 - \frac{\Delta q_{n+1}}{EJ.4!}(z-a)^4 + \dots$$

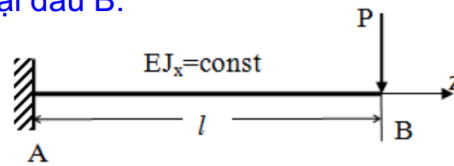
Trong đó: $\Delta M, \Delta Q, \Delta q, \Delta q'$ là bước nhảy tại mcđ đang xét.

Chú ý: lực hướng lên là dương, mômen clockwise là dương.

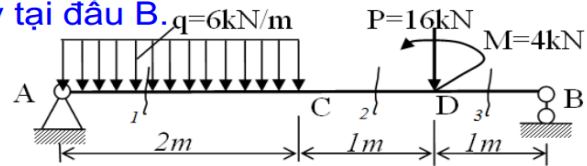
Kết luận: Chia đoạn $\rightarrow$ xác định thông số tại đầu mỗi đoạn.

$\rightarrow$ áp dụng công thức.

Ví dụ 2: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu B.



Ví dụ 3: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu B.



Thông số ban đầu các đoạn:

Đoạn 1 (z=0)	Đoạn 2 (z=2)	Đoạn 3 (z=3)

$$y_1(z) =$$

$$y_2(z) =$$

$$y_3(z) =$$

$$\Rightarrow y_3(z) =$$

***) Phương pháp hàm gián đoạn:**

Mục tiêu của pp là xây dựng biểu thức mômen uốn M_x cho toàn dầm. Dựa trên hàm gián đoạn:

$$\langle z - a \rangle^n = \begin{cases} (z - a)^n & \text{ khi } z > a \\ 0 & \text{ khi } z \leq a \end{cases}$$

Từ đây ta có thể:

→ Xây dựng một hàm duy nhất cho toàn dầm.

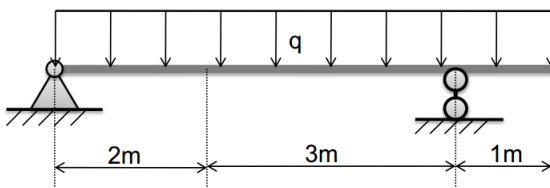
→ Dễ dàng tìm đc biểu thức mômen uốn M_x từ việc tích tích phân từ biểu thức $q(z)$. (Hạn chế của pp tích phân ko định hạn)

→ Chỉ cần tính tích phân hai lần để tìm độ võng.

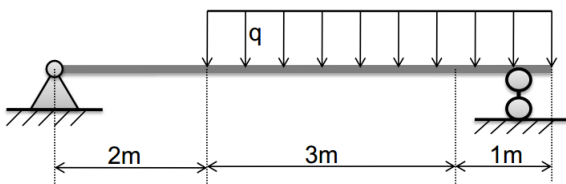
Nhược điểm: chỉ áp dụng cho dầm với EJ không đổi.

Chú ý: lực hướng lên mang dấu dương, mômen clockwise mang dấu dương. Ngược lại mang dấu âm.

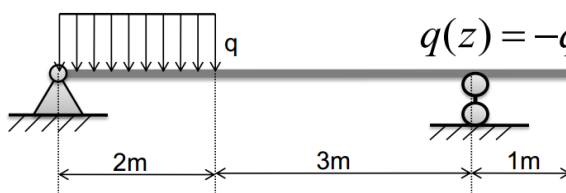
→ Xây dựng một hàm duy nhất cho toàn dầm:



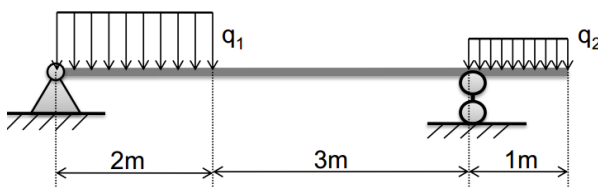
$$q(z) = -q$$



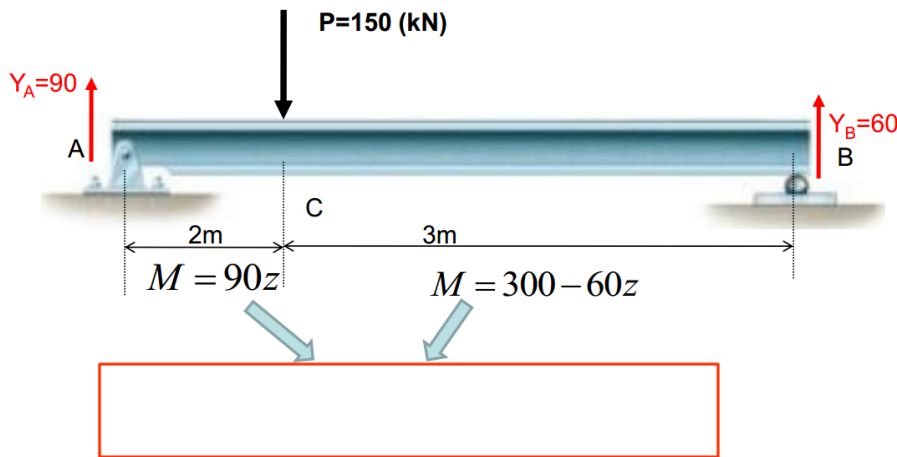
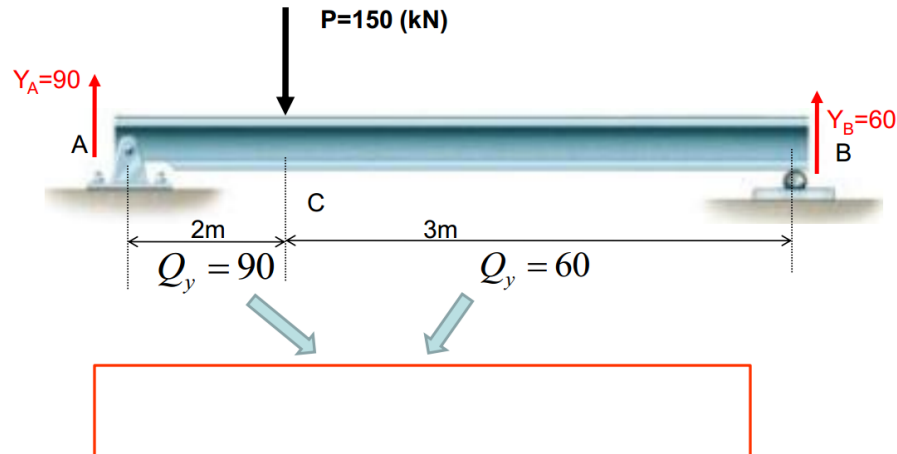
$$q(z) = -q \langle z - 2 \rangle^0$$



$$q(z) = -q \langle z - 0 \rangle^0 + q \langle z - 2 \rangle^0$$



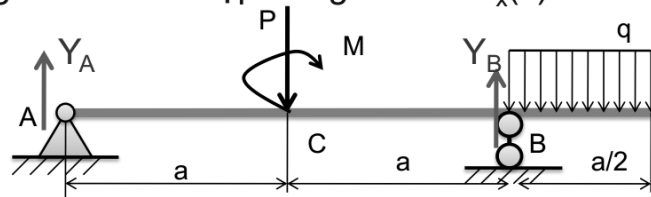
$$q(z) = -q_1 \langle z - 0 \rangle^0 + q_1 \langle z - 2 \rangle^0 - q_2 \langle z - 5 \rangle^0$$



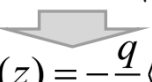
→ Tìm biểu thức $M_x(z)$:

- Tìm biểu thức $q(z)$ trên toàn dầm.
- Tích phân $q(z)$ cộng với lực tập trung cho ra $Q_y(z)$.
- Tích phân $Q_y(z)$ cộng với mômen tập trung cho ra $M_x(z)$.

$$q(z) = -q \langle z - 2a \rangle^0$$

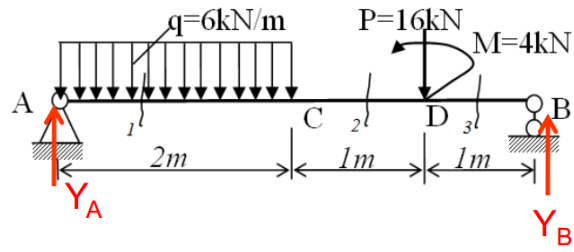


$$Q_y(z) = -q \langle z - 2a \rangle^1 + Y_A \langle z - 0 \rangle^0 - P \langle z - a \rangle^0 + Y_B \langle z - 2a \rangle^0$$



$$M_x(z) = -\frac{q}{2} \langle z - 2a \rangle^2 + Y_A \langle z - 0 \rangle^1 - P \langle z - a \rangle^1 + Y_B \langle z - 2a \rangle^1 + M \langle z - a \rangle^0$$

Ví dụ 4: Tìm $y(z), \phi(z)$?



***) Phương pháp dầm giả tạo:**

Dựa trên mqh giữa độ võng, góc xoay và mômen uốn:

$$\frac{d\varphi}{dz} = y'' = \frac{-M_x}{EJ_x} \quad ; \quad \frac{dy}{dz} = \varphi$$

và mqh giữa nội lực và lực phân bố:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q \quad ; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

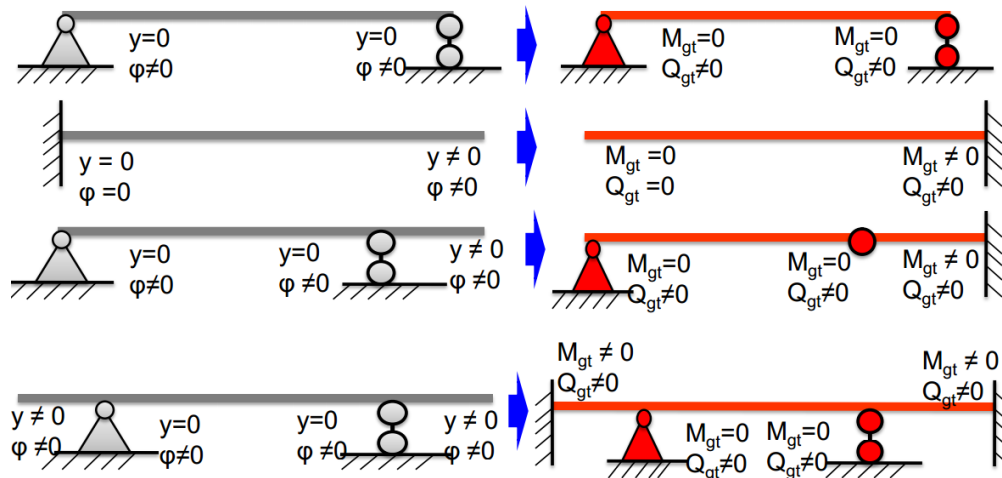
Từ đây người ta đưa ra ý tưởng, nếu tạo ngoại lực giả tạo:

$$q_{gt} = \frac{-M_x}{EJ_x} \Rightarrow \varphi = Q_{gt} \quad ; \quad y = M_{gt}$$

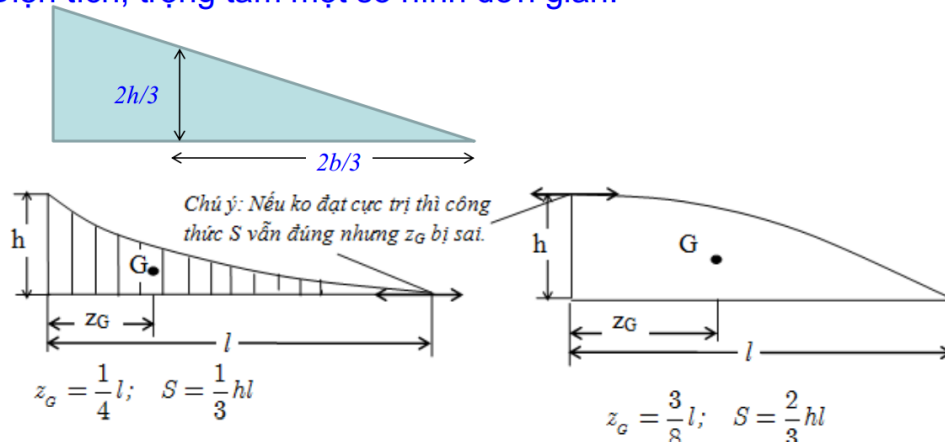
Liên kết của dầm giả tạo → được xử thông qua điều kiện biên.

Như vậy ta có thể áp dụng phương pháp mặt cắt quen thuộc để tìm độ võng, góc xoay của dầm.

Một số liên kết trong dầm giả tạo suy ra từ ĐK biên (dầm thực)



Diện tích, trọng tâm một số hình đơn giản:

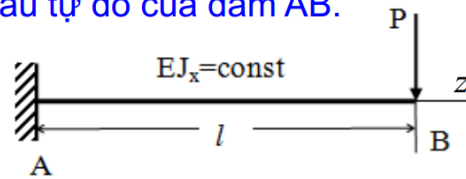


Ví dụ 5: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu tự do của dầm AB.

Muốn tìm độ võng góc xoay tại đầu

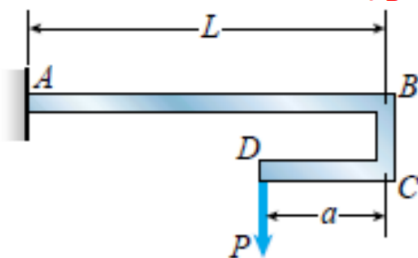
ta cắt mặt cắt tại đó rồi tìm nội lực

Q_{gt} , M_{gt} .



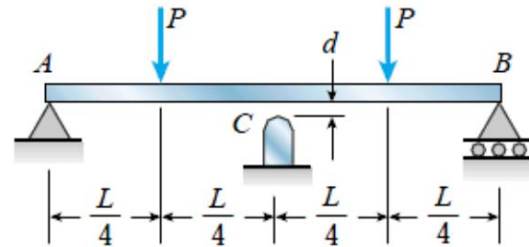
8.3.3. Ví dụ bài tập chuyển vị dầm chịu uốn

*) Ví dụ 1 : $a/L=?$ Để $y_B=0$

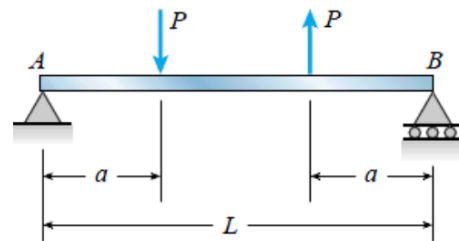
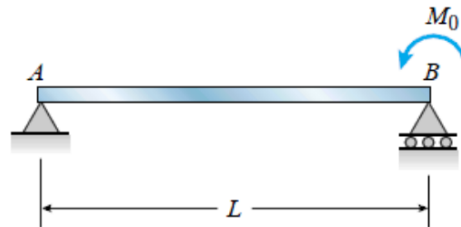


*) Ví dụ 2:

Assuming that $d = 10^{-3}$ m, $L = 6$ m, $E = 200$ GPa, and $I = 198 \times 10^6$ mm⁴, calculate the magnitude of the loads P so that the beam just touches the support at C .

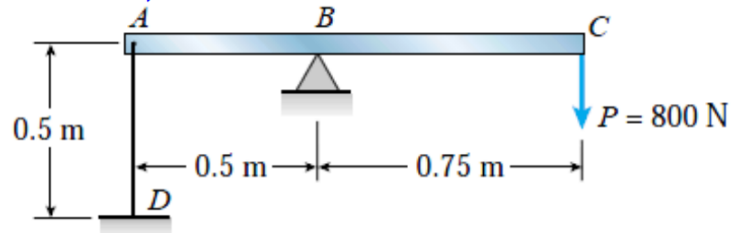


*) Ví dụ 3 : Tìm chuyển vị tại giữa dầm.

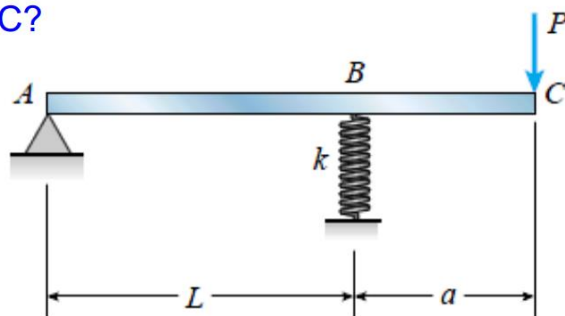


*) Ví dụ 4: tìm chuyển vị tại C?

Biết thanh AD có $EF=900\text{kN}$, dầm AC có $EJ=75\text{kNm}^2$.



*) Ví dụ 5: tìm chuyển vị tại C?



*) Ví dụ 6: tìm chuyển vị tại D? góc xoay tại B

