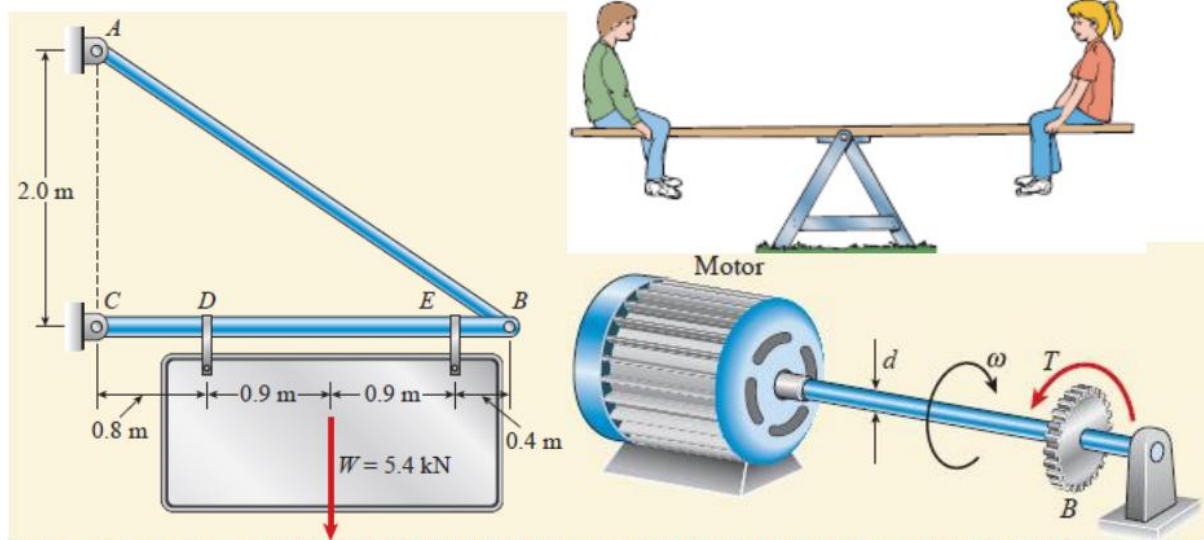
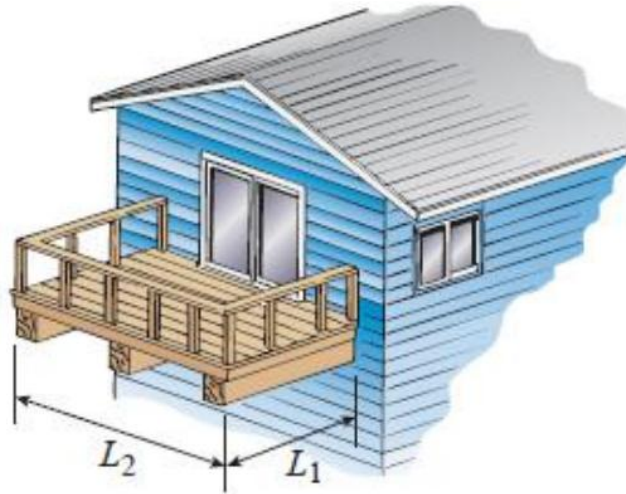


BÀI GIẢNG SỨC BỀN VẬT LIỆU



CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU



0.1. Nhiệm vụ của môn học

Sức bền vật liệu là khoa học tính toán kỹ thuật độ bền, độ cứng, độ ổn định của các chi tiết máy, các kết cấu, công trình.

- **Độ bền**: là khả năng của kết cấu chịu được một tải trọng nhất định mà không bị phá hỏng trong một thời gian được gọi là tuổi thọ của kết cấu.
- **Độ cứng**: là khả năng của kết cấu chống lại tác động của lực tác dụng về mặt biến dạng. Đủ độ cứng tức là biến dạng của kết cấu nằm trong giới hạn cho phép.
- **Độ ổn định**: là khả năng của kết cấu bảo toàn được trạng thái cân bằng ban đầu khi chịu tác dụng của lực.

Nhiệm vụ của môn học nhằm đưa ra tính toán tối ưu đảm bảo kết cấu chịu lực đủ bền, đủ cứng, ổn định với chi phí thấp nhất.

0.2. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của môn học là các kết cấu làm từ vật liệu thực như: sắt, thép, gang, gỗ, bê tông cốt thép, ... gọi là các **vật rắn thực**.

Trong quá trình chịu lực, vật rắn thực bị biến dạng và môn SBVL có xét đến **biến dạng** này.

Chú ý: Trong cơ học lý thuyết đối tượng nghiên cứu là vật rắn tuyệt đối, không xét tới biến dạng, mà chỉ quan tâm chuyển động, cân bằng.

0.3. Phương pháp nghiên cứu

- Lý thuyết kết hợp với thực nghiệm.

- Mô hình hóa: thành các chi tiết khối, tấm, thanh.

Giới hạn môn học ta sẽ q tâm chủ yếu tới chi tiết dạng thanh.

Định nghĩa về thanh:

Cho hình phẳng F có tâm O và một đường (d) có độ dài lớn hơn nhiều kích thước hình F .

Để hình F dịch chuyển dao cho tâm O luôn trượt trên (d) và mặt phẳng (F) luôn vuông góc với tiếp tuyến của (d) tại O .

Hình phẳng F quét lên được gọi là thanh.

(d) được gọi là trục của thanh.

Hình phẳng F được gọi là tiết diện (mặt cắt ngang) của thanh.

Thanh thường chỉ đc biểu diễn bằng đường trục.

0.4. Các giả thuyết về vật liệu

- Vật liệu có tính liên tục, đồng nhất và đẳng hướng.
Cho phép ta xét trên một phân tử để suy rộng cho cả vật thể.
- Vật liệu có tính đàn hồi tuyệt đối.
Tức là sau khi ngừng lực tác dụng, vật thể trở về nguyên trạng thái ban đầu.
- Biến dạng của vật thể được coi là bé so kích thước nó.
Tức là ta coi điểm đặt lực trước sau biến dạng ko đổi.

“Nguyên lý độc lập tác dụng”

Một vật thể chịu tác dụng của nhiều lực thì các đại lượng (ứng suất, biến dạng,...) bằng tổng các đại lượng do từng lực tác dụng gây ra.

0.5. Khái niệm chuyển vị và biến dạng

Xét vật thể (T) chịu lực:

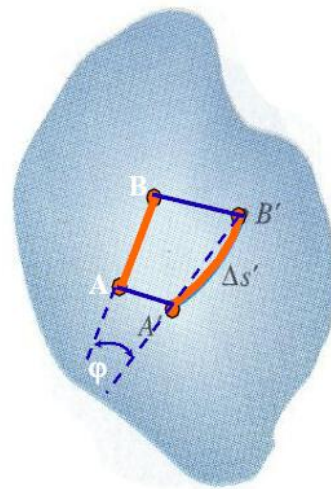
Xét điểm A thuộc (T). Sau khi vật thể chịu lực, $A \rightarrow A'$, độ dài AA' được gọi là **chuyển vị dài**.

-Xét đoạn thẳng AB thuộc (T). Sau khi vật thể chịu lực, $AB \rightarrow A'B'$, góc tạo bởi $(AB, A'B')$ được gọi là **chuyển vị góc**.

- Độ thay đổi $A'B' - AB$ được gọi là **biến dạng dài**.

$\varepsilon_{AB} = \frac{A'B' - AB}{AB}$ được gọi là **biến dạng dài tỷ đối** theo phương AB.

-Xét thêm điểm C sao cho góc ABC vuông tại A, sao biến dạng hiệu hai góc $A'B'C' - ABC$ được gọi là **biến dạng góc** γ .



Chương 1

LÝ THUYẾT NGOẠI LỰC & NỘI LỰC

1.1. Khái niệm về ngoại lực

- Lực là đại lượng véc tơ có phương, chiều, độ lớn và điểm đặt.
- Nếu một trong 4 đại lượng số trên thay đổi theo thời gian ta có lực động, trái lại ta có lực tĩnh.
- Các lực do môi trường bên ngoài (*tải trọng*) hay do vật thể khác tác động lên vật thể đang xét (*lực liên kết*) được gọi là *ngoại lực*.

Phân loại:

- Lực tập trung (P) là lực tác dụng lên vật thể tại một điểm. Đơn vị là (N)
- Lực phân bố (q) là lực tác dụng lên vật thể trên một diện tích đủ lớn. Đơn vị là (N/m²). Trong bài toán phẳng ta xét lực phân bố theo chiều dài, đơn vị N/m.
- Mô men tập trung (M) là mômen tác dụng lên vật thể tại một điểm. Đơn vị là (Nm)

TABLE A-3 SI PREFIXES

Prefix	Symbol	Multiplication factor
tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$
giga	G	$10^9 = 1\,000\,000\,000$
mega	M	$10^6 = 1\,000\,000$
kilo	k	$10^3 = 1\,000$
hecto	h	$10^2 = 100$
deka	da	$10^1 = 10$
deci	d	$10^{-1} = 0.1$
centi	c	$10^{-2} = 0.01$
milli	m	$10^{-3} = 0.001$
micro	μ	$10^{-6} = 0.000\,001$
nano	n	$10^{-9} = 0.000\,000\,001$
pico	p	$10^{-12} = 0.000\,000\,000\,001$

Note: The use of the prefixes hecto, deka, deci, and centi is not recommended in SI.

SI and Metric Units	
1 gal = 1 centimeter per second squared (cm/s^2) for example, $g \approx 981$ gals)	1 centimeter (cm) = 10^{-2} meters (m)
1 are (a) = 100 square meters (m^2)	1 cubic centimeter (cm^3) = 1 milliliter (mL)
1 hectare (ha) = 10,000 square meters (m^2)	1 micron = 1 micrometer (μm) = 10^{-6} meters (m)
1 erg = 10^{-7} joules (J)	1 gram (g) = 10^{-3} kilograms (kg)
1 kilowatt-hour (kWh) = 3.6 megajoules (MJ)	1 metric ton (t) = 1 megagram (Mg) = 1000 kilograms (kg)
1 dyne = 10^{-5} newtons (N)	1 watt (W) = 10^7 ergs per second (erg/s)
1 kilogram-force (kgf) = 1 kilopond (kp) = 9.80665 newtons (N)	1 dyne per square centimeter (dyne/cm^2) = 10^{-1} pascals (Pa)
	1 bar = 10^5 pascals (Pa)
	1 stere = 1 cubic meter (m^3)

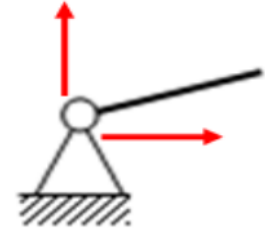
Notes: 1 joule (J) = 1 newton meter ($\text{N}\cdot\text{m}$) = 1 watt second ($\text{W}\cdot\text{s}$)
 1 hertz (Hz) = 1 cycle per second (cps) or 1 revolution per second (rev/s)
 1 watt (W) = 1 joule per second (J/s) = 1 newton meter per second ($\text{N}\cdot\text{m/s}$)
 1 pascal (Pa) = 1 newton per meter squared (N/m^2)
 1 liter (L) = 0.001 cubic meter (m^3) = 1000 cubic centimeters (cm^3)

1.2. Các loại liên kết

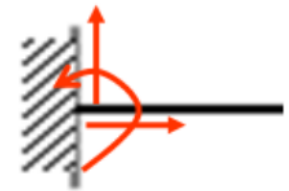
*) Gối tựa di động, liên kết đơn:
hạn chế 1 bậc tự do, do vậy phát sinh 1 phản lực liên kết.



*) Gối tựa cố định, liên kết đôi:
hạn chế 2 bậc tự do, do vậy phát sinh 2 phản lực liên kết.

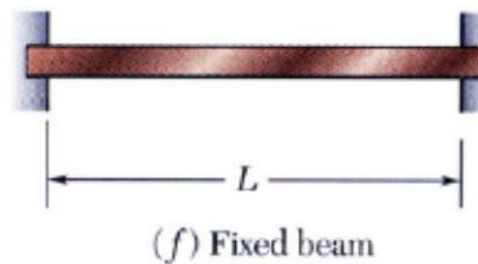
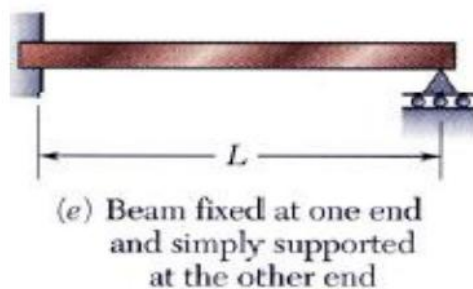
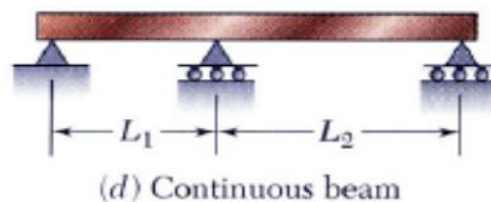


*) Ngàm, mối hàn:
Hạn chế 3 bậc tự do, do vậy phát sinh 3 phản lực liên kết.



Thanh cân bằng cần hạn chế đủ 3 bậc tự do theo phương *hợp lý*. (>3 thanh CB siêu tĩnh)

*) Các trường hợp thanh cân bằng cơ bản:



1.3. Xác định phản lực liên kết

Để xác định phản lực liên kết ta coi thanh là rắn tuyệt đối. Xét cân bằng thanh trong không gian ta có 6 phương trình:

$$\begin{cases} \sum F_X = 0; \sum F_Y = 0; \sum F_Z = 0 \\ \sum M_X = 0; \sum M_Y = 0; \sum M_Z = 0 \end{cases}$$

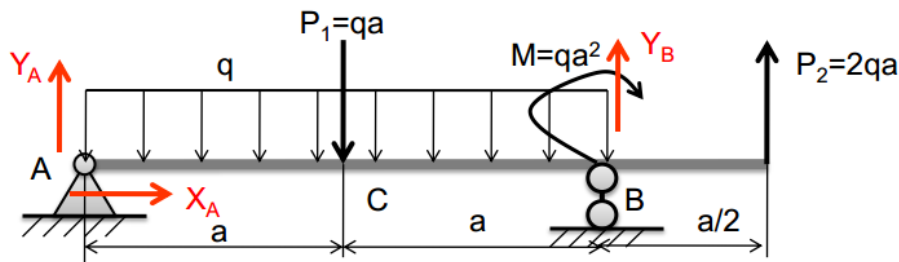
Xét bài toán phẳng trong tọa độ Oxy chỉ còn 3 phương trình:

$$\sum F_X = 0; \sum F_Y = 0; \sum M_Z = 0$$

Tiến hành giải các hệ phương trình cân bằng trên ta tìm được phản lực liên kết.

Với bài toán siêu tĩnh ta cần tìm thêm các phương trình liên hệ chuyển vị để có thể xác định được phản lực liên kết.

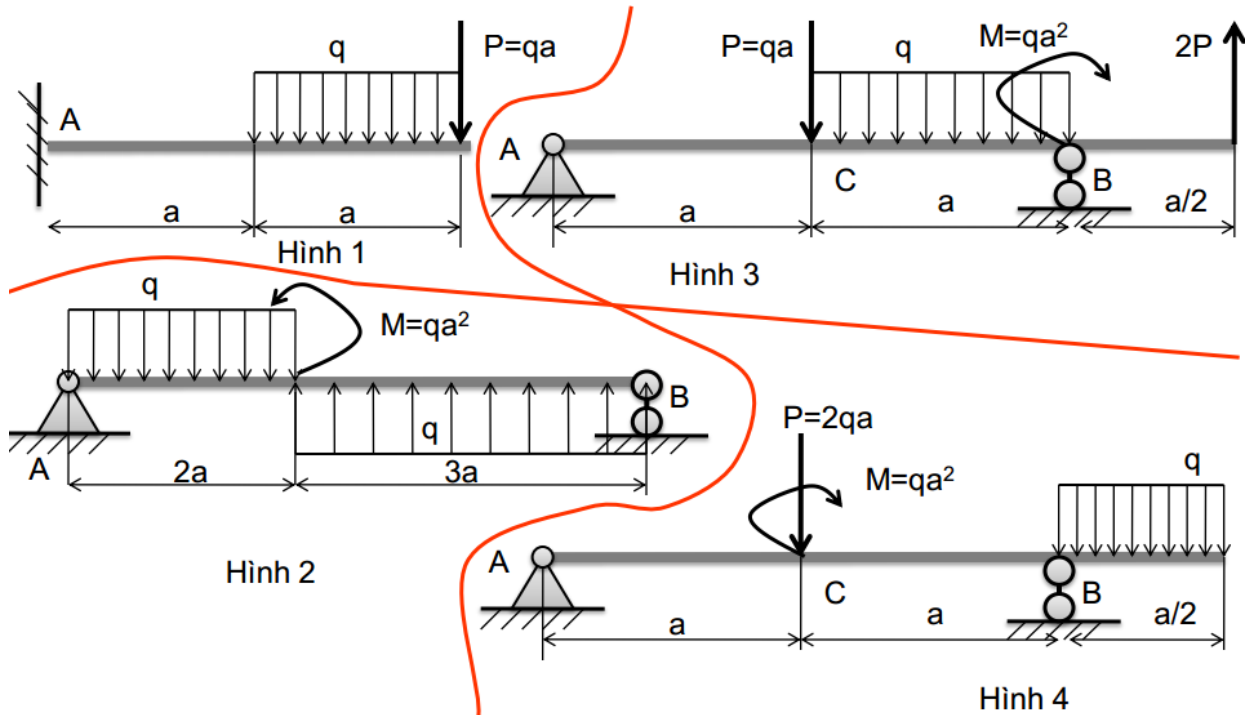
Hãy xác định phản lực liên kết?



Các phương trình cân bằng thanh:

Giải hệ phương trình

Hãy xác định phản lực liên kết các trường hợp sau?



1.4. Khái niệm nội lực, ứng suất.

Xét vật thể chịu tác dụng của của ngoại lực.

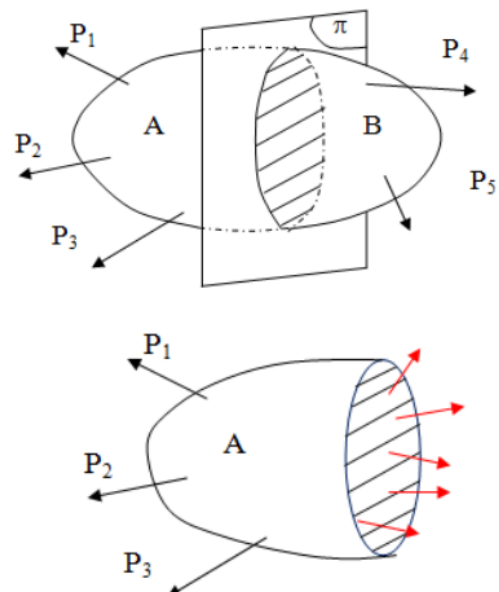
Tưởng tượng cắt vật thể làm 2 phần A và B.

Xét cân bằng cho phần A:

Phần A có thể cân bằng với các ngoại lực là do phần B tác dụng lên phần A một hệ lực được gọi là **hệ nội lực**.

Xét điểm ΔF quanh điểm M trên mặt cắt có nội lực ΔP ta có:

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta F} = \frac{d\vec{P}}{dF} \quad \text{được gọi là } \textbf{ứng suất tại M}$$



Ta dựng một hệ trục tọa độ Oxyz với Oz vuông góc với mặt cắt
Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị tương ứng trên các trục
Ox, Oy, Oz.

Khi đó ứng suất tại M có thể được biểu diễn như sau:

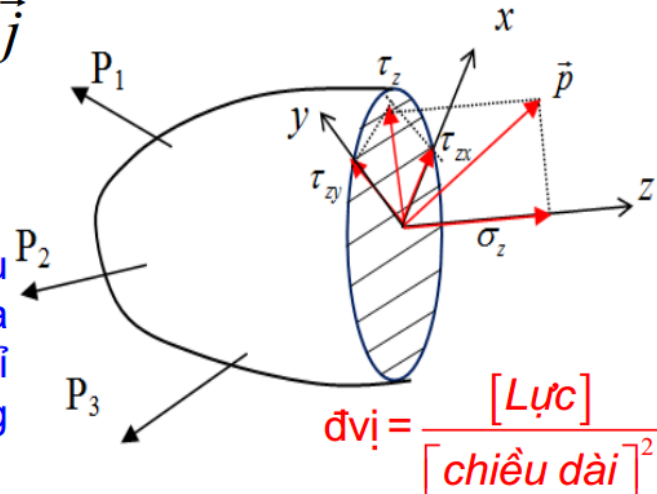
$$\vec{p} = \sigma_z \cdot \vec{k} + \tau_{zx} \cdot \vec{i} + \tau_{zy} \cdot \vec{j}$$

Trong đó ta gọi:

σ_z là ứng suất pháp.

τ_{zx}, τ_{zy} là các ứng suất tiếp.

Ứng suất tiếp có chỉ số đầu
chỉ phương pháp tuyến của
mặt cắt, chỉ số thứ hai chỉ
phương song song của ứng
suất tiếp đó.



1.5. Nội lực trong thanh

Xét một thanh chịu tác dụng bởi ngoại lực. Để xét nội lực trong
thanh ta cắt thanh làm 2 phần A và B. Phần A có thể cân bằng
do hệ nội lực của phần B tác động lên.

Hệ nội lực này thu gọn về tâm mặt cắt được một véc tơ lực
chính R và mômen chính M.

R chiếu lên trục z được lực dọc N_z

R chiếu lên trục x, y được lực cắt Q_x

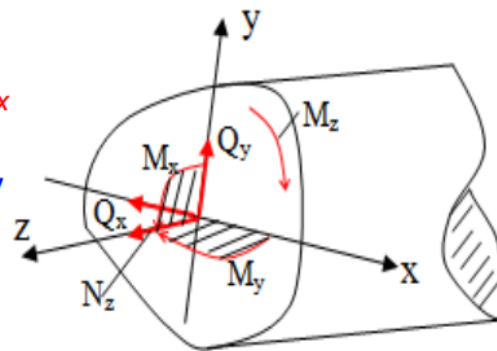
và Q_y

Momen chính chiếu lên các trục x, y

được gọi là mômen uốn M_x, M_y ,

mômen trên trục z được gọi là

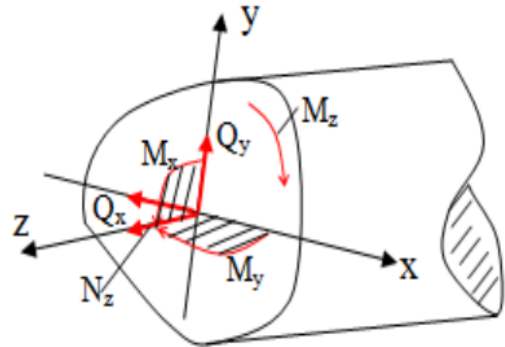
mômen xoắn M_z .



**) Chú ý: Khi một thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm.*

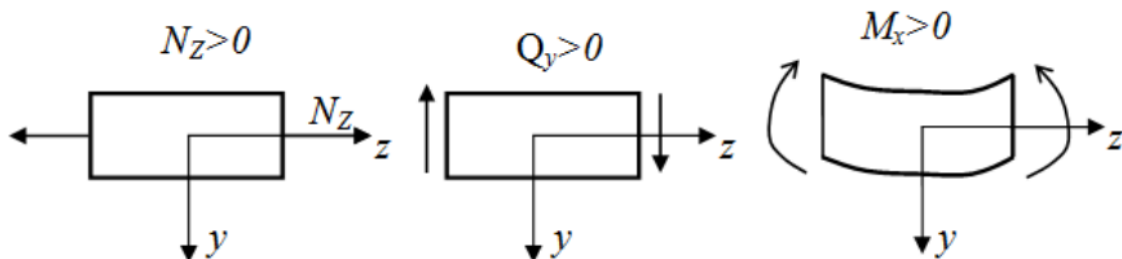
**) Quy ước dấu các thành phần nội lực:*

- Các nội lực N_z , Q_x , Q_y mang dấu dương khi chúng gây ra ứng suất dương. Cụ thể khi pháp tuyến ngoài của mặt cắt cùng chiều dương của trục z thì N_z , Q_x , Q_y mang dấu dương khi chúng cùng chiều dương của trục z , x , y , và ngược lại
- Mômen uốn M_x và M_y mang dấu dương nếu chúng làm thanh căng về phía dương của các trục x , y .
- Mômen xoắn M_z mang dấu dương nhìn vào mặt cắt thấy nó quay theo chiều kim đồng hồ.



**) Quy ước dấu các thành phần nội lực:*

- Trong bài toán phẳng, vd khi tải trọng tác dụng trong một mặt phẳng Oyz thì nội lực chỉ gồm 3 thành phần N_z , Q_y , M_x , với dấu được quy ước như sau:
- N_z dương khi hướng ra ngoài mặt cắt
- Q_y dương khi có chiều quay phân tố đang xét on clockwise.
- M_x dương khi làm căng thớ nằm về phía dương của trục y .



và ngược lại thì mang dấu âm.

1.6. Tương quan giữa nội lực và ứng suất trong thanh

Ta có thể nói rằng, nội lực là lực phân bố bề mặt với cường độ chính là các ứng suất thành phần tương ứng. Đó đó ta có thể tính nội lực như sau:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF; \quad Q_x = \int_F \tau_{zx} dF; \quad Q_y = \int_F \tau_{zy} dF$$

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF; \quad M_y = \int_F \sigma_z x dF; \quad M_z = \int_F (\tau_{zx} y - \tau_{zy} x) dF$$

1.7. Biểu đồ nội lực trong thanh

**) Định nghĩa:* Biểu đồ nội lực là đường biểu diễn sự biến thiên của nội lực theo vị trí của mặt cắt trên thanh.

Biểu diễn:

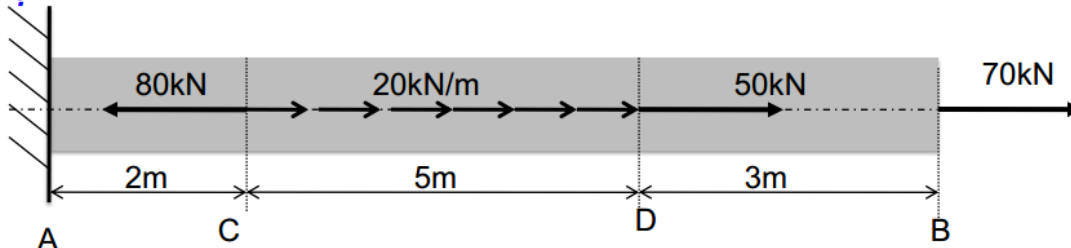
Hoành độ là đường // trục thanh.

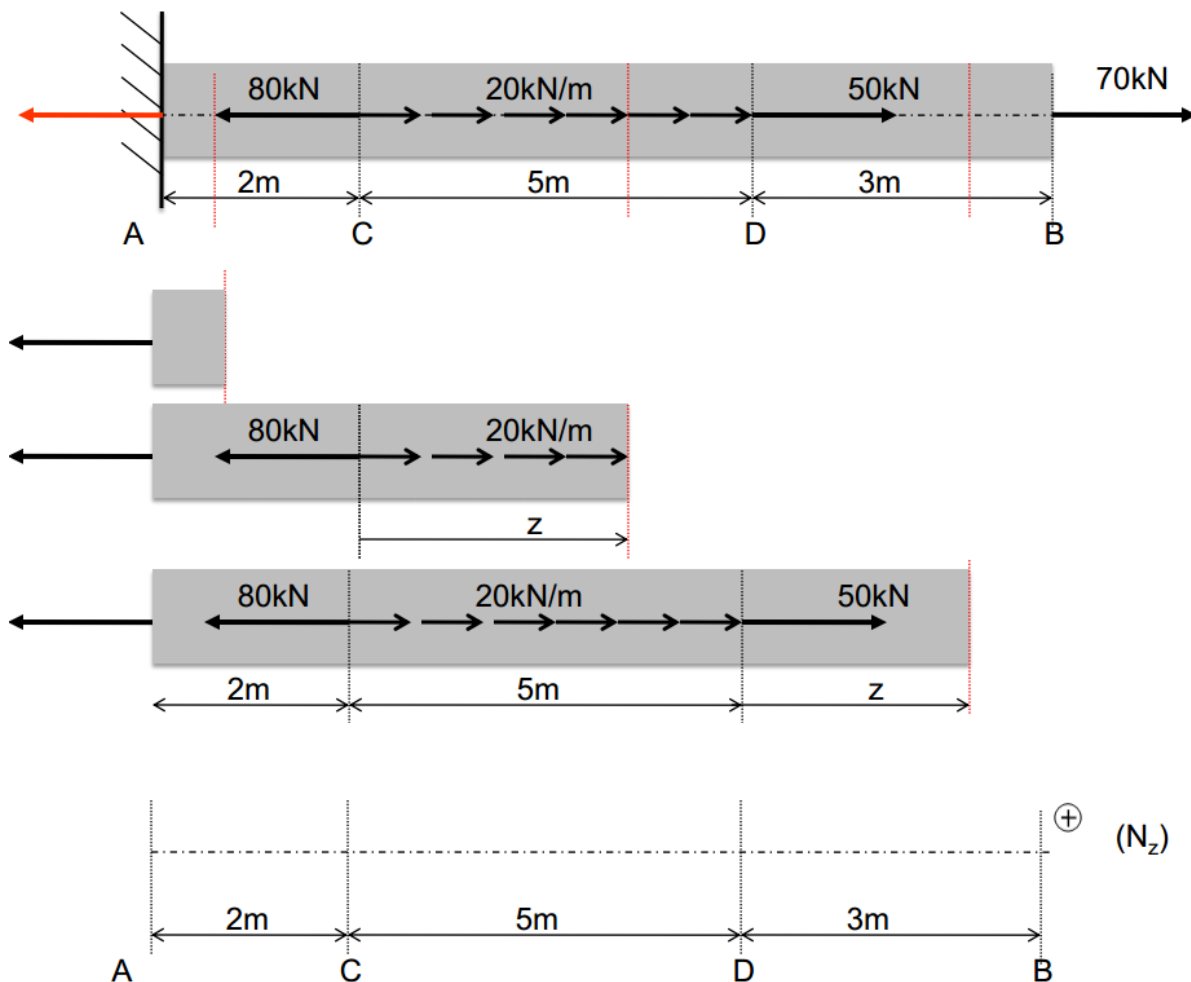
Tung độ là độ lớn của nội lực tại mặt cắt vị trí tương ứng.

Biểu đồ lực dọc (N_z) và lực cắt (Q_y) chiều dương lấy phía trên trục hoành.

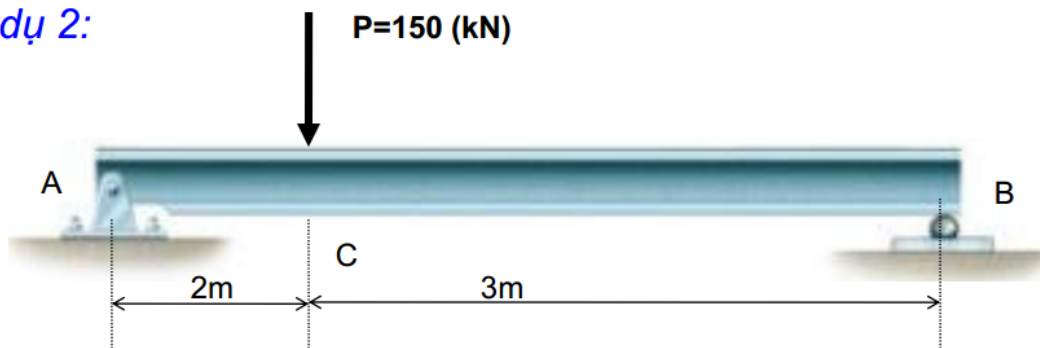
Biểu đồ mômen uốn (M_x) lấy chiều dương phía dưới.

Ví dụ 1:



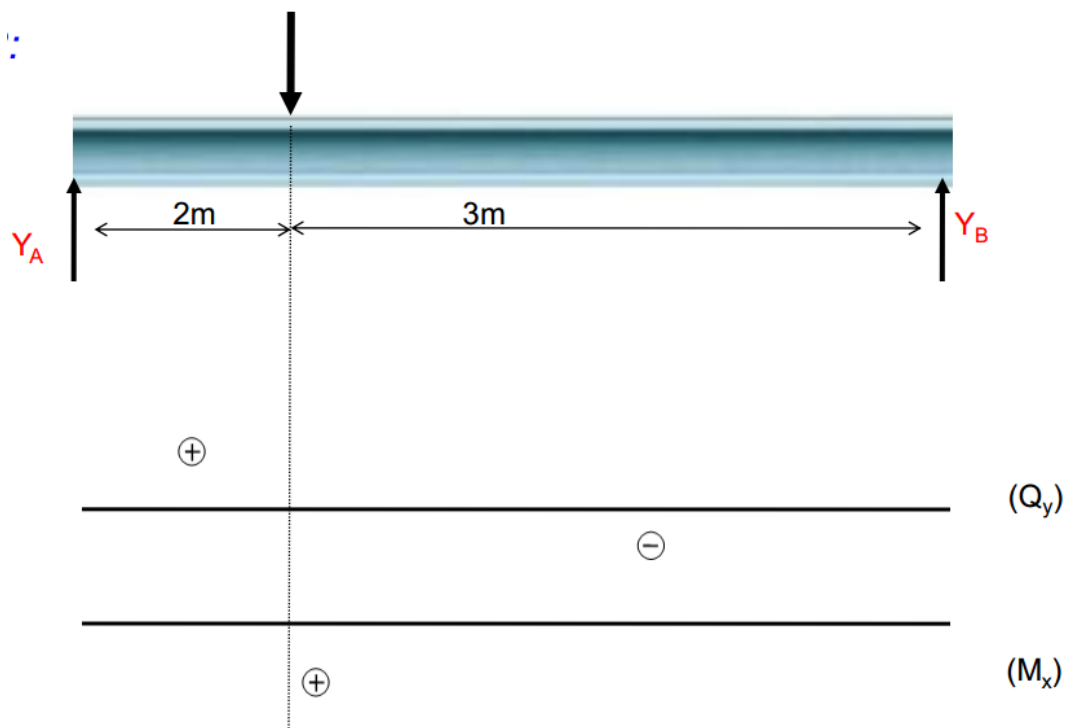
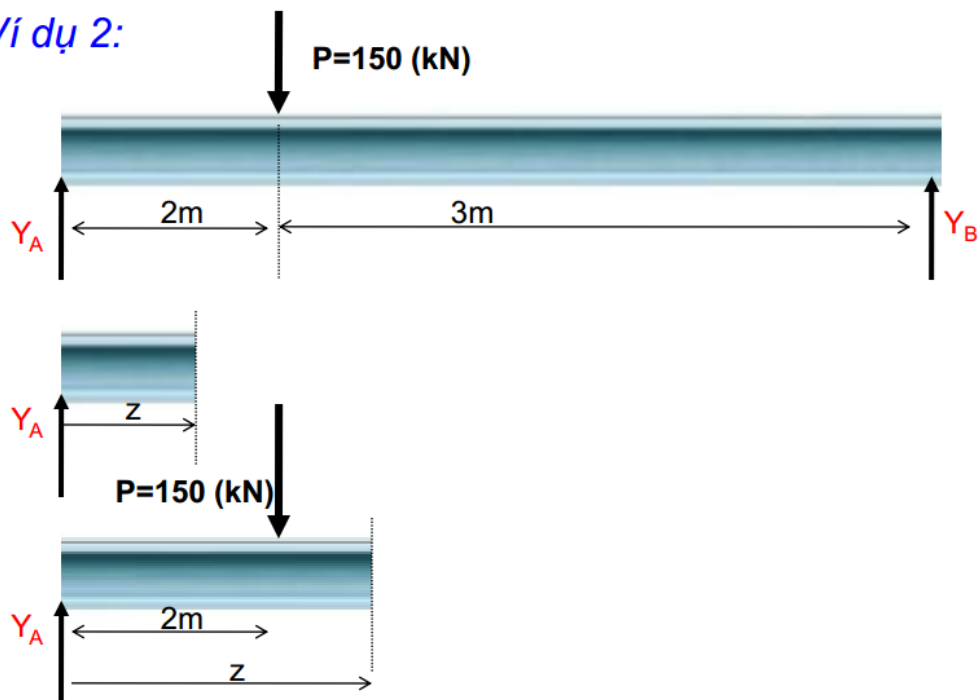


Ví dụ 2:

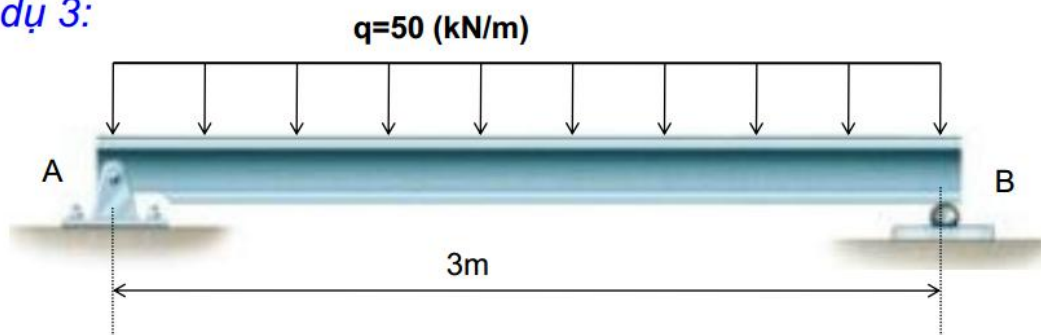


*) Xác định phản lực liên kết:

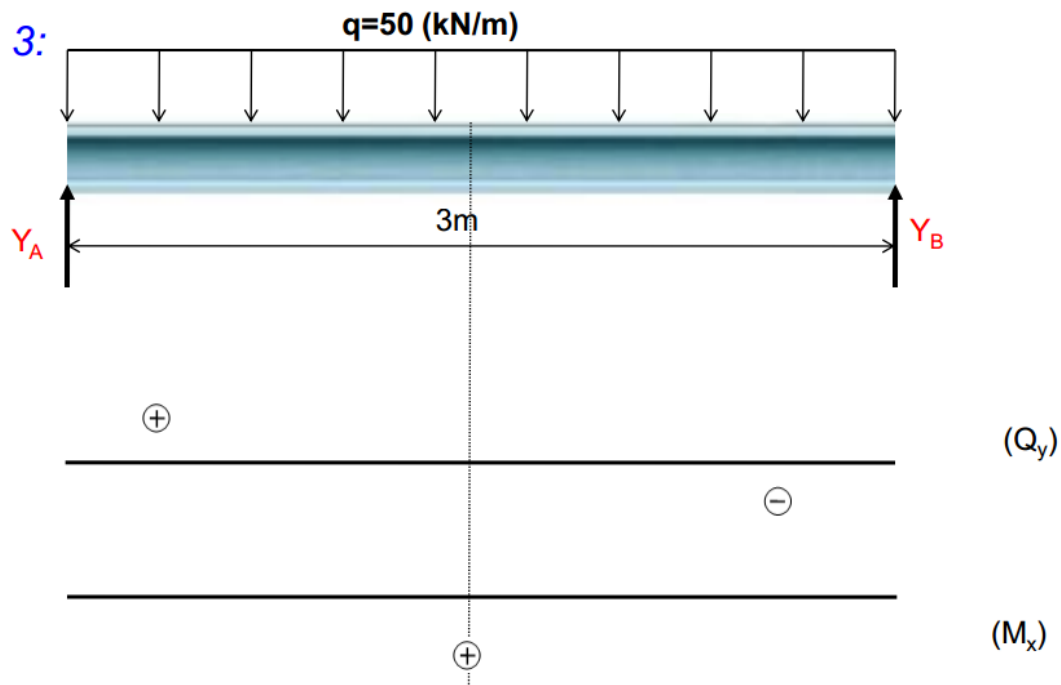
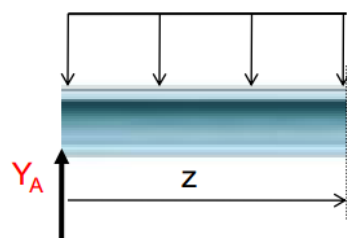
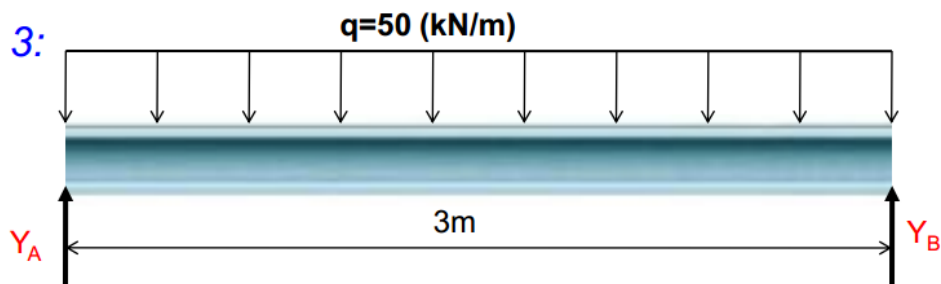
Ví dụ 2:



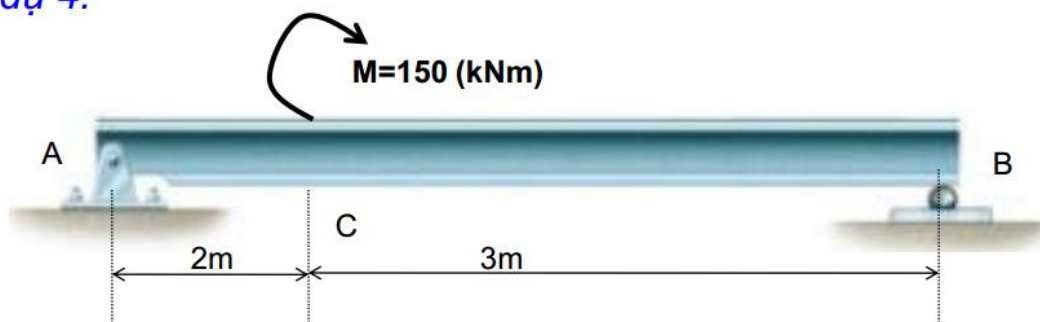
Ví dụ 3:



*) Xác định phản lực liên kết:

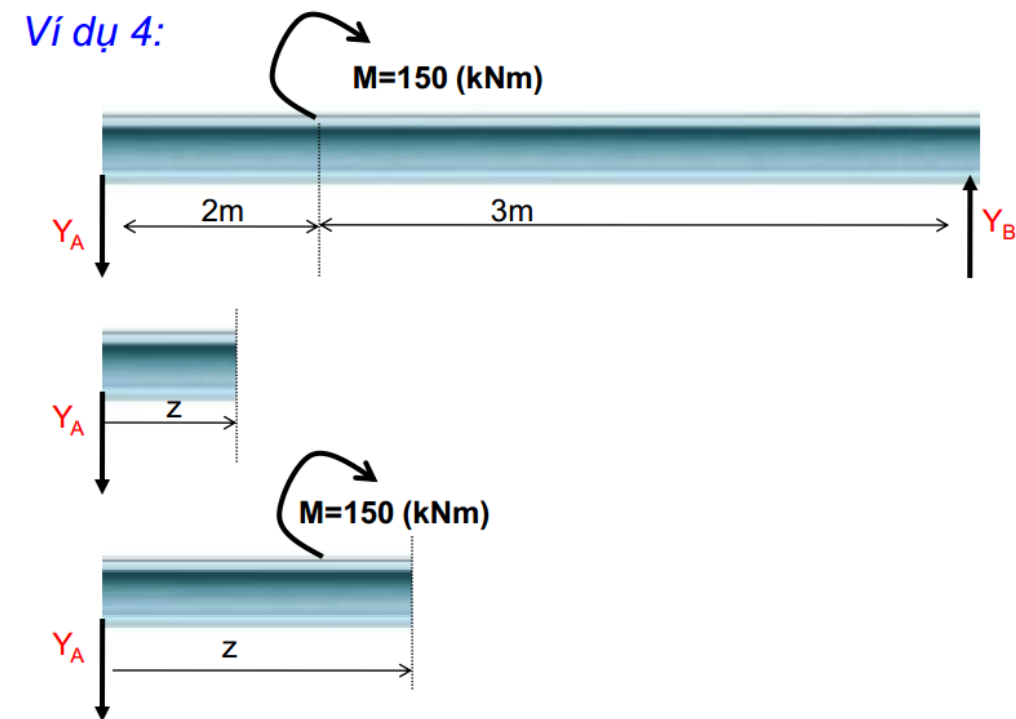


Ví dụ 4:

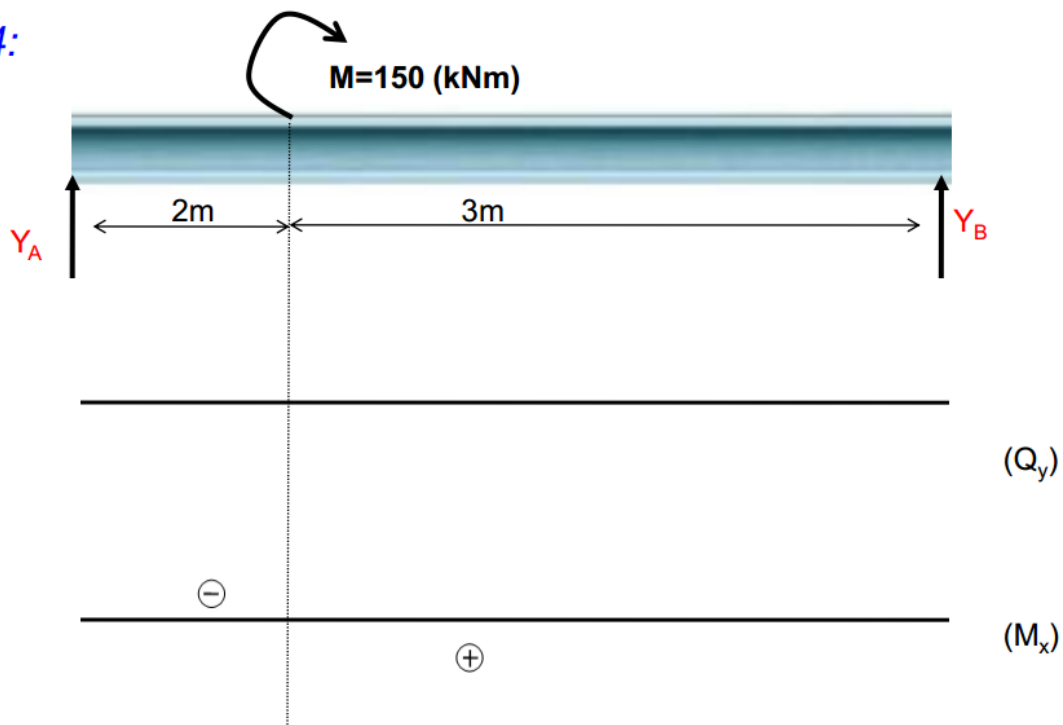


*) Xác định phản lực liên kết:

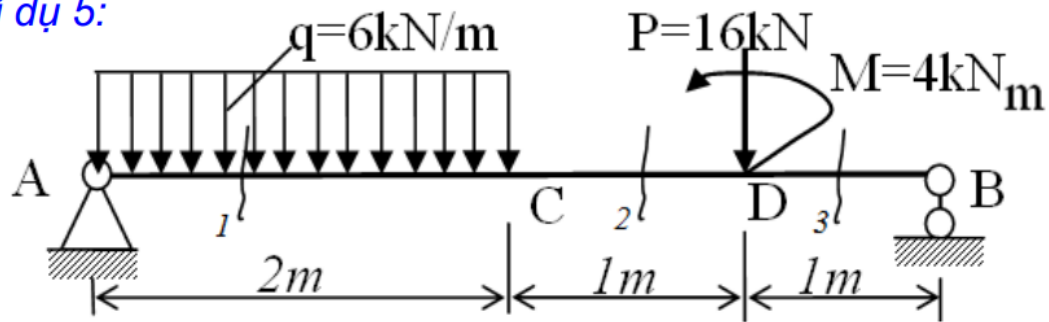
Ví dụ 4:



4:

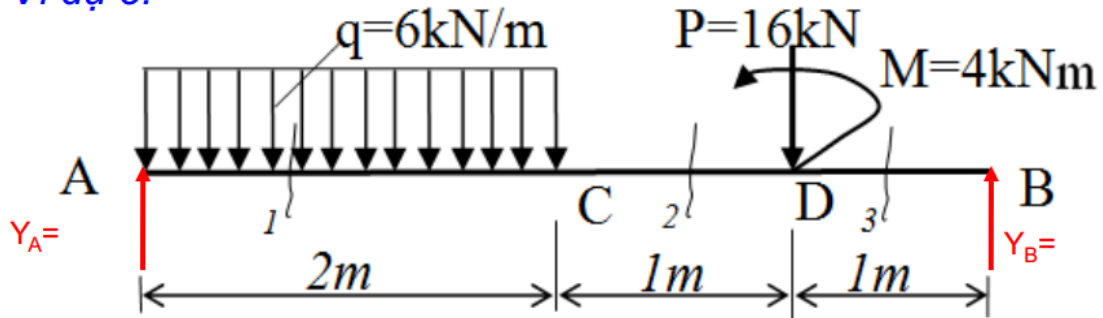


Ví dụ 5:



*) Xác định phản lực liên kết :

Ví dụ 5:



Áp dụng phương pháp mặt cắt:
Chia dầm làm 3 đoạn AC, CD, DB.

AC:

CD:

DB:

1.8. Tương quan giữa nội lực Q_y , M_x và lực phân bố q

-Xét một thanh chịu lực trong mặt phẳng Oyz. Các ngoại lực tác dụng vuông góc với trục Oz (quy ước dấu của ngoại lực hướng lên là mang dấu dương). Tách ra một đoạn phân tố của thanh như hình vẽ.

-Xét CB phân tố ta có:

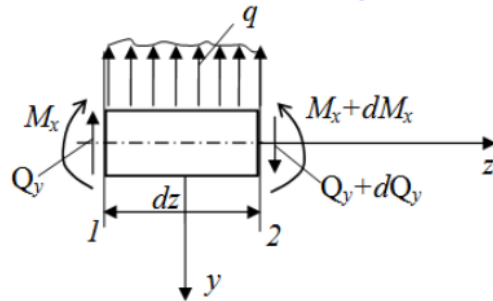
$$\downarrow: (Q_y + dQ_y) - Q_y - qdz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dQ_y}{dz} = q$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y dz + q \frac{(dz)^2}{2} = 0 \quad \text{Bỏ qua VCB bậc cao } q \frac{(dz)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

“Đạo hàm của mômen uốn là bằng trị số của lực cắt, và đạo hàm của lực cắt thì bằng cường độ của lực phân bố.”



1.9. Phương pháp vẽ nhanh biểu đồ nội lực theo nhận xét

“Tiến hành vẽ đi từ trái qua phải”

**) Biểu đồ lực cắt Q_y :*

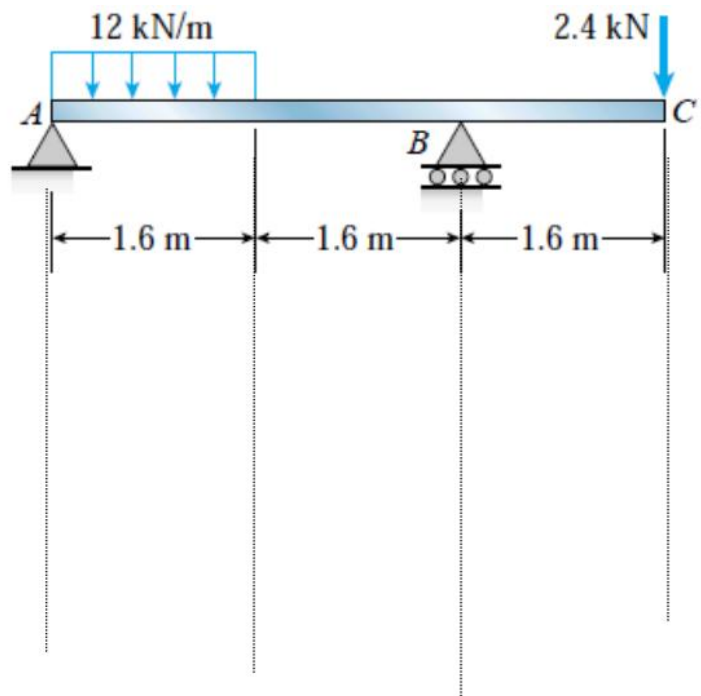
- Tại đâu có lực tập trung, thì ở đó có bước nhảy đúng bằng độ lớn lực tập trung, và chiều nhảy theo chiều của lực tập trung.
- Nếu có lực phân bố bậc n thì biểu đồ Q_y là đường bậc (n+1).
- Tại đâu có lực phân bố đi xuống thì biểu đồ Q_y cũng đi xuống và ngược lại. Lượng đi lên hay đi xuống đúng bằng diện tích của lực phân bố trên đoạn đó (do $Q_y = \int_{\Delta z} q dz$ = diện tích lực phân bố q).

***) Biểu đồ mômen uốn M_x :**

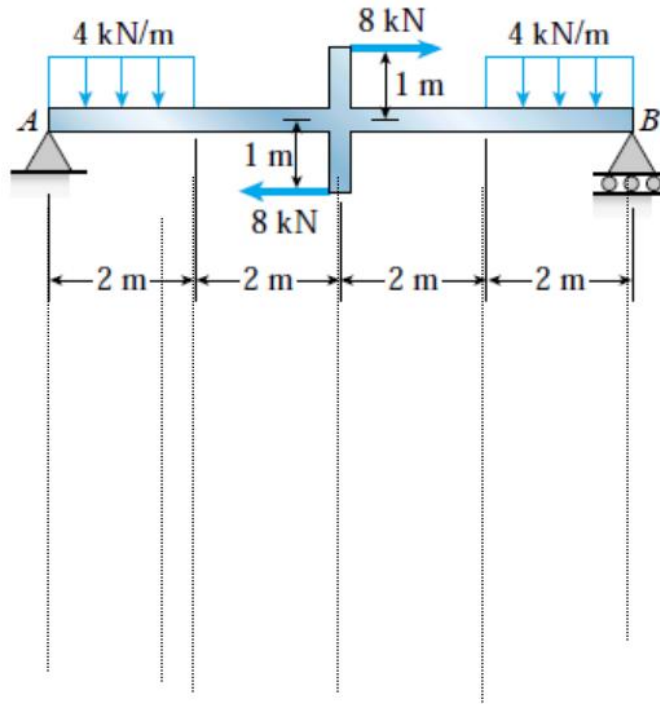
- Tại đâu có mômen trung thì ở đó có bước nhảy đúng bằng độ lớn của mômen tập trung, Mômen tập trung làm căng thép nào thì biểu đồ nhảy về phía đó.
- Nếu có lực phân bố bậc n thì biểu đồ M_x là đường bậc $(n+2)$.
- Nếu M_x có dạng đường cong thì phía lõm của biểu đồ M_x sao cho nó hứng lấy các mũi tên của lực phân bố q .
- Nhìn biểu đồ lực cắt, nếu trên đoạn đang xét lực cắt dương thì biểu đồ M_x đồng biến (đi xuống vì chiều dương của M_x ta chọn phía dưới) và ngược lại nếu lực cắt âm thì biểu đồ đi lên (nghịch biến). Lượng biến thiên đúng bằng diện tích của biểu đồ lực cắt trên toàn đoạn đó (do $M_x = \int Q dz = \text{diện tích biểu đồ } Q_y$).

Ví dụ 6:

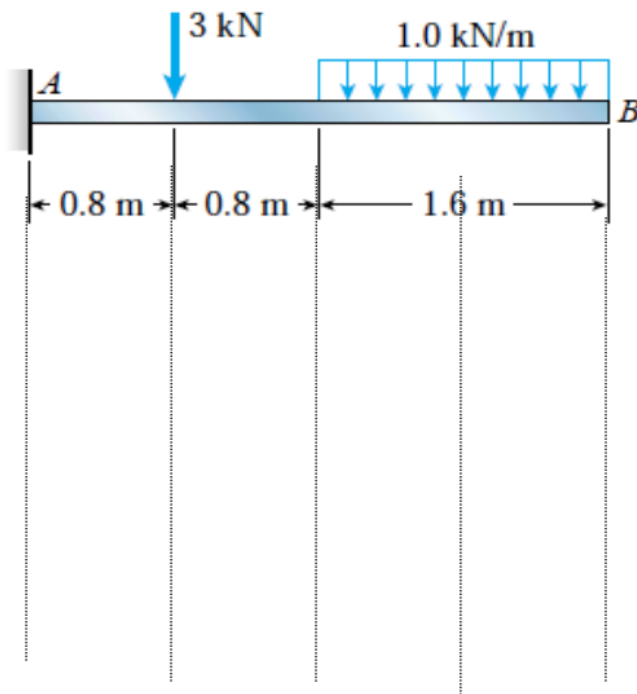
*) Xác định phản lực liên kết :



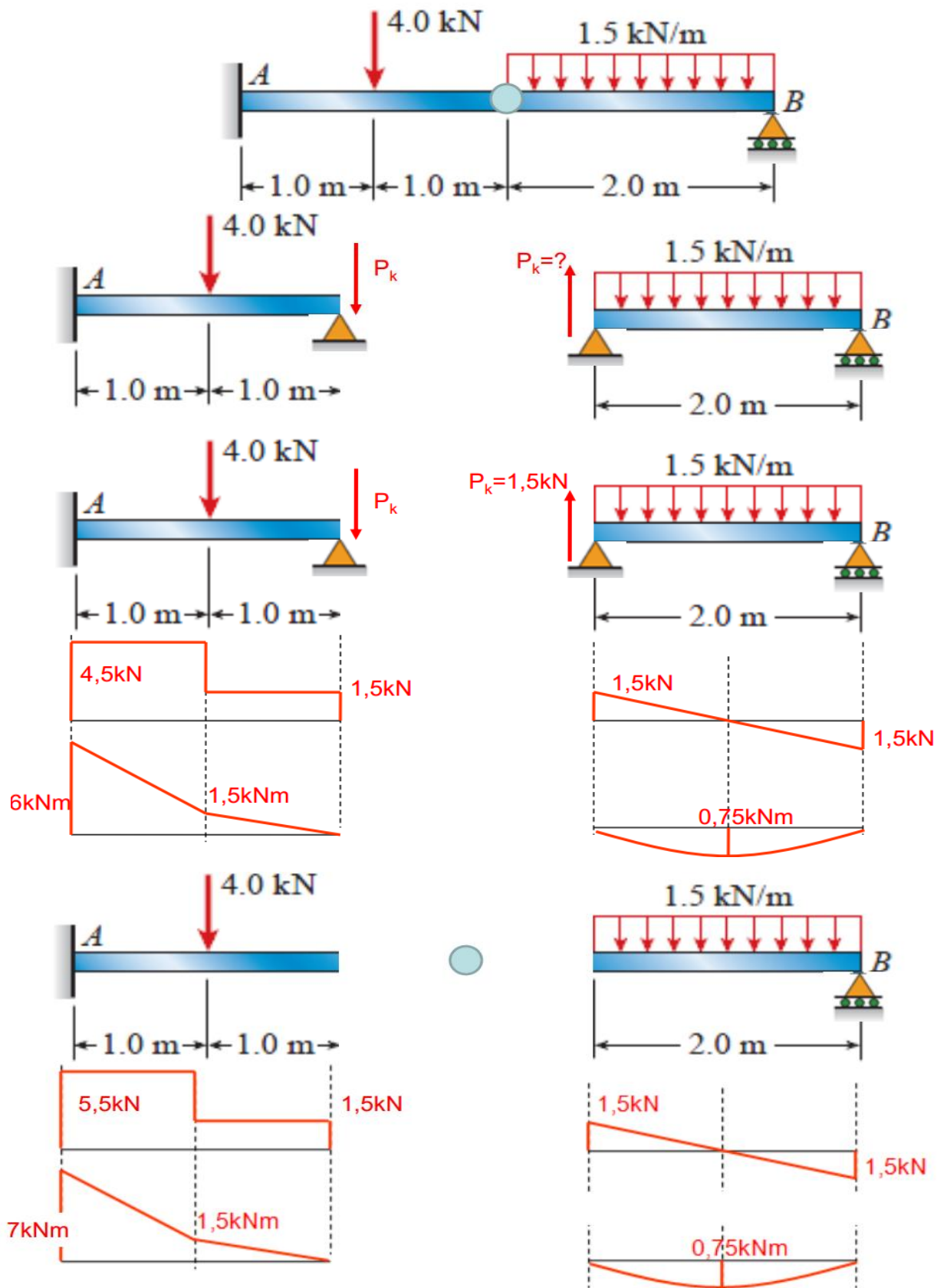
Ví dụ 7:
*) Xác định phản
lực liên kết :



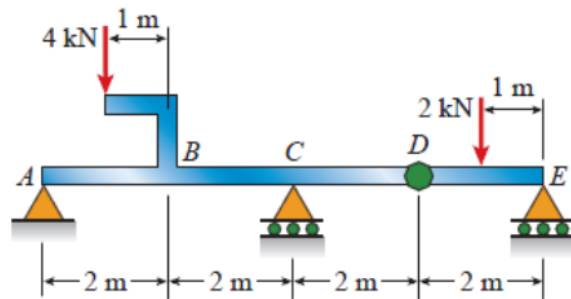
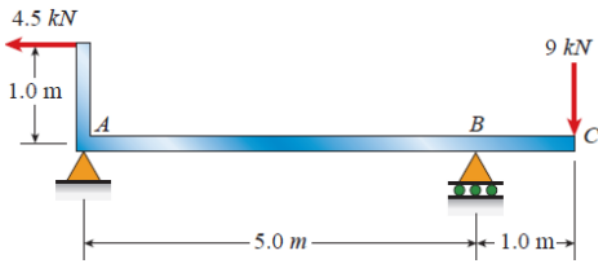
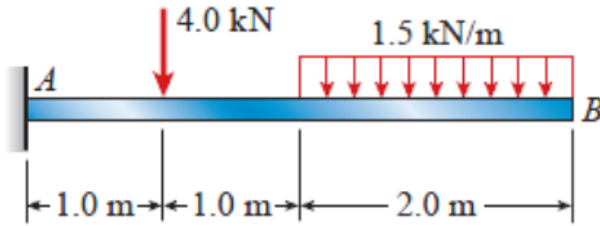
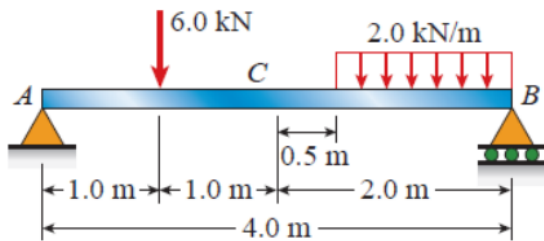
Ví dụ 8:



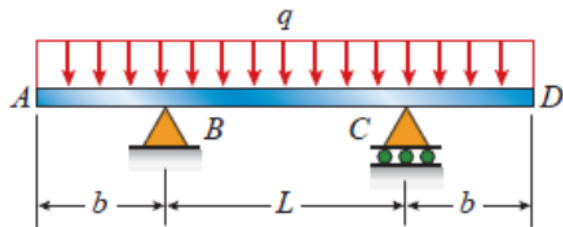
Ví dụ 9: Vẽ biểu đồ mômen tĩnh định nhiều nhịp.



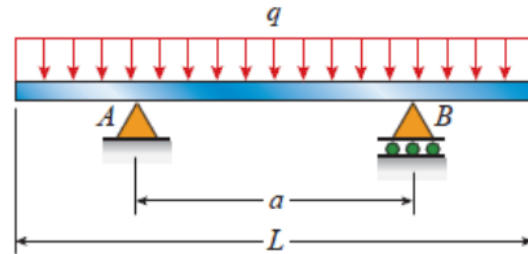
BÀI TẬP: Vẽ biểu đồ nội lực lực cắt và mômen.



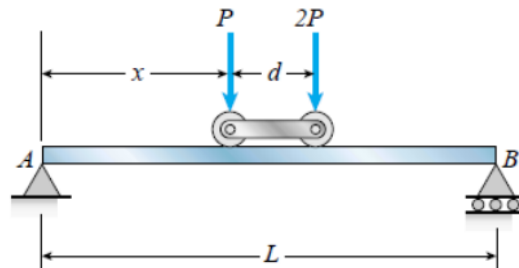
$L/b = ?$ Để mômen giữa dầm $= 0$



$a = ?$ Để mômen đạt min

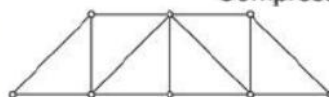
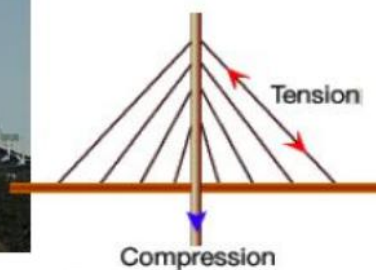
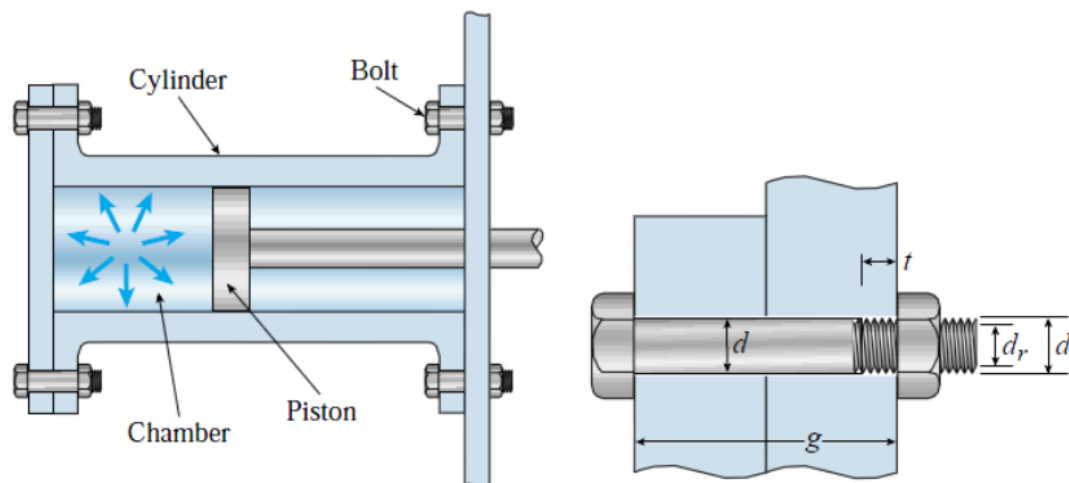


- $x = ?$ Để lực cắt max?
- $x = ?$ Để mômen max?
- ($P = 10 \text{ kN}$, $d = 2.4 \text{ m}$, $L = 12 \text{ m}$)

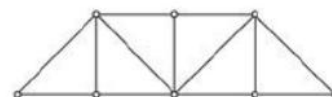


Chương 2

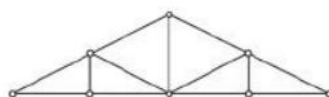
KÉO, NÉN ĐÚNG TÂM



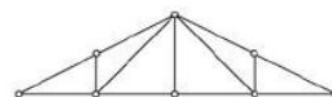
Howe Bridge Truss



Pratt Bridge Truss



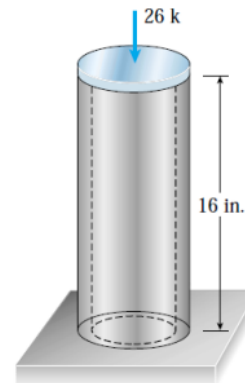
Howe Roof Truss



Pratt Roof Truss

2.1. Định nghĩa

- Một thanh được gọi là chịu kéo nén đúng tâm nếu trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có thành phần lực dọc N_z .
- Lực dọc N_z có thể tìm được thông qua phương pháp mặt cắt.

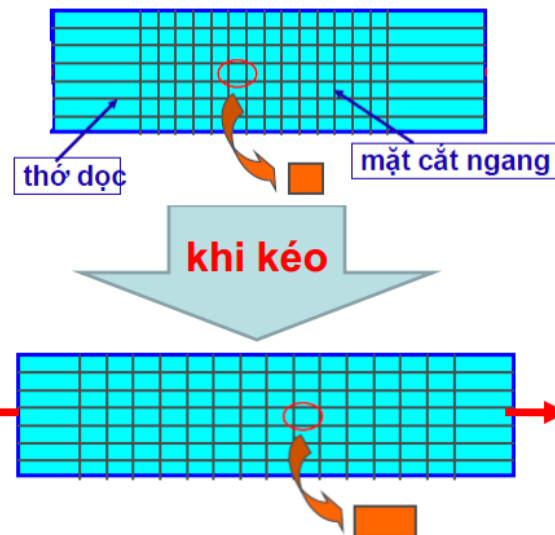


- Trong thực tế: các xà chống, cột điện, thanh giằng, dây văng cầu treo... là các trường hợp chịu kéo nén đúng tâm.

2.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang

*) Thí nghiệm:

- Xét một mẫu thanh chịu kéo đúng tâm.
- Trước khi kéo: vạch lên mẫu các đường thẳng // và $\perp$ trục thanh.
- Quan sát mẫu sau khi kéo:
Đường // trục vẫn // trục. k/c giữa chúng không đổi.
Đường $\perp$ trục thanh vẫn $\perp$ nhưng khoảng cách đã thay đổi



→ Giả thuyết về biến dạng:

- Mặt cắt ngang: luôn phẳng và $\perp$ với trục thanh.
- Thớ dọc: luôn // trục thanh, ko chèn ép, tác dụng lên nhau.
- Quá trình biến dạng tuân theo định luật Hooke: $\sigma_z = E \varepsilon_z$

***) Công thức tính ứng suất:**

- Dựa trên giả thuyết về biến dạng:

Giả thuyết về mcn $\rightarrow$ các ứng suất tiếp bằng không.

Giả thuyết về thớ dọc $\rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 0$, chỉ còn σ_z

Theo công thức liên hệ nội lực và ứng suất ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF$$

Trong đó: $\sigma_z = E\varepsilon_z = \text{const}$ trên toàn mặt cắt F nên:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \sigma_z F \Rightarrow \sigma_z = \frac{N_z}{F}$$

2.3. Biến dạng thanh chịu kéo, nén đúng tâm

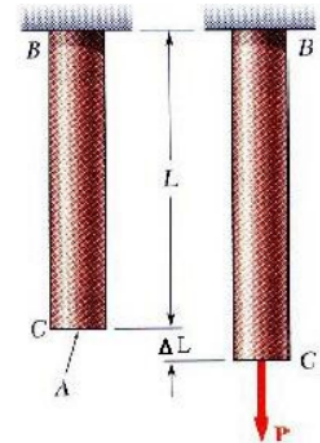
Thanh chiều dài L chịu kéo (nén) sẽ dãn ra (co lại) một đoạn ΔL được gọi là biến dạng dọc thanh.

*) Công thức tính biến dạng ΔL :

Ta có:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \Rightarrow \Delta dz = \varepsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{N}{EF} dz$$

$$\Rightarrow \Delta L = \int_l \Delta dz = \int_l \frac{N}{EF} dz$$



Trong đó E được gọi là môđun đàn hồi hay hằng số Young.

Tích EF được gọi là độ cứng chịu kéo, nén của thanh.

Nếu đoạn có EF ko đổi: $\Rightarrow \Delta L = \frac{1}{EF} \int_l N dz = \frac{\text{Diện tích biểu đồ } N_z}{EF}$

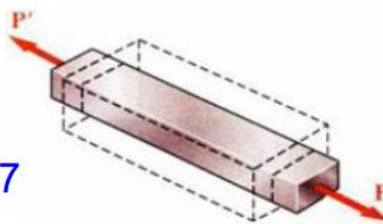
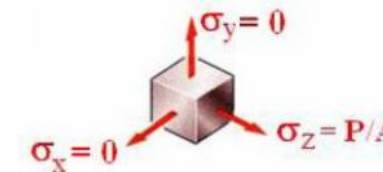
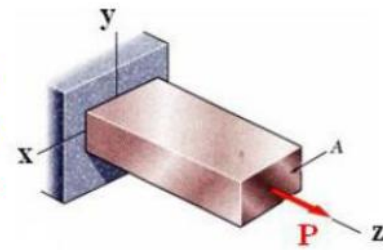
*) Hệ số poisson:

Khi thanh bị kéo đúng tâm bởi lực P theo phương z , phương z bị **dãn ra** với biến dạng tỷ đối là ε_z thì phương vuông góc **x, y bị biến dạng co lại** với biến dạng tỷ đối:



$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z$$

Hệ số μ được gọi là hệ số poisson – tên của người tìm ra nó.



Hệ số poisson một số vật liệu:

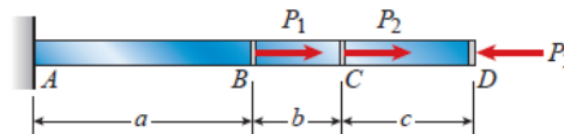
$\mu_{\text{thép}}=0,25-0,33$; $\mu_{\text{đồng}}=0,31-0,34$; $\mu_{\text{cao su}}=0,47$

2.4. Ví dụ tính thanh chịu kéo, nén đúng tâm

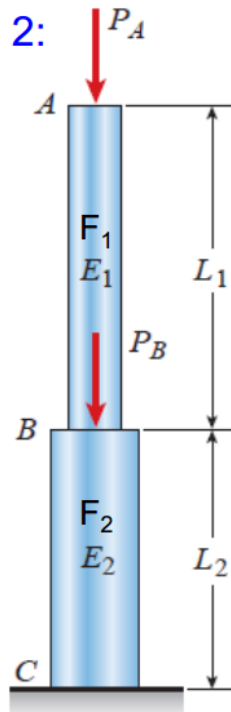
Ví dụ 1: Cho $a=60\text{cm}$, $b=24\text{cm}$, $c=36\text{cm}$. $F=15\text{cm}^2$, $E=200\text{GPa}$
 $P_1= 270\text{kN}$, $P_2= 180\text{kN}$, $P_3= 130\text{kN}$,

Hỏi.

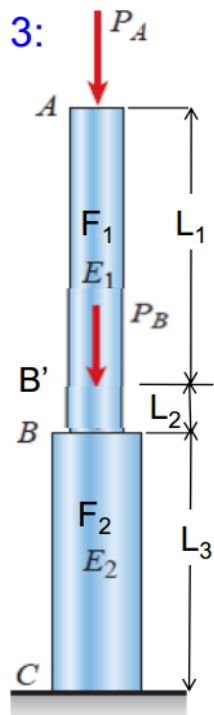
- Ứng suất trong thanh?
- $\Delta_{AD}=?$
- P_3 thay đổi? Để $\Delta_{AD}=0$.



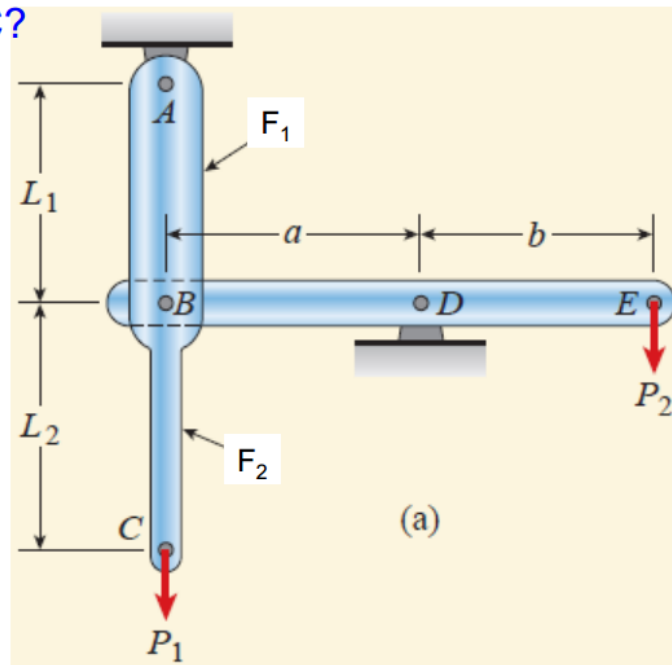
Ví dụ 2: P_A Tính U'S trong thanh và chuyển vị tại A



Ví dụ 3: P_A Tính U'S trong thanh và chuyển vị tại A



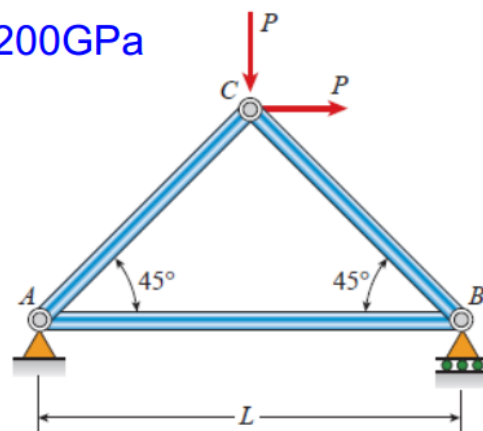
Ví dụ 4: Tính chuyển vị tại C?



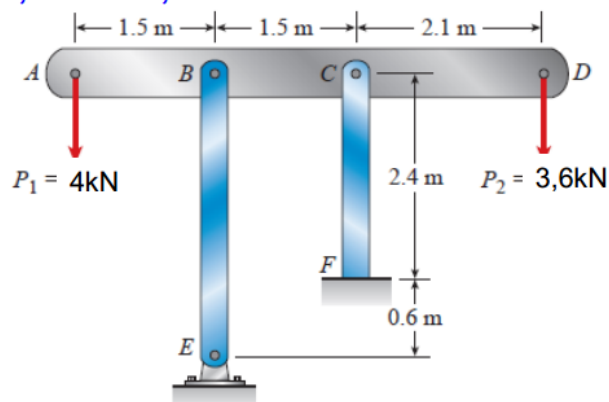
Ví dụ 5: Cho $L=3\text{m}$, $F=3900\text{mm}^2$, $E=200\text{GPa}$

a) $P= 650\text{kN}$. Hỏi $\Delta_B=?$

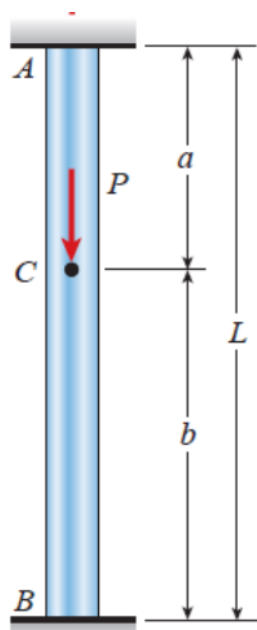
b) $[P]= ?$. Biết $[\Delta_B]=1,5\text{mm}$.



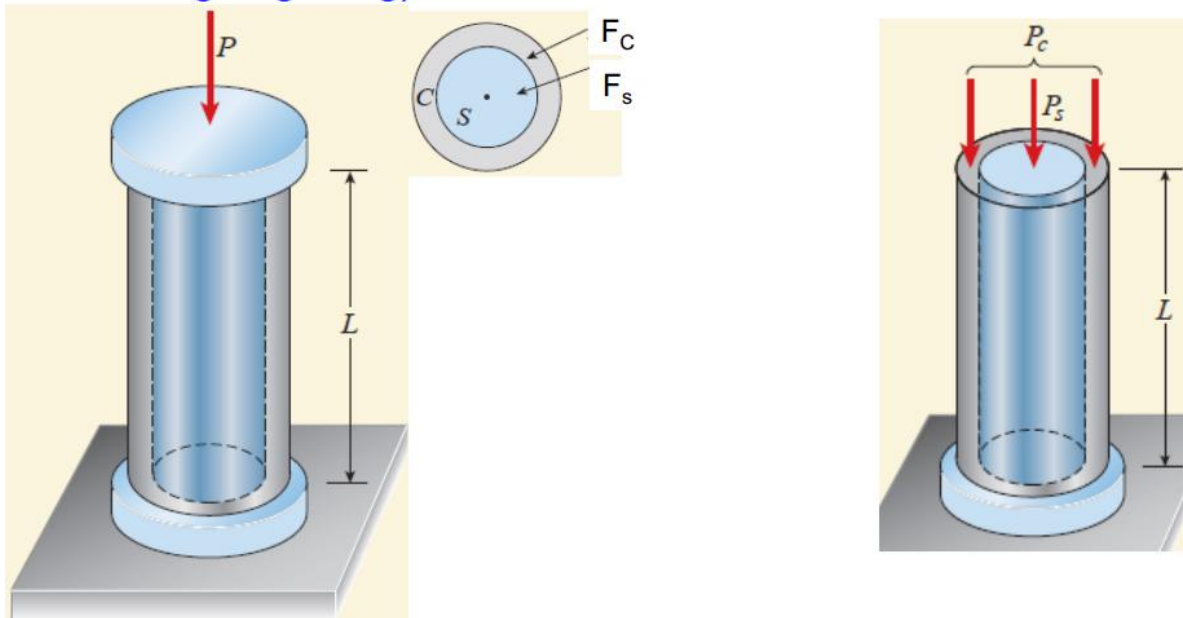
Ví dụ 6: Cho $F_{BE}=11,1\text{mm}^2$, $F_{CF}=9,28\text{mm}^2$, $E=200\text{GPa}$
 Tìm chuyển vị tại A, D?



Ví dụ 7: Tìm chuyển vị tại C, biết độ cứng của thanh là EF.



Ví dụ 8: Tìm chuyển vị tại đầu tự do (thanh thép lồng ko ma sát trong ống đồng)

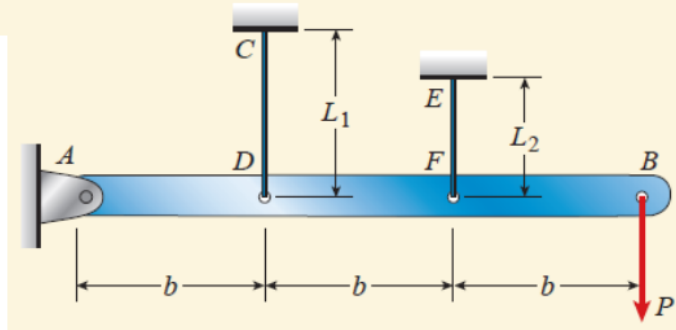


Ví dụ 9:

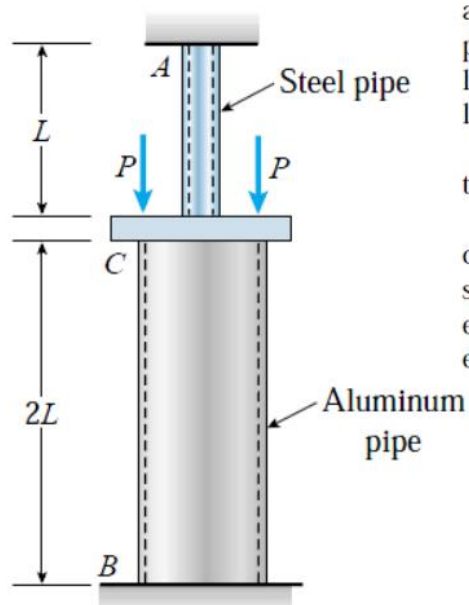
A horizontal rigid bar AB is pinned at end A and supported by two wires (CD and EF) at points D and F (Fig. 2-18a). A vertical load P acts at end B of the bar. The bar has length $3b$ and wires CD and EF have lengths L_1 and L_2 , respectively. Also, wire CD has diameter d_1 and modulus of elasticity E_1 ; wire EF has diameter d_2 and modulus E_2 .

(a) Obtain formulas for the allowable load P if the allowable stresses in wires CD and EF , respectively, are σ_1 and σ_2 . (Disregard the weight of the bar itself.)

(b) Calculate the allowable load P for the following conditions: Wire CD is made of aluminum with modulus $E_1 = 72$ GPa, diameter $d_1 = 4.0$ mm, and length $L_1 = 0.40$ m. Wire EF is made of magnesium with modulus $E_2 = 45$ GPa, diameter $d_2 = 3.0$ mm, and length $L_2 = 0.30$ m. The allowable stresses in the aluminum and magnesium wires are $\sigma_1 = 200$ MPa and $\sigma_2 = 175$ MPa, respectively.



Ví dụ 10:



The aluminum and steel pipes shown in the figure are fastened to rigid supports at ends A and B and to a rigid plate C at their junction. The aluminum pipe is twice as long as the steel pipe. Two equal and symmetrically placed loads P act on the plate at C .

(a) Obtain formulas for the axial stresses σ_a and σ_s in the aluminum and steel pipes, respectively.

(b) Calculate the stresses for the following data: $P = 12$ k, cross-sectional area of aluminum pipe $A_a = 8.92$ in.², cross-sectional area of steel pipe $A_s = 1.03$ in.², modulus of elasticity of aluminum $E_a = 10 \times 10^6$ psi, and modulus of elasticity of steel $E_s = 29 \times 10^6$ psi.

$$1\text{in}=2,54\text{cm}$$

$$1\text{kip(k)}=1000\text{ pound(lb)}$$

$$1\text{lp}=4,45\text{ N}$$

$$1\text{psi}=6890\text{Pa(N/m}^2\text{)}$$

2.5. Thí nghiệm kéo, nén vật liệu

Để kiểm tra cơ tính một vật liệu sau khi chế tạo → tiến hành thí nghiệm. Thí nghiệm kéo, nén là những TN^o đơn giản giúp ta xác định giới hạn phá hủy của vật liệu.

Mẫu thí nghiệm:

Kéo:



Nén:



Vật liệu nói chung chia làm 2 nhóm:

- Vật liệu giòn như: gang, bê tông, gốm... bị phá hủy ở BD nhỏ.
- Vật liệu dẻo như: thép, nhôm,... bị phá hủy ở Bdạng lớn.

*) Mục đích thí nghiệm:

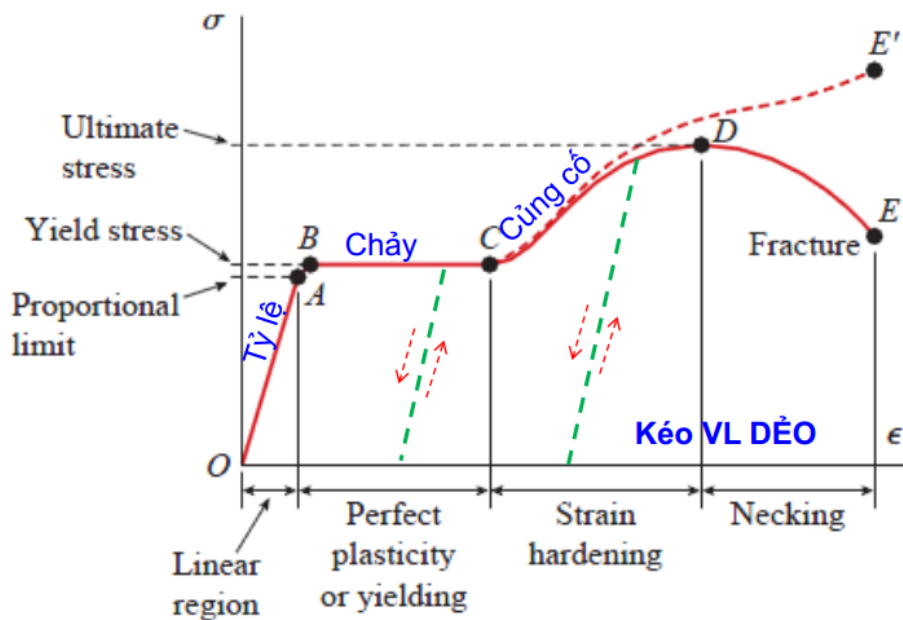
- Xác định khả năng chịu lực.
- Xác định khả năng chịu biến dạng.
- Đồ thị quan hệ biến dạng và lực.
- So sánh đặc tính giữa các vật liệu khác nhau

*) Chú ý:

Khi thí nghiệm cần gia tải chậm để quan sát quá trình biến đổi của mẫu.



***) Kết quả thí nghiệm KÉO:**



Điểm A, B, D cần quan tâm.

$$\sigma_A = \sigma_{tle}$$

$$\sigma_B = \sigma_{chảy}$$

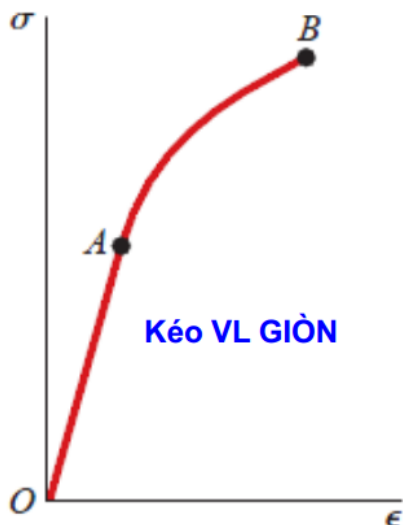
$$\sigma_D = \sigma_{bền}$$

BD tỷ đối:

$$\epsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} 100\%$$

Độ thắt tỷ đối:

$$\psi = \frac{A_1 - A_0}{A_0} 100\%$$



A, B cần quan tâm.

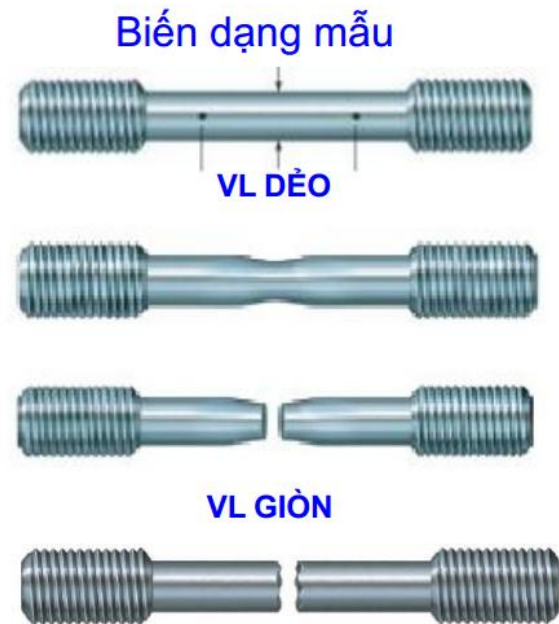
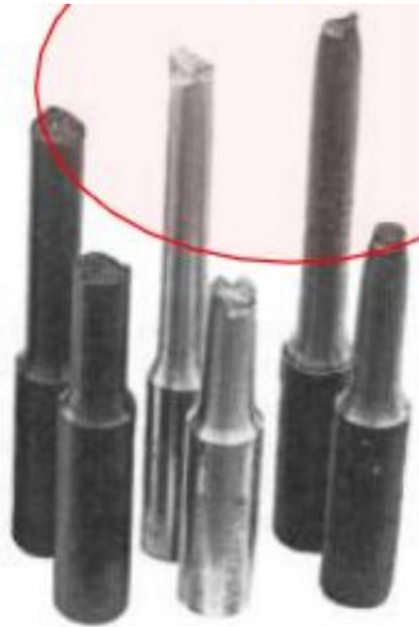
$$\sigma_A = \sigma_{tle} ; \quad \sigma_B = \sigma_{bền}$$

Tuy vậy do vật liệu giòn biến dạng rất ít trước khi phá hủy nên:

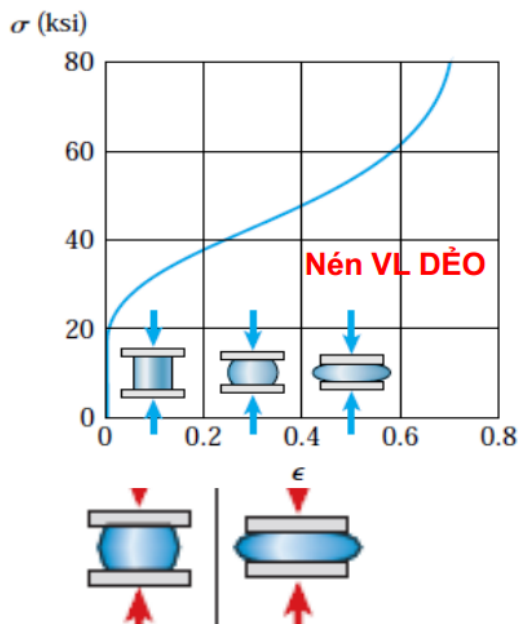
→ Khó phát hiện được điểm A.

→ Giới hạn bền VL giòn khá bé so với vật liệu dẻo.

***) Kết quả thí nghiệm KÉO:**

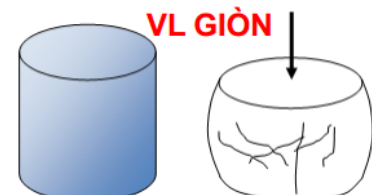


***) Kết quả thí nghiệm NÉN:**



VL Dẻo: vẫn có thể được $\sigma_{t\bar{l}e}$, $\sigma_{ch\bar{a}y}$ nhưng khó xác định được giới hạn bền do VL dẻo chịu được biến dạng rất lớn.

VL Giòn: ta vẫn chỉ xác định được giới hạn bền, nhưng nó lớn hơn nhiều so với giới hạn bền khi kéo.



Vật liệu	E (kN/cm ²)	μ	KÉO (kN/cm ²)		NÉN (kN/cm ²)		δ(%)
			σ _{chảy}	σ _{bền}	σ _{chảy}	σ _{bền}	
Thép CT3	2,1.10 ⁴	0,24÷0,3	24	38÷47	24	---	21÷23
Gang xám	(1,15÷1,7).10 ⁴	0,2÷0,3	12÷29	12÷38	---	50÷140	---
Bê tông	(0,17÷0,31).10 ⁴	0,1÷0,2	---	0,025 ÷0,175	---	1÷7	---
Hợp kim Titan	1,12.10 ⁴	0,33	70÷80	80÷90	---	----	22÷15

***) Kết luận:**

- Vật liệu dẻo chịu kéo và nén đều tốt.
- Vật liệu giòn chịu kéo kém hơn VL dẻo, nhưng lại chịu nén tốt.

2.6. Ứng suất cho phép – Hệ số an toàn - Điều kiện bền

***) Ứng suất cho phép [σ]:**

-VL dẻo: lấy σ_{cho phép}=[σ]=σ_{chảy} .

-VL giòn: lấy σ_{cho phép}=[σ]=σ_{bền} .

***) Ktra điều kiện bền:**

-VL dẻo: $\max \{ \sigma_{z\max}, |\sigma_{z\min}| \} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$

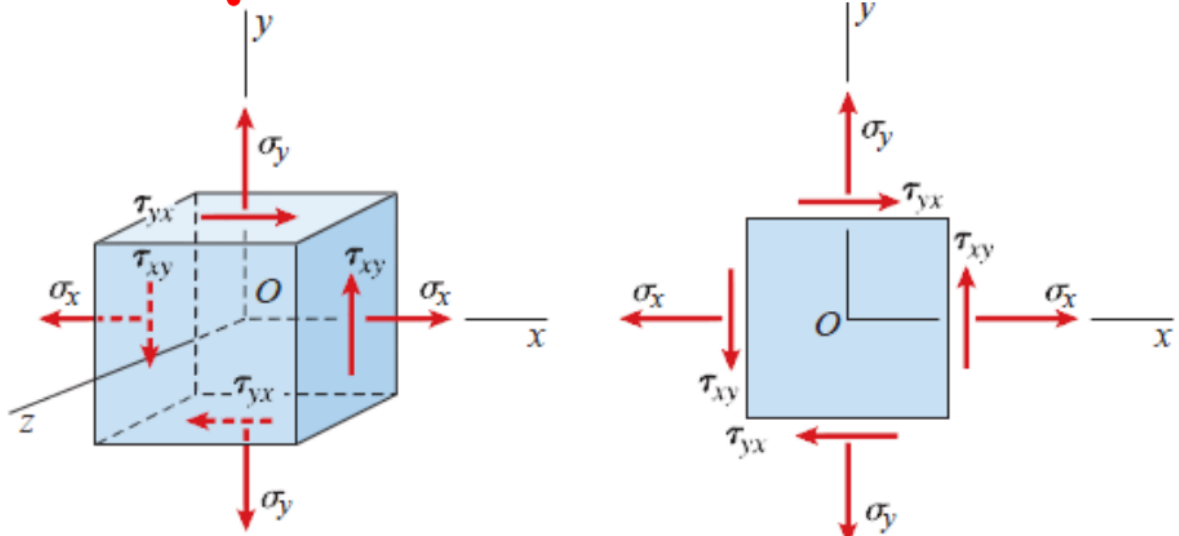
-VL giòn: $\sigma_{z\max} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n} \quad |\sigma_{z\min}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$

n > 1 được gọi là **hệ số an toàn**. (sao cần n?).

n lớn thì an toàn nhưng tốn kém vật liệu và ngược lại.

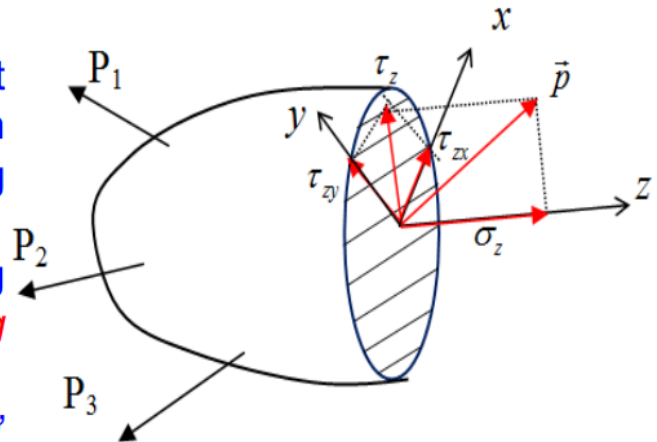
Chương 3

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT



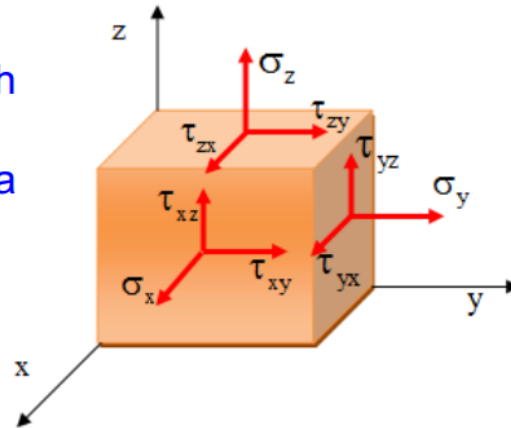
3.1. Khái niệm

- Vật thể chịu lực, cắt một mcn qua M, tại M có véc tơ ứng suất toàn phần $\vec{p}_1$.
- Qua M có vô số cắt mặt cắt khác nhau, ứng với mỗi mcn đó ta cũng có một véc tơ ứng suất tại M.
- Tập hợp các véc tơ ứng suất tại M được gọi là **trạng thái ứng suất** tại M.
- Trong tập hợp các véc tơ ứng suất tại M, chỉ có 3 véc tơ U'S trên 3 mcn độc lập.
- Để nghiên cứu ứng suất tại một điểm ta xét phân tố hình hộp vô cùng bé bao quanh điểm đó.



- 3 véc tơ US độc lập trên 3 mặt cắt vuông góc với nhau.
- Gắn hệ trục Oxyz lên phân tố.
- Chiếu véc tơ US trên mỗi mặt hình hộp lên 3 trục ta được 3 thành phần.
- 9 thành phần trên biểu diễn cho ta TTUS tại một điểm:

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

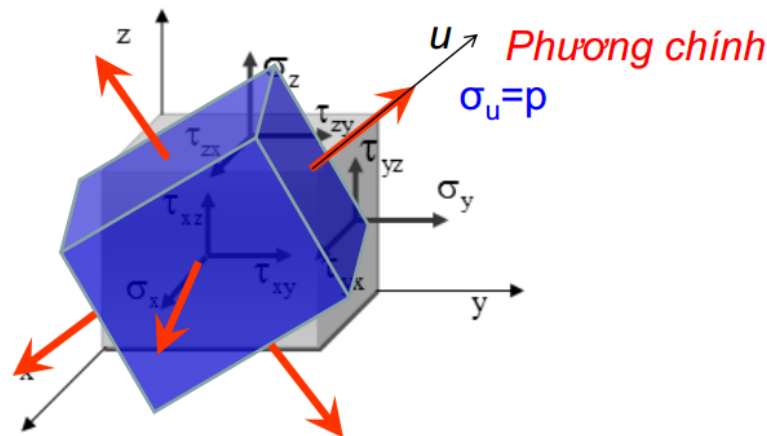


T_{σ} được gọi là ten-xơ ứng suất.

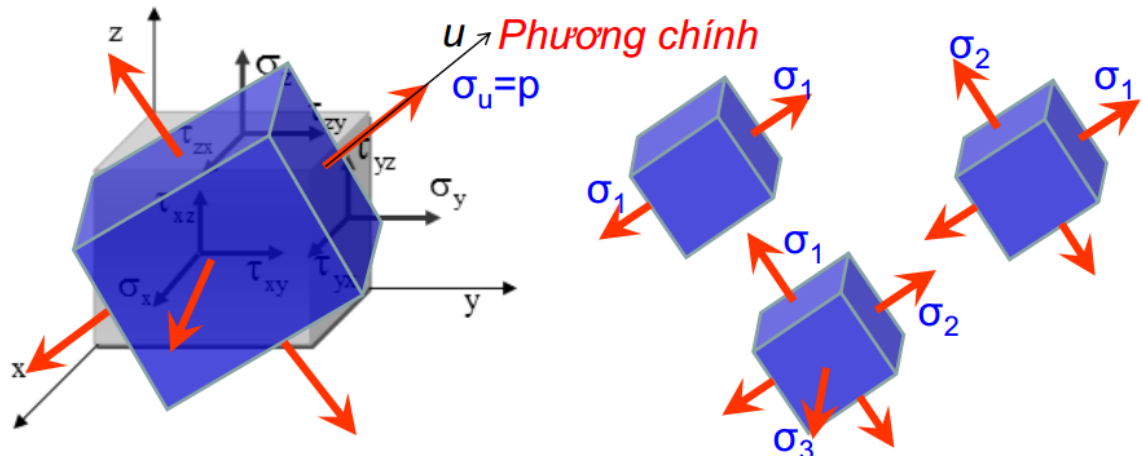
Do phân tố CB, $\Sigma M=0$ nên ta có:

$\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$ Định luật đối ứng của ứng suất tiếp.

3.2. Mặt chính – Phương chính - Ứng suất chính

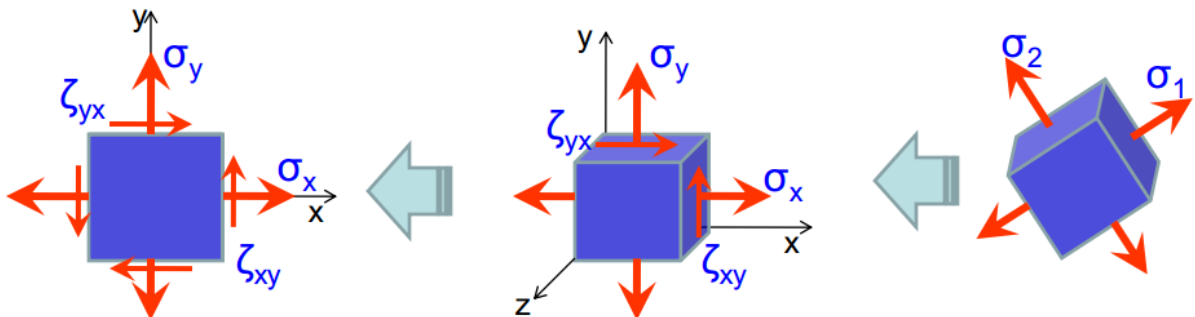


- Mặt cắt trên đó chỉ có US pháp được gọi là **mặt chính**.
Khi đó ứng suất toàn phần p vuông góc với mcn. $\sigma_u=p$
- Phương pháp tuyến của mặt chính được gọi là **phương chính**.
- Ứng suất tương ứng trên mặt chính đc gọi là **ứng suất chính**.
- Phân tố chỉ có ứng pháp trên các mặt đc gọi là **phân tố chính**.



- Ng ta chứng minh đc: tại 1 đ luôn có 3 mặt chính vuông góc với nhau. Trên đó có 3 U'S chính ký hiệu là: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.
- Nếu chỉ có 1 U'S chính $\neq 0$ ta gọi là TTU'S ĐƠN.
- Nếu chỉ có 2 U'S chính $\neq 0$ ta gọi là TTU'S PHẪNG.
- Nếu tất cả 3 U'S khác 0 ta gọi là TTU'S KHỐI.

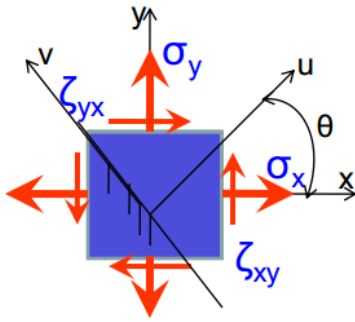
3.3. Trạng thái ứng suất phẳng



- TTU'S phẳng được xác định bởi 3 thông số σ_x, σ_y và $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Từ đó ta có thể xác định được ứng suất trên mcn bất kỳ (//z).

*) Quy ước dấu:

- σ_x, σ_y mang dấu dương khi chiều hướng ra ngoài phân tố.
- $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ mang dấu dương khi nó nằm trên mặt dương thì hướng về chiều dương, nằm trên mặt âm hướng về chiều âm của trục. Ngược lại là âm.



***) Xử ứng suất trên mcn bất kỳ(//z).**

Xét mcn có vectơ pháp tuyến u với $(u, x) = \theta$.

Ta sử dụng pp mặt cắt để tìm σ_u và τ_{uv} :

Xét phân tử CB ta có:

$\Sigma X = 0$:

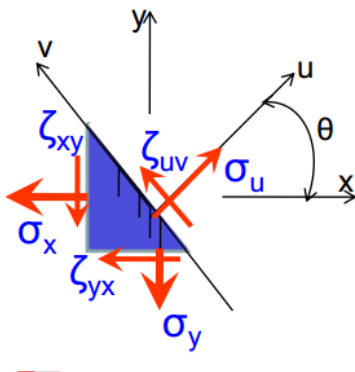
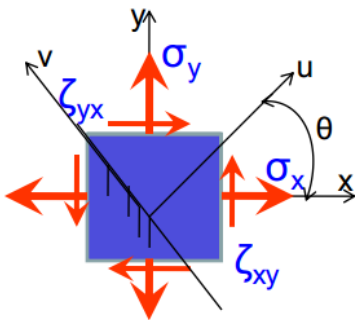
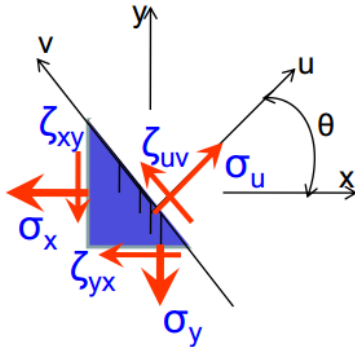
$$\sigma_u F \cos \theta - \tau_{uv} F \sin \theta - \sigma_x F \cos \theta - \tau_{yx} F \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$\Sigma Y = 0$:

$$\sigma_u F \sin \theta + \tau_{uv} F \cos \theta - \sigma_y F \sin \theta - \tau_{xy} F \cos \theta = 0 \quad (2)$$

Triệt tiêu F, chú ý $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ lấy:

$$(1) \cdot \cos \theta + (2) \cdot \sin \theta = ? ; \quad (2) \cdot \cos \theta - (1) \cdot \sin \theta = ?$$



$$\sigma_u = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

là CT xử cho ta gtri ứng suất trên mcn bất kỳ. Đặc biệt:

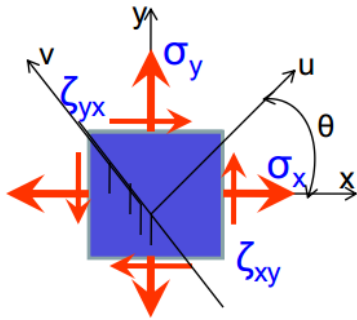
Khi $\theta = 0^\circ$: $\sigma_u = \sigma_x$ và $\tau_{uv} = \tau_{ux}$

Khi $\theta = 90^\circ$: $\sigma_u = \sigma_y$ và $\tau_{uv} = -\tau_{xy}$

Biến đổi pt trên ta có:

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

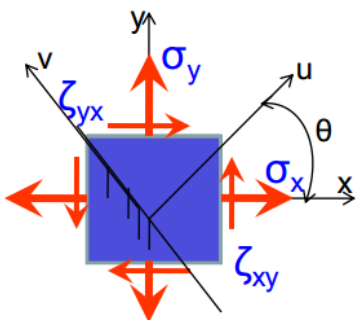
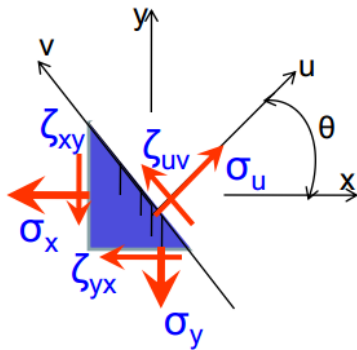


Tính giá trị ứng suất pháp σ_v ?
 Khi đó $\alpha = \theta + 90^\circ$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y$$

“Trong trường hợp U’S phẳng tổng U’S pháp trên hai mcn $\perp$ với nhau luôn là hằng số và không phụ thuộc góc θ ”
 Mà chỉ phụ thuộc vào??



Tính: $\frac{d\sigma_u}{d\theta} = ?$

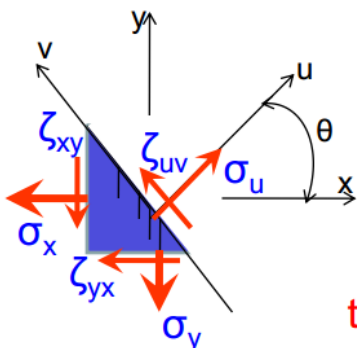
$$\frac{d\sigma_u}{d\theta} = 2 \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \right) = 2\tau_{uv}$$

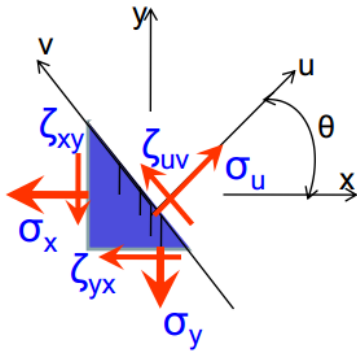
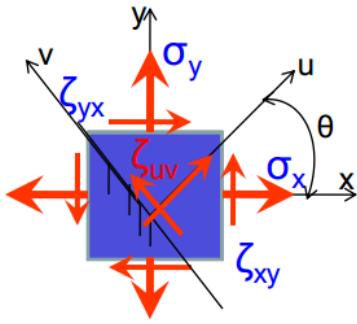
$$\Rightarrow \frac{d\sigma_u}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \tau_{uv} = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_\sigma = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

“Trong U’S phẳng khi U’S pháp đạt cực trị thì đó là U’S chính và bằng:

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

tại góc: $\theta_\sigma = \frac{1}{2} \text{actg} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$





Tính: $\frac{d\tau_{uv}}{d\theta} = ?$

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

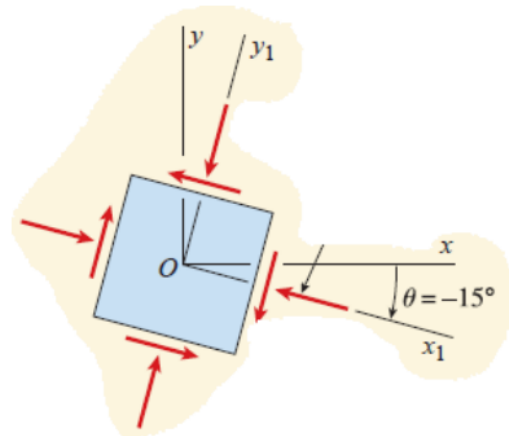
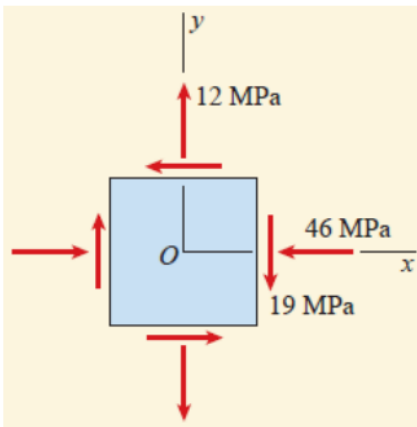
$$\Rightarrow \frac{d\tau_{uv}}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \tan 2\theta_\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\cot 2\theta_\sigma$$

“Trong U’S phẳng U’S tiếp đạt cực trị bằng:

$$\tau_{\frac{\max}{\min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

tại góc: $\theta_\tau = \theta_\sigma \pm 45^\circ$

**) Ví dụ 1 : Xđ U’S trên phân tố khi quay góc 15° on clockwise.*



**) Vòng tròn Mo ứng suất:*

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

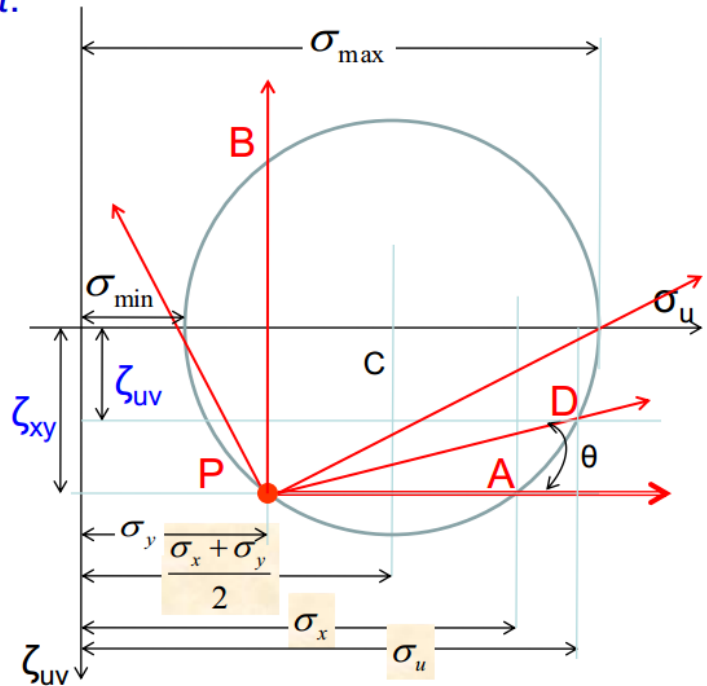
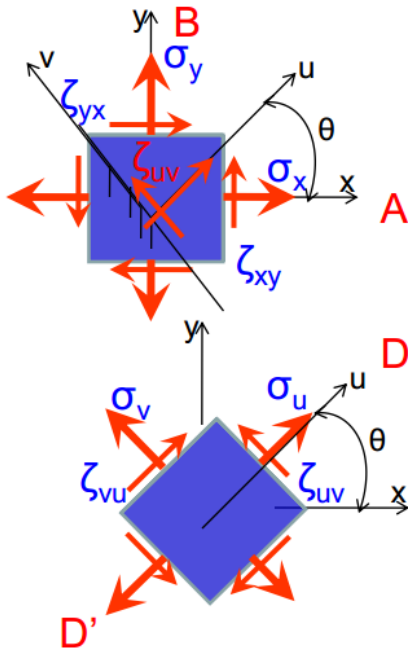
$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\left[C \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) \right. \\ \left. R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \right]$$

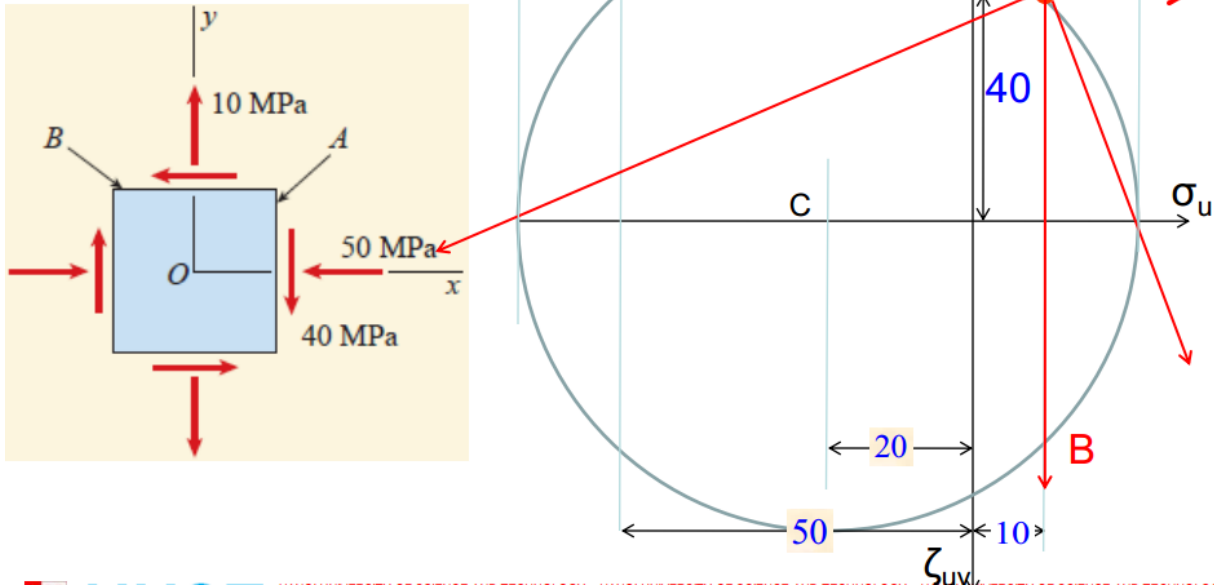
pt có dạng pt đg tròn trong hệ trục
(σ_u, τ_{uv}) tâm C bán kính R được gọi
là **vòng tròn Mo ứng suất**.

P(σ_y, τ_{xy}) đc gọi là điểm cực.

**) Vòng tròn Mo ứng suất:*



*) Ví dụ 2 : Vẽ vòng tròn Mo U'S của phần tử cho như hình vẽ.



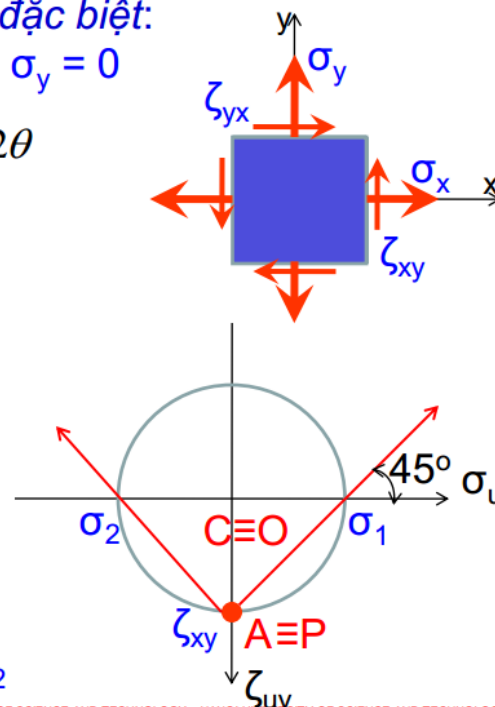
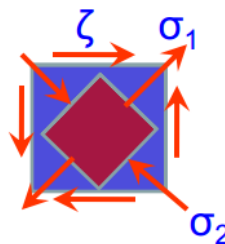
*) Một số trường hợp TTU'S phẳng đặc biệt:

- Trượt thuần túy (pure shear): $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{uv} &= \tau_{xy} \cos 2\theta \\ \sigma_{\max/\min} &= \pm \tau_{xy} \\ \tau_{\max} &= \tau_{xy} \end{aligned}$$

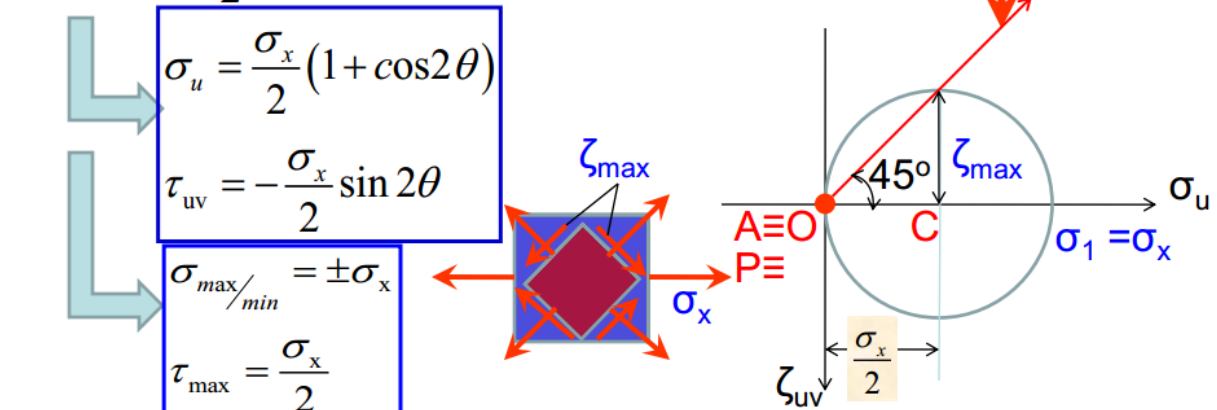


*) Một số trường hợp TTƯ'S phẳng đặc biệt:

- Trượt ứng suất đơn: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{uv} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



3.4. Quan hệ ứng suất và biến dạng

*) TTƯ'S đơn:

Hằng số liên hệ gồm poisson μ và môđun E .

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\mu \sigma_x}{E}$$

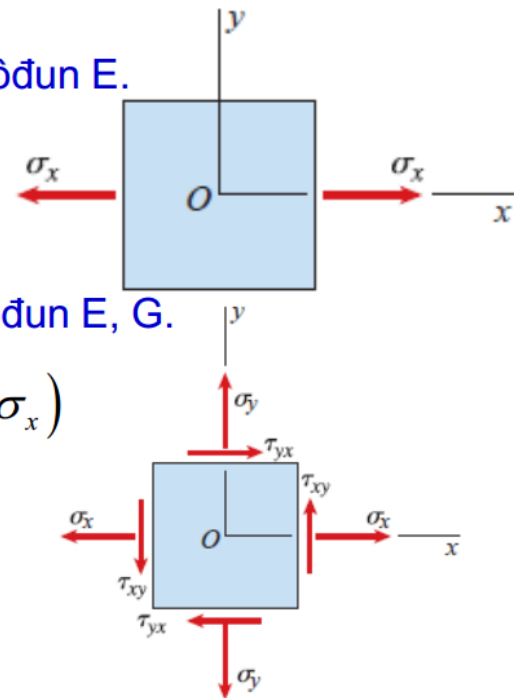
*) TTƯ'S phẳng:

Hằng số liên hệ gồm poisson μ và môđun E, G .

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \sigma_y); \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y); \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Trong đó: $G = \frac{E}{2(\mu + 1)}$



**) TTƯ'S trượt thuần túy:*

Hằng số liên hệ là môđun trượt G .

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

**) TTƯ'S khối:*

Hằng số liên hệ gồm posion μ và môđun E, G .

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{cases}$$

3.5. Các thuyết bền

**) Khái niệm:*

Ở TTƯ'S đơn để ktra bền ta làm:

$$\text{VL dẻo: } \max \{ \sigma_{z\max}, |\sigma_{z\min}| \} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$$

$$\text{VL giòn: } \sigma_{z\max} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n} \quad \text{và} \quad |\sigma_{z\min}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$$

Trong đó: các $[\sigma]$ dễ tìm được qua TN kéo nén đơn giản.

Với TTƯ'S phẳng, khối ta khó xác định được điều kiện bền do đó ng ta đưa ra *các thuyết bền – là các giả thiết về nguyên nhân gây ra sự phá hủy vật liệu. Từ đó tìm ra ứng suất tương đương để có thể kiểm tra bền.*

TB4: Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng(TNBĐHD)
 “Nguyên nhân cơ bản gây phá hủy vật liệu là TNBĐHD”

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]$$

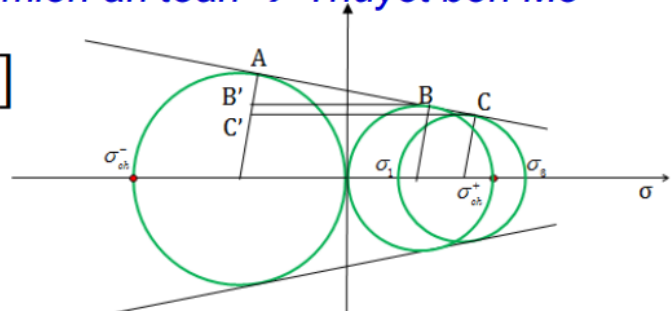
Hạn chế: chỉ phù hợp vật liệu dẻo.

TB5: Thuyết bền TTƯ'S tới hạn – Thuyết bền Mo:

“Thuyết bền được xây dựng từ KQ thí nghiệm → vẽ vòng tròn Mo
 → vẽ đường bao giới hạn → miền an toàn → Thuyết bền Mo”

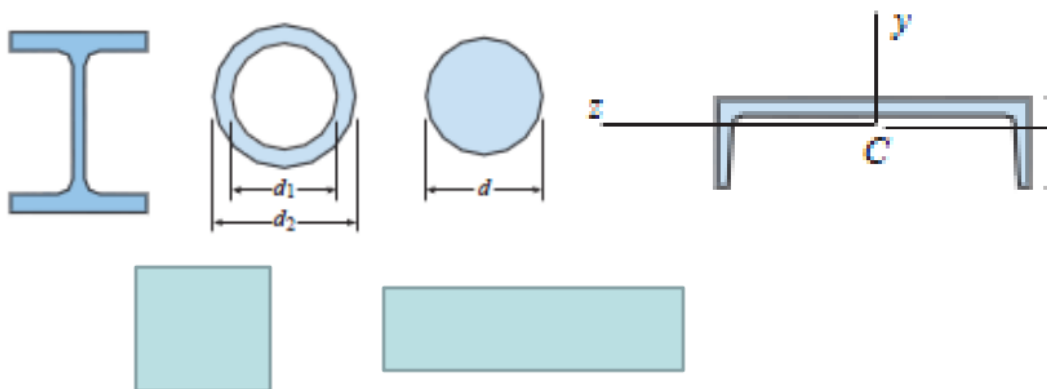
$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_{kéo}}{[\sigma]_{nén}} \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Hạn chế: ko xét đến σ_2 .

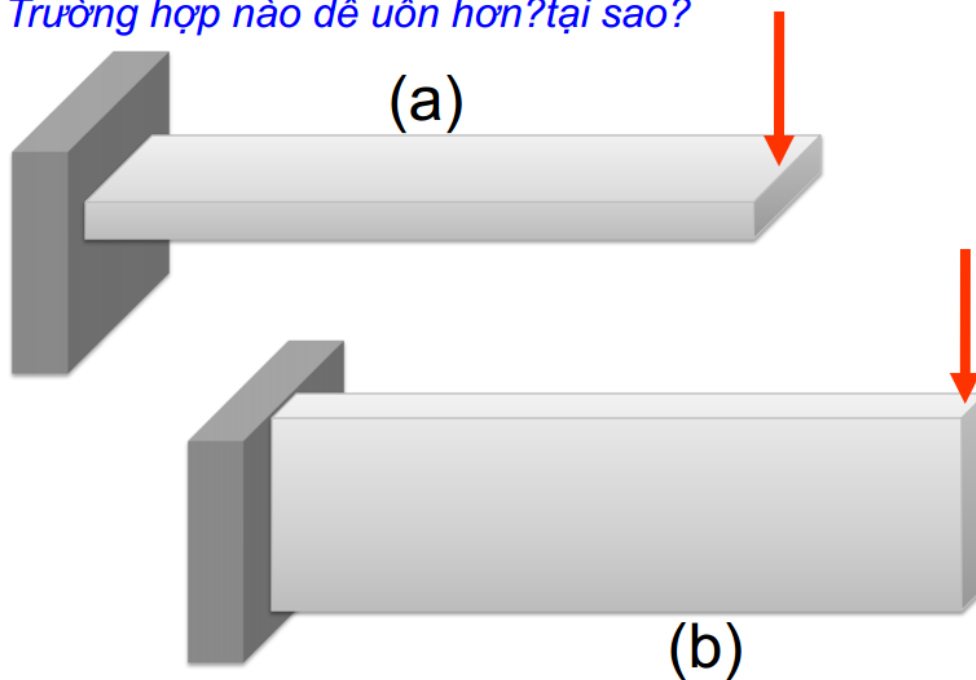


Chương 4

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC MẶT CẮT NGANG



Trường hợp nào dễ uốn hơn? tại sao?



4.1. Mômen tĩnh

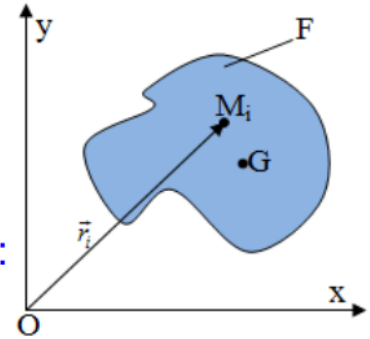
*) Định nghĩa:

- Mô men tĩnh của hình F đối với điểm O:

$$\vec{S}_o = \int_F \overrightarrow{OM_i} dF$$

- Mô men tĩnh của hình F đối với trục Ox, Oy:

$$S_x = \int_F y dF; S_y = \int_F x dF$$



Thứ nguyên của S là [chiều dài]³. S có thể >0, =0 hoặc <0.

Nếu trục x có S_x=0 thì trục x được gọi là **trục trung tâm**.

Nếu điểm G có S_G=0 thì G được gọi là **trọng tâm**.

Giao hai trục trung tâm được là trọng tâm.

*) Công thức xác định trọng tâm:

$$\begin{cases} S_x = y_G \cdot F \\ S_y = x_G \cdot F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{S_y}{F} \\ y_G = \frac{S_x}{F} \end{cases}$$

*) Cách xác định trọng tâm hình được ghép từ các hình đơn giản:

Bước 1: Chọn một hệ trục tọa độ (bất kỳ), sau đó tính các mômen tĩnh của từng hình nhỏ đối với hệ trục vừa chọn, và tính diện tích các hình nhỏ.

Bước 2: Tính tọa độ trọng tâm G trong hệ trục tọa độ vừa chọn theo công thức sau:

$$x_G = \frac{S_{y\Sigma}}{F_\Sigma} = \frac{\sum S_{y(i)}}{\sum F_{(i)}}; y_G = \frac{S_{x\Sigma}}{F_\Sigma} = \frac{\sum S_{x(i)}}{\sum F_{(i)}}$$

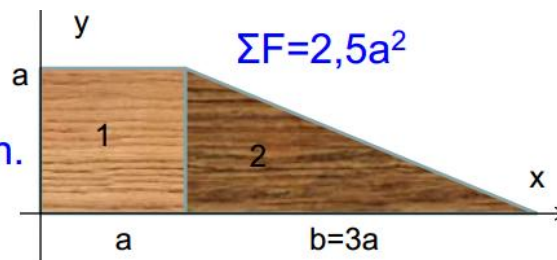
*) Ví dụ 1: xác định trọng tâm.

- Chọn hệ trục tọa độ.
- Tính mômen tĩnh S của từng hình.

Hình vuông:

$$\begin{cases} S_{x1} = \\ S_{y1} = \end{cases}$$

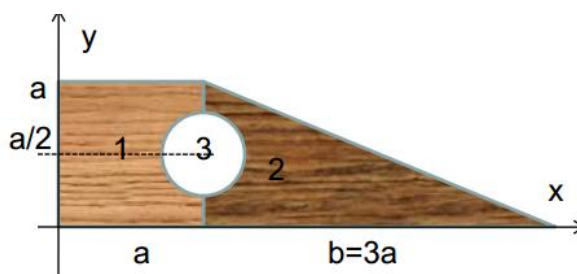
Tam giác:



Suy ra trọng tâm:

*) Ví dụ 2: xác định trọng tâm.

Hình khoét rỗng coi như hình bình thường với diện tích âm.



4.2. Mômen quán tính

*) Định nghĩa:

- **Mômen quán tính độ cực** của hình F đối với điểm O:

$$J_p = \int_F r_i^2 dF$$

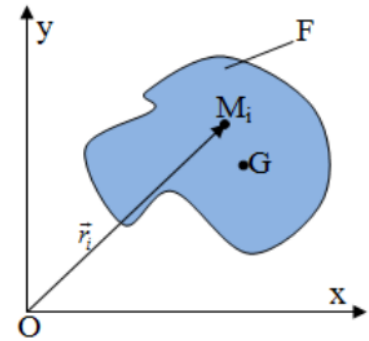
- **Mômen quán tính** của hình F đối với trục Ox, Oy:

$$J_x = \int_F y^2 dF; J_y = \int_F x^2 dF$$

- **Mômen quán tính ly tâm** đối với hệ trục Oxy: $J_{xy} = \int_F xy dF$

Nếu $J_{xy}=0$ thì hệ trục Oxy đc gọi là hệ trục qt chính.

Nếu hệ trục qt chính có gốc $O \equiv G$ thì đc gọi là hệ trục qt chính trung tâm.



*) Tính chất:

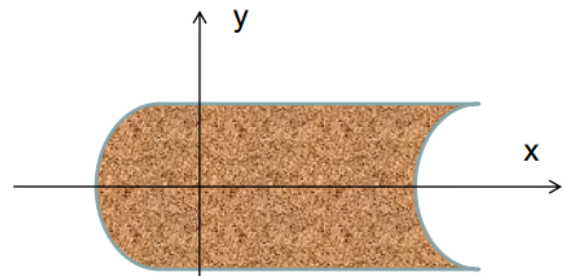
- Thứ nguyên của J là [chiều dài]⁴

- J_p, J_x, J_y luôn >0 , nhưng J_{xy} có thể $>0, =0, <0$.

- Hình có trục đối xứng thì trục đối xứng cùng với một trục vuông góc tạo nên hệ trục quán tính chính.

- Hình được gồm từ nhiều hình đơn giản thì tính J, S hình lớn bằng tổng từ các hình nhỏ:

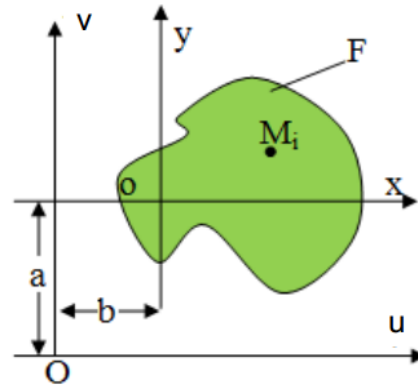
$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^n S_x^i & S_y &= \sum_{i=1}^n S_y^i \\ I_x &= \sum_{i=1}^n I_x^i & I_y &= \sum_{i=1}^n I_y^i \end{aligned}$$



4.3. Công thức chuyển trục song song

$$S_u = S_x + aF; S_v = S_y + bF$$

$$\begin{cases} J_u = J_x + 2bS_x + a^2F \\ J_v = J_y + 2aS_y + b^2F \\ J_{uv} = J_{xy} + aS_x + bS_y + abF \end{cases}$$



Nếu hệ ban đầu oxy có gốc o≡G trọng tâm:

$$\begin{cases} J_u = J_x + a^2F \\ J_v = J_y + b^2F \\ J_{uv} = J_{xy} + abF \end{cases}$$

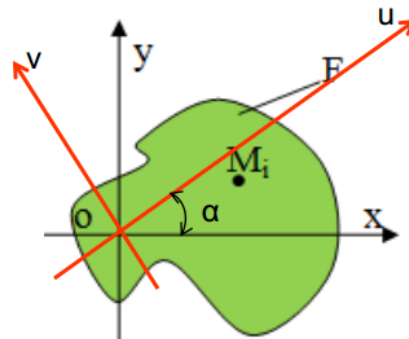
4.4. Công thức xoay trục

$$\begin{cases} u = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ v = y \cos \alpha - x \sin \alpha \end{cases}$$

$$S_u = \int_F v dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF = S_x \cos \alpha - S_y \sin \alpha$$

$$S_v = \int_F u dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha) dF = S_x \sin \alpha + S_y \cos \alpha$$

$$\begin{cases} J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_v = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{cases}$$



4.5. Đặc trưng hình học một số hình đơn giản

*) Hình chữ nhật:

$$J_x = \frac{ab^3}{12}; \quad J_y = \frac{ba^3}{12}$$

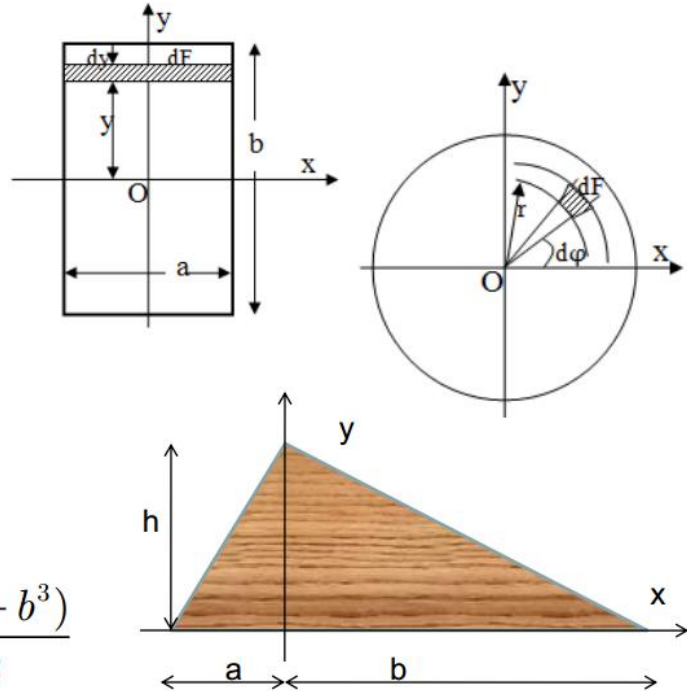
*) Hình tròn:

$$J_P = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

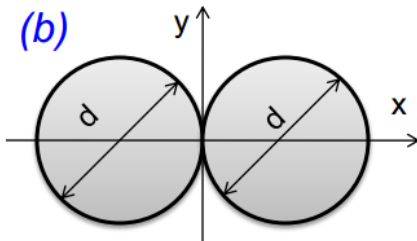
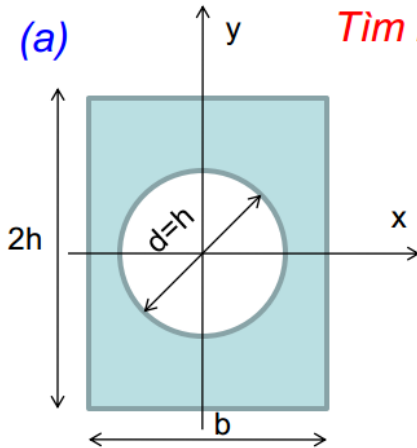
*) Hình tam giác:

$$J_x = \frac{(a+b)h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h(a^3 + b^3)}{12}$$

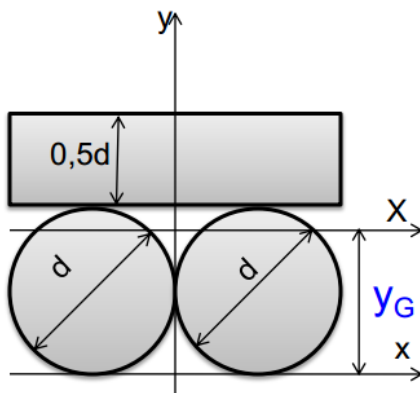


4.6. Ví dụ tìm đặc trưng hình học

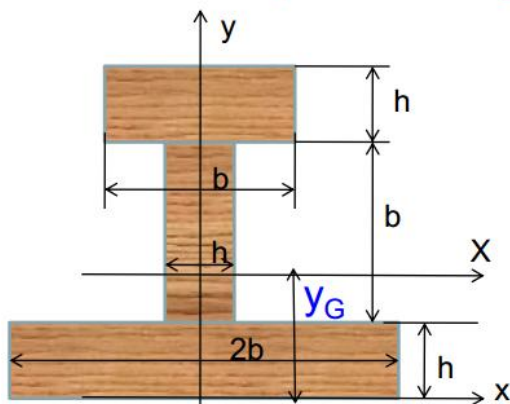
(a) *Tim mômen qt chính trung tâm J_x, J_y ?*



Tìm mômen qt chính trung tâm J_x, J_y ?

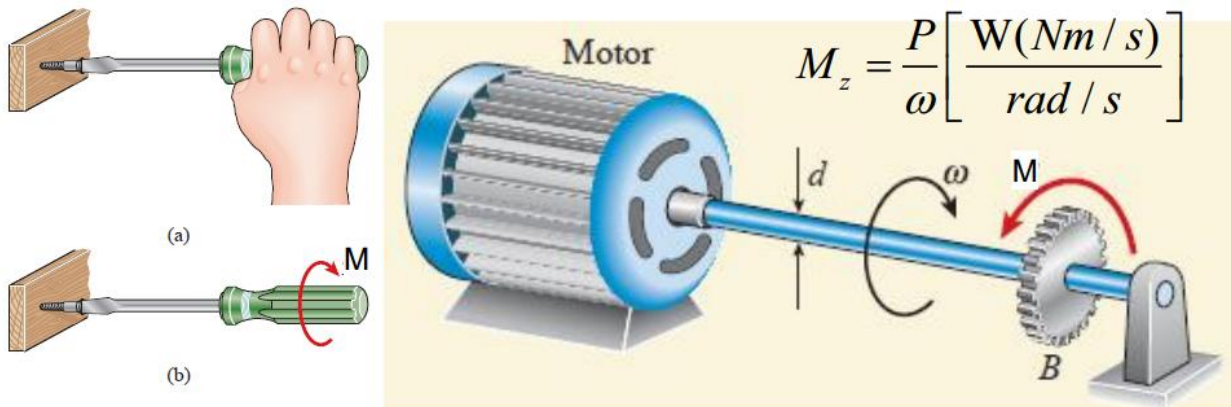


Tìm mômen qt chính trung tâm J_x, J_y ?

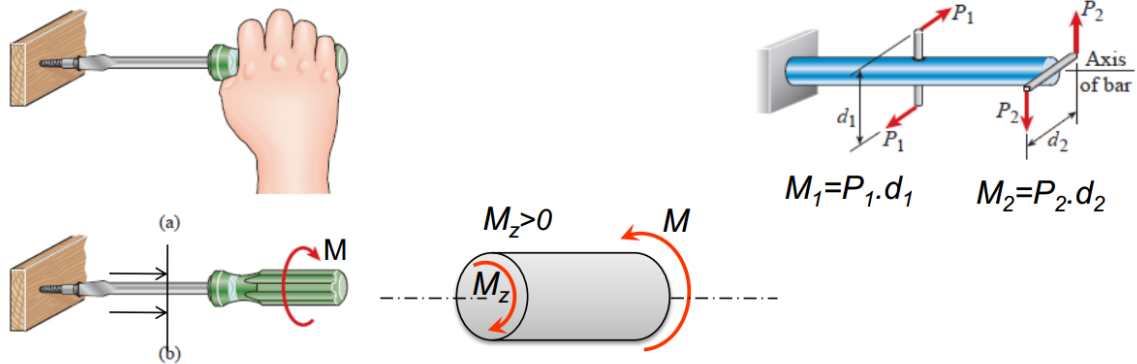


Chương 5

XOẮN THUẦN TÚY



5.0. Khái niệm – Biểu đồ mômen xoắn.



- Xoắn thuần túy là trường hợp thanh chịu lực mà trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có nội lực mômen xoắn M_z .
- Quy ước dấu: M_z mang dấu dương khi nhìn vào mặt cắt ngang thấy chiều M_z quay cùng chiều kim đồng hồ.
- Xoắn thuần túy xảy ra khi thanh chịu mômen hay ngẫu lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh.

*) Biểu đồ mômen xoắn: là đường biểu diễn sự biến thiên của mômen xoắn theo vị trí của mặt cắt trên trục.

- Xác định bằng phương pháp mặt cắt.

*) Ví dụ 1:

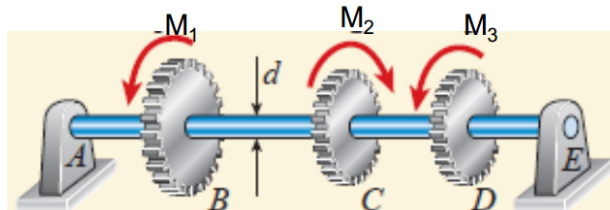
Cho trục AE có thể quay không ma sát quanh A, E.

$M_1 = 275 \text{ Nm}$, $M_2 = 450 \text{ Nm}$,

$M_3 = 175 \text{ Nm}$.

Vẽ biểu đồ mômen xoắn?

Tại đầu A và E mômen bằng bao nhiêu?



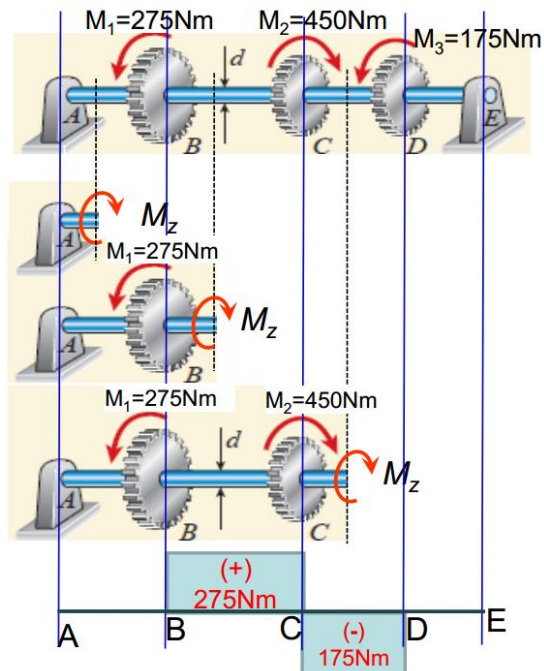
*) Nhận xét:

-

-

-

-

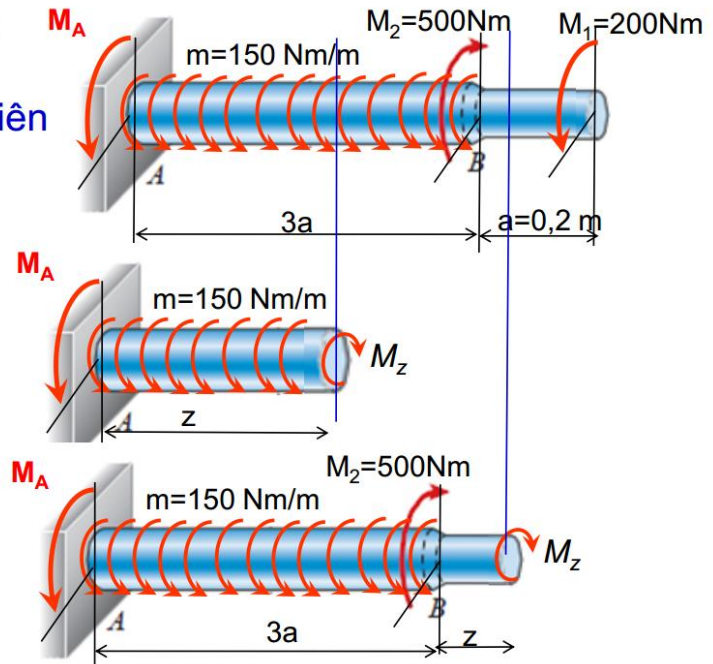


*) Biểu đồ mômen xoắn:

Ví dụ 2:

- Xác định phản lực liên kết tại ngàm:

$$M_A =$$

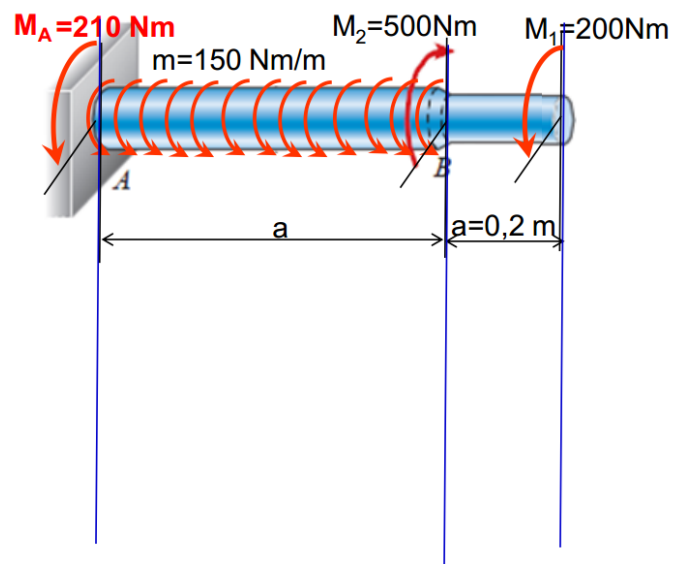


*) Biểu đồ mômen xoắn:

Ví dụ 2:

*) Nhận xét:

-
-
-

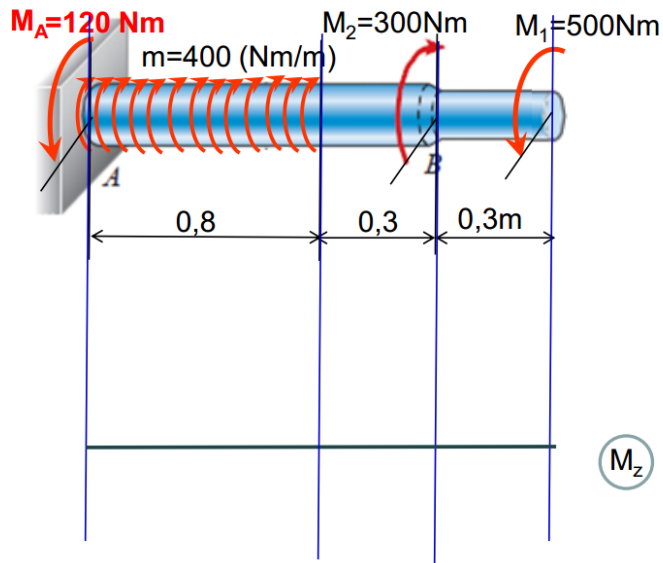


*) Biểu đồ mômen xoắn:

Ví dụ 3:

C1: Tính phức liên kết M_A
rồi vẽ theo chiều $\rightarrow$

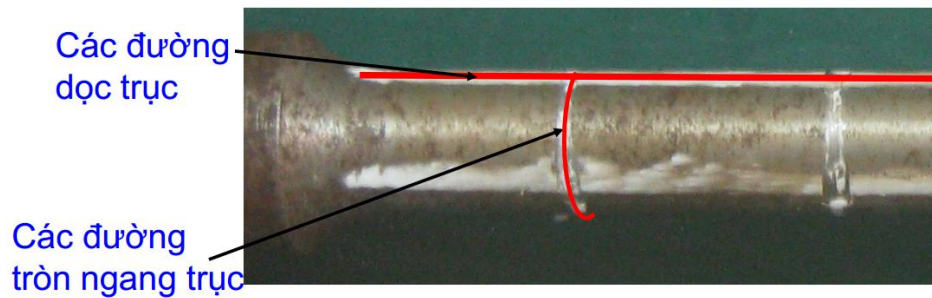
C2: Vẽ ngay từ đầu tự do
theo chiều $\leftarrow$ sẽ ko
cần tính phức liên kết.



XOẮN THUẦN TÚY THANH TRÒN

5.1.Thí nghiệm xoắn thuần túy thanh tròn

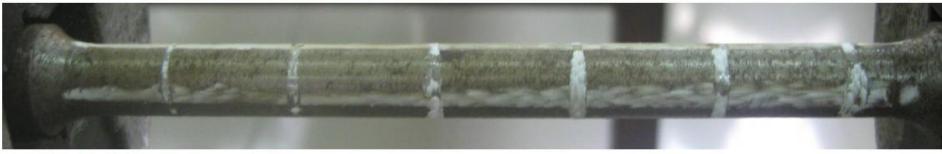
Mẫu thí nghiệm:



Kẹp mẫu vào mâm cặp:



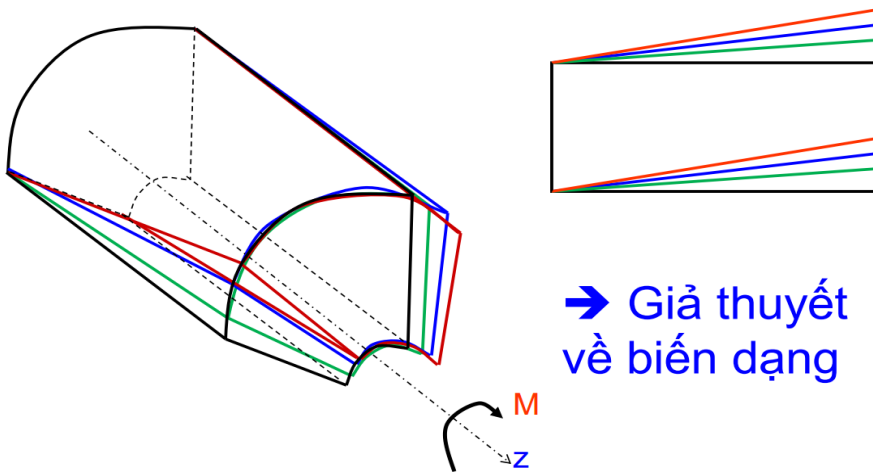
So sánh mẫu **TRƯỚC** thí nghiệm:



Và **SAU** thí nghiệm:



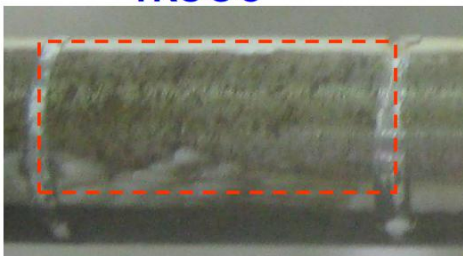
Mô tả quá trình biến dạng:



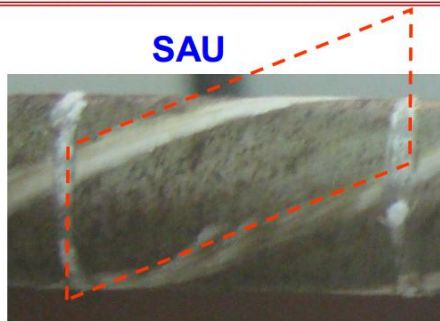
→ Giả thuyết về biến dạng

5.2. Giả thuyết về biến dạng khi xoắn thanh tròn

TRƯỚC



SAU

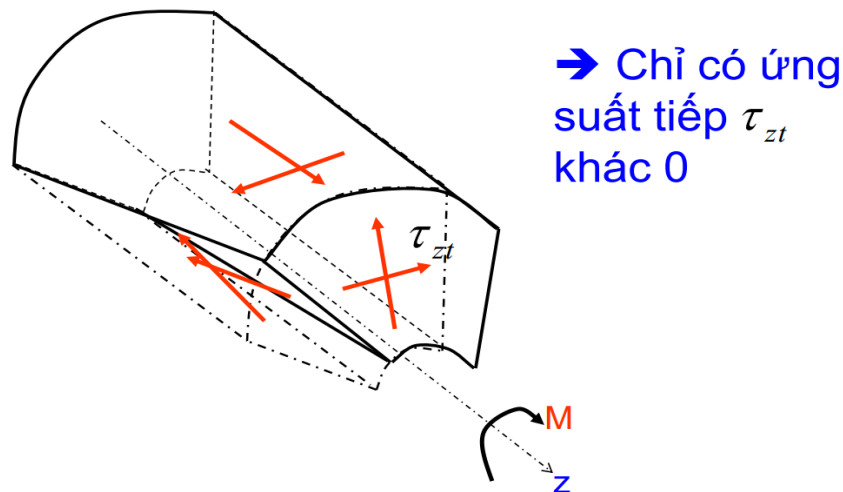
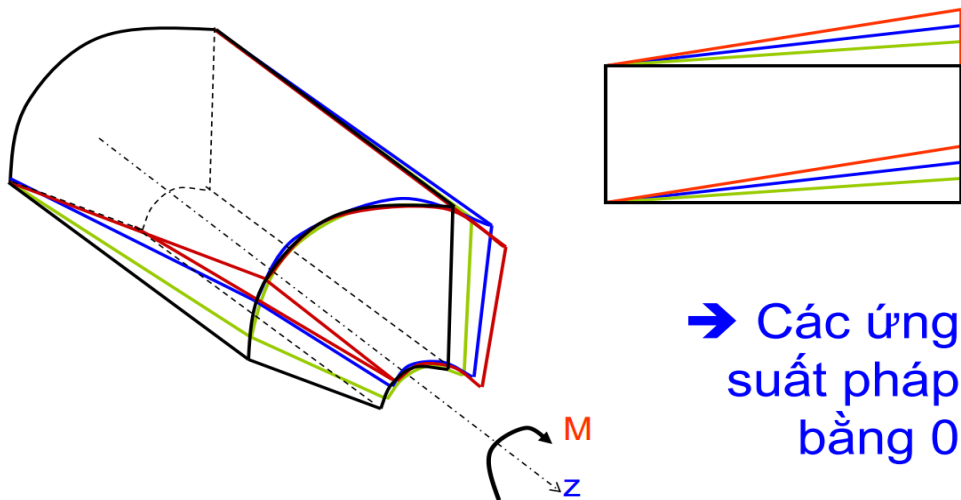


Giả thuyết về mặt cắt ngang: trước và sau khi chịu xoắn mặt cắt ngang luôn tròn, phẳng và vuông góc với trục của thanh. Khoảng cách giữa chúng không đổi.

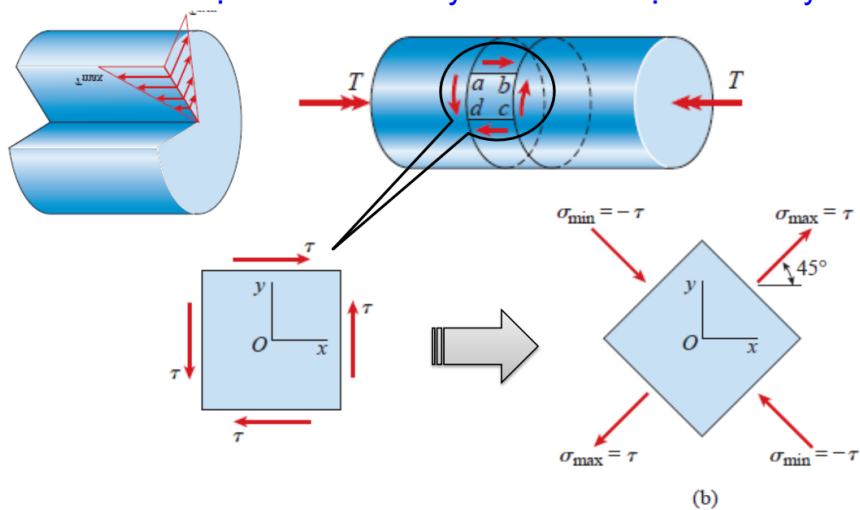
Giả thuyết về bán kính: trước và sau khi chịu xoắn bán kính tại mọi mặt cắt ngang không đổi.

5.3. Ứng suất khi thanh tròn chịu xoắn

Mô tả quá trình biến dạng:

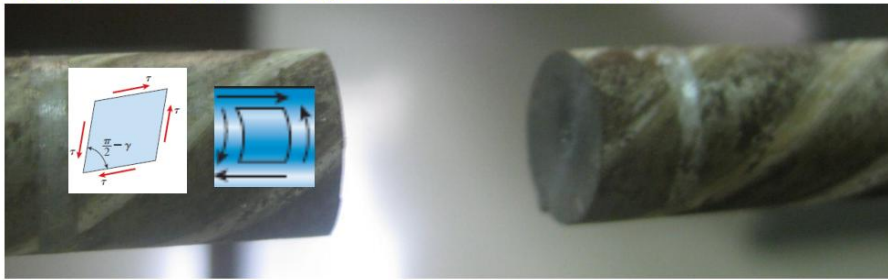


TTƯ'S của tổ chịu xoắn thuần túy là TTƯ'S trượt thuần túy.

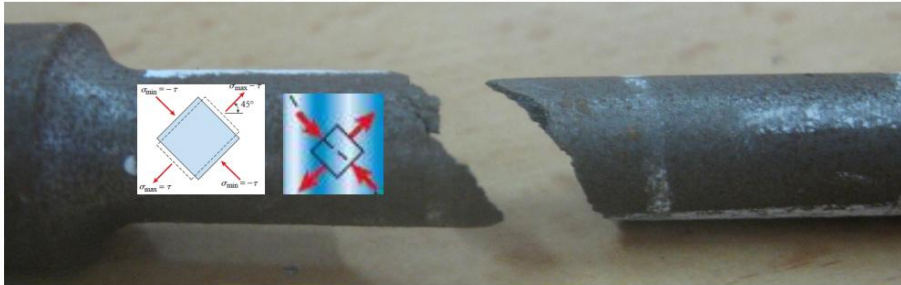


Hình dạng mẫu bị phá hủy khi chịu xoắn tới hạn:

Vật
liệu
DẼO

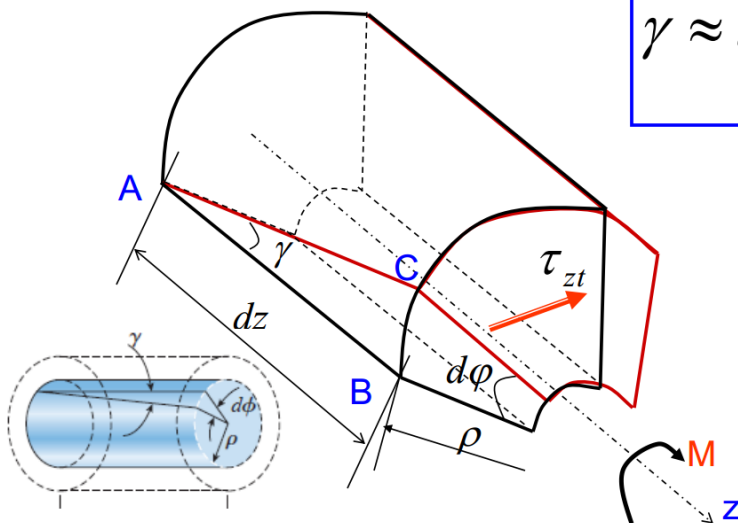


Vật
liệu
GIÒN



Tính τ_{zt}

$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$



Tính τ_{zt} :

Ta có: $\tau_{zt} = \gamma.G = \frac{\rho d\phi}{dz} G$

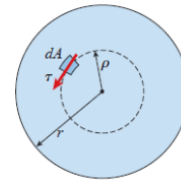
Mặt khác:

$$M_z = \int_F \tau_{zt} dF \cdot \rho = \int_F \frac{\rho d\phi}{dz} G dF \cdot \rho$$

$$= \frac{G d\phi}{dz} \underbrace{\int_F \rho^2 dF}_J = \frac{G d\phi}{dz} J_p$$

mômen quán tính độc cực của mcn. (J_p)

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p}$$



$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_p} \rho$$

ρ là bán kính tại điểm cần tính U'S tiếp.

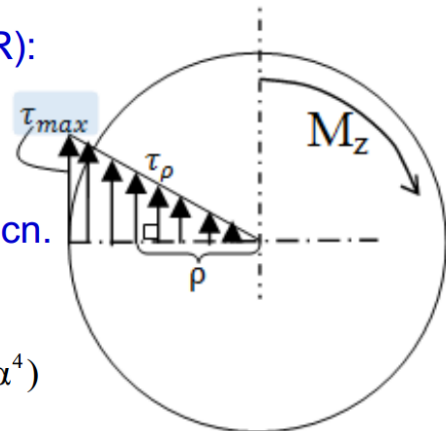
***) Biểu đồ ứng suất tiếp - ứng suất tiếp lớn nhất:**

ζ_ρ tỷ lệ thuận với ρ và có phương vuông góc với bán kính.

ζ_{max} tại các điểm nằm trên chu vi ($\rho=R$):

$$\tau_{max} = \tau_R = \frac{M_z}{J_p} R = \frac{M_z}{W_p}$$

$W_p = \frac{J_p}{R}$ là mômen chống xoắn của mcn.



$$\begin{cases} J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^4 (1 - \alpha^4) \\ W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16} = 0.2 D^3 (1 - \alpha^4) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

5.4. Biến dạng của thanh tròn chịu xoắn

Ta có: $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \Rightarrow d\varphi = \frac{M_z}{GJ_p} dz$

$$\Rightarrow \varphi = \int_l \frac{M_z}{GJ_p} dz \quad \begin{array}{l} GJ_p \text{ độ cứng khi xoắn.} \\ \varphi \text{ có đơn vị là radian.} \end{array}$$

Nxét: φ chính là diện tích biểu đồ M_z/GJ_p chiếu xuống trục z .

Nếu trên đoạn thanh có GJ_p và M_z const thì:

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p}$$

Nếu trên thanh gồm nhiều đoạn có GJ_p và M_z const thì:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_z l}{GJ_p} \right)_i$$

5.5. Điều kiện bền và điều kiện cứng thanh tròn chịu xoắn

***) Điều kiện bền:** $\max(|\tau|) = \max\left(\frac{|M_z|}{W_p}\right) \leq [\tau]$

Cách xác định ứng suất tiếp cho phép:

- Theo thí nghiệm: $[\tau] = \frac{\tau_0}{n}$

- Theo thuyết bền U'STLN: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$

- Theo thuyết bền TNBĐHD: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

***) Điều kiện cứng:**

$$\max(|\theta|) = \max\left(\frac{|M_z|}{GJ_p}\right) \leq [\theta] \quad \begin{array}{l} [\theta] \text{ có đơn vị là} \\ \text{radian/[chiều dài].} \end{array}$$

5.6. Các dạng bài toán cơ bản tính thanh tròn chịu xoắn

**) Bài toán kiểm tra: Mọi thông số đã cho, kiểm tra bền, cứng?*

$$\max(|\tau|) = \max\left(\frac{|M_z|}{W_p}\right) \leq [\tau]; \quad \max(|\theta|) = \max\left(\frac{|M_z|}{GJ_p}\right) \leq [\theta]$$

**) Bài toán thiết kế: Tìm thông số kích thước mcn?*

$$W_p \geq \frac{\max(|M_z|)}{[\tau]} \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{\max(|M_z|)}{0.2[\tau](1-\alpha^4)}} = [D]_1$$

Ta chọn:

$$J_p \geq \frac{\max(|M_z|)}{G[\theta]} \Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{\max(|M_z|)}{0.1[\theta](1-\alpha^4)G}} = [D]_2$$

$$D \geq \max([D]_1, [D]_2)$$

**) Bài toán tìm tải trọng cho phép: Biết vật liệu, kích thước mcn.*

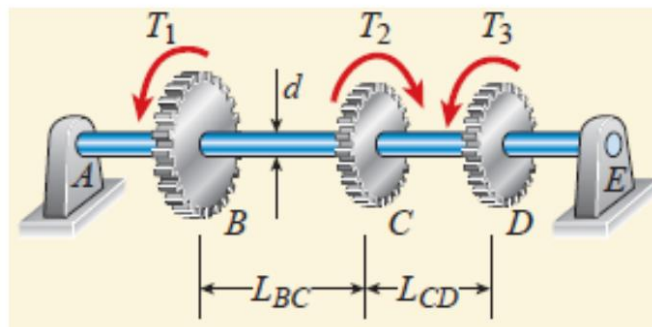
$$M_z \leq W_p [\tau] = [M_z]_1$$

$$M_z \leq GJ_p [\theta] = [M_z]_2$$

$$\Rightarrow M_z \leq \max([M_z]_1, [M_z]_2)$$

5.7. Ví dụ tính thanh tròn chịu xoắn

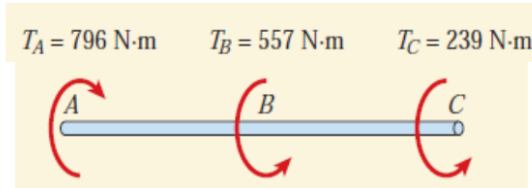
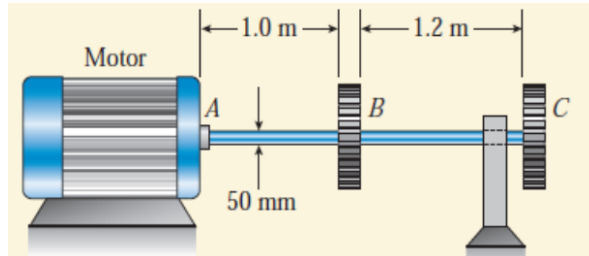
**) Ví dụ 1: Trục đường kính $d=30$ mm, quay ko ma sát quanh A, E. Tại C có mômen dẫn $T_2=450$ Nm, tại B và D có $T_1=275$ Nm and $T_3=175$ Nm, chiều dài $L_{BC}=500$ mm and $L_{CD}=400$ mm, modun $G=80$ GPa. Determine $\zeta_{\max}$ trên trục và góc xoắn tương đối φ_{BD} ?*



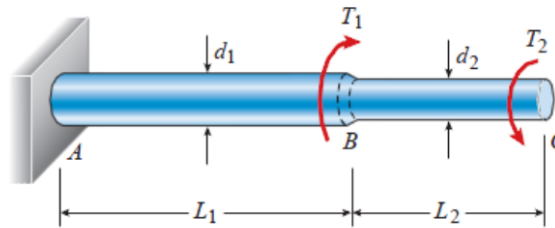
**) Giải ví dụ 1: để tìm $\zeta_{\max}$ trên trục ta áp dụng công thức:*

$$\max(|\tau|) = \max\left(\frac{|M_z|}{W_p}\right)$$

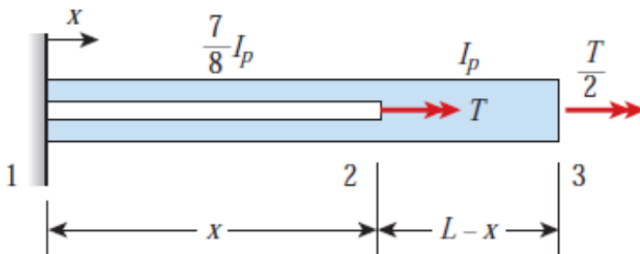
*) Ví dụ 2: Trục đường kính $d=50$ mm. Công suất động cơ truyền tại A là $P_A=50$ kW, tần số $f=10$ Hz. Bánh răng B và C yêu cầu công suất $P_B=35$ kW and $P_C=15$ kW, (Cho $G=80$ Pa.)
Determine $\zeta_{\max}$ trên trục và góc xoắn tương đối φ_{AC} ?



*) Ví dụ 3: Cho trục bậc ($d_1=30$ mm; $d_2=20$ mm) chịu xoắn bởi mômen $T_1= 500$ Nm, $T_2=200$ Nm, chiều dài $L_1=600$ mm and $L_2=400$ mm, modun $G = 80$ GPa.
Determine $\zeta_{\max}$ trên trục và góc xoắn φ_C tại đầu tự do C?

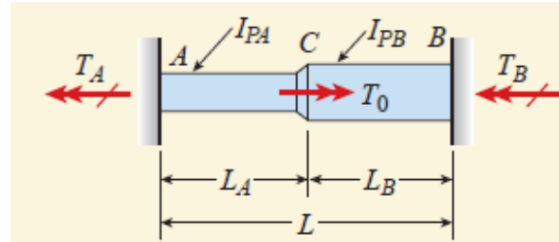
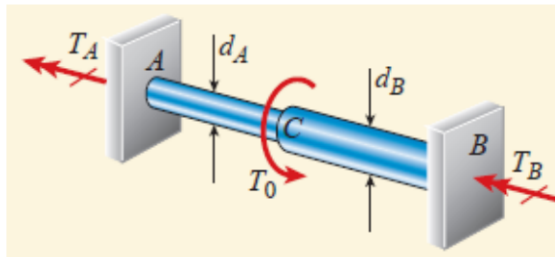


*) Ví dụ 4: Tìm x để góc xoắn tại đầu tự do $\varphi_3= TL/GJ_p$

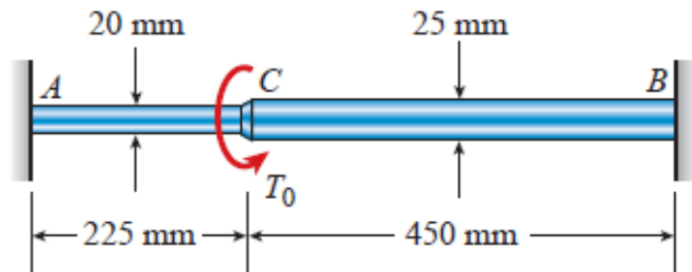


5.8. Ví dụ tính thanh tròn chịu xoắn siêu tĩnh

*) Ví dụ 5: Xđ góc xoắn tại C?

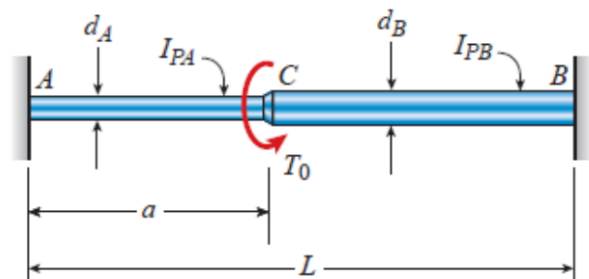


*) Ví dụ 6: Tìm T_0 để thanh đủ bền. Biết $[\zeta]=43\text{MPa}$.

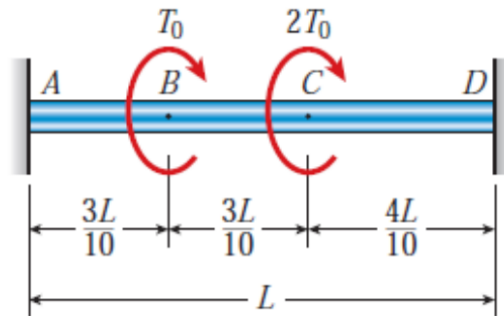


*) Ví dụ 7:

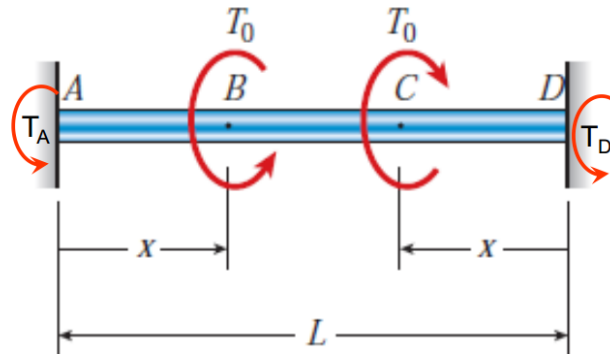
- Tìm a/L ? để nội lực M_z trên hai đoạn=nhau?
- Tìm a/L ? để U'S tiếp lớn nhất trên hai đoạn=nhau?



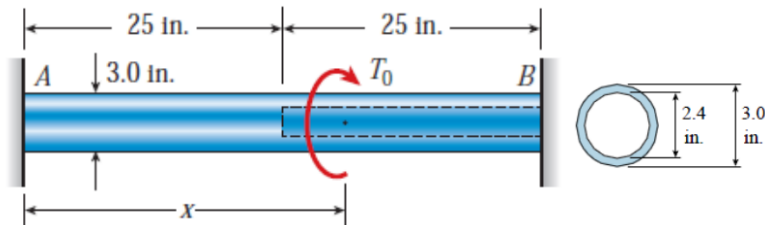
*) Ví dụ 8: Tìm góc xoắn lớn nhất trên trục.



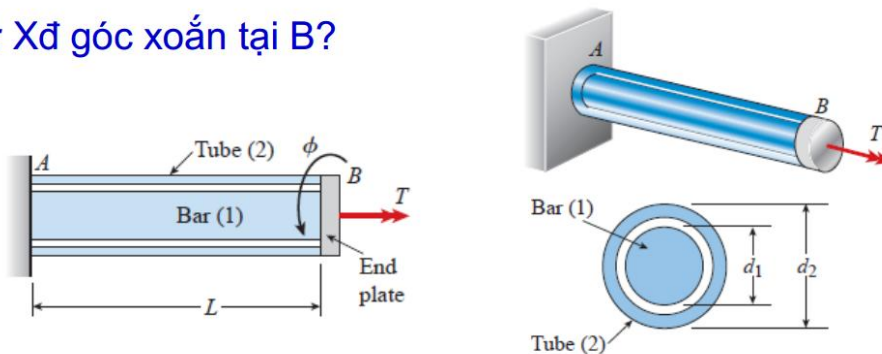
*) Ví dụ 9: Tìm x để góc xoắn tại B,C đạt max? Tìm max?

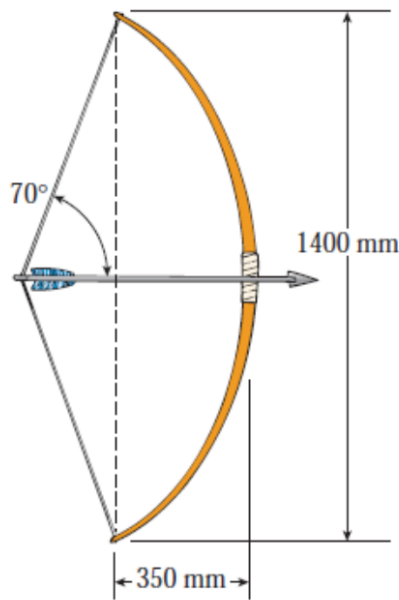


*) Ví dụ 10: Tìm x? để hai đầu ngàm có mômen liên kết = nhau?

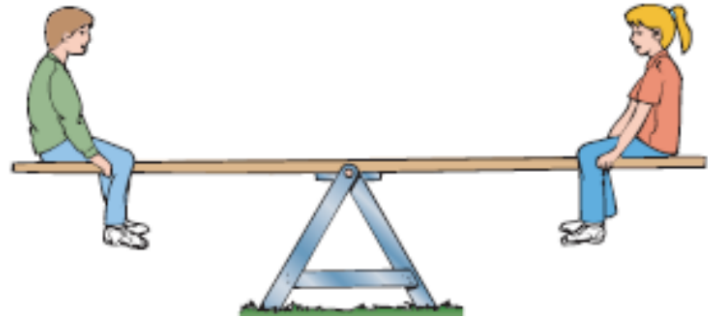


*) Ví dụ 11: Xđ góc xoắn tại B?

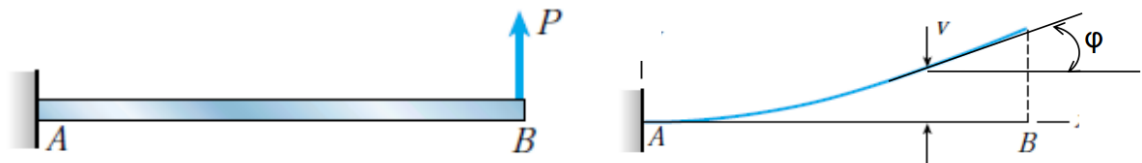




Chương 6 UỐN PHẪNG

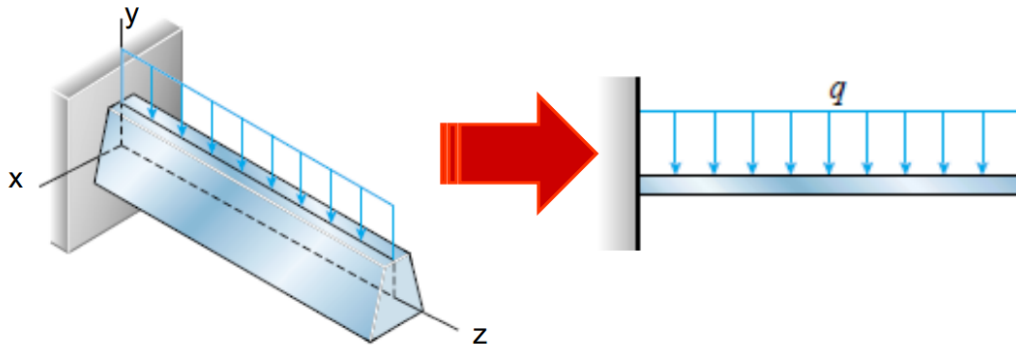


6.1. Khái niệm chung



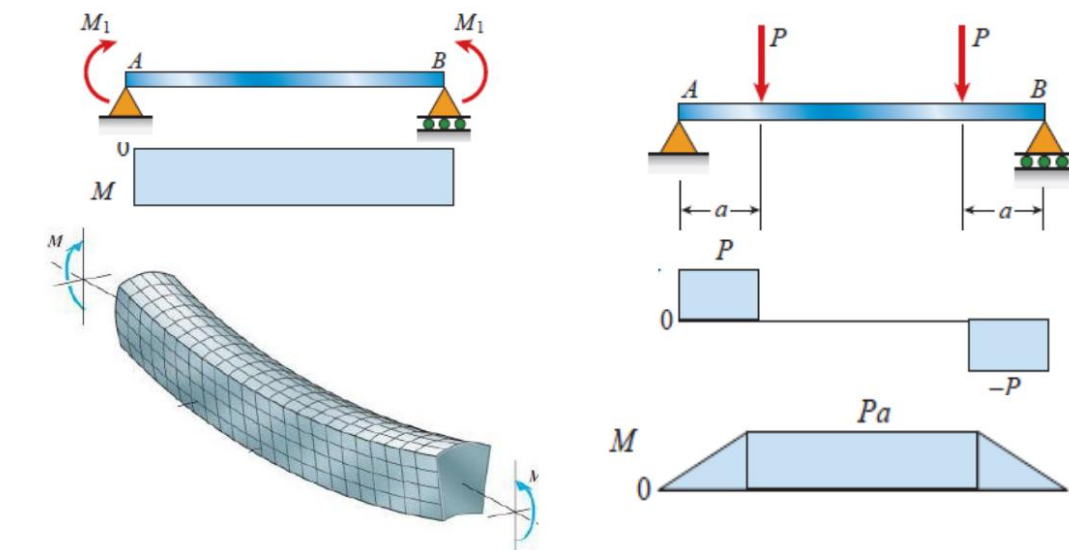
- Tải trọng tác dụng lên thanh, khiến thanh bị cong đi, ta nói thanh chịu **uốn**.
- Đg biểu diễn trục của thanh khi chịu uốn đc gọi là **đg đàn hồi**.
- K/c từ vị trí ban đầu của mỗi điểm trên trục tới vị trí điểm đó trên đường đàn hồi được gọi là **chuyển vị**.
- Góc tạo bởi tiếp tuyến của đg đàn hồi với đường nằm ngang được gọi là **góc xoay φ** . Xét chuyển vị bé ta có: $\varphi = y'$.
- Thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là **dầm**.

- Nội lực xuất hiện trong dầm tồn tại cả **lực cắt** và **mômen uốn**.
Nếu chỉ tồn tại mômen uốn ta gọi dầm chịu **uốn thuần túy**.
- Trong chương này ta chỉ quan tâm tới dầm có mặt phẳng đối xứng (Oyz) và các tải trọng tác động lên dầm đều thuộc mp đối xứng Oyz thì khi đó ta gọi đó là dầm chịu **uốn ngang phẳng**.
Mặt phẳng đối xứng chứa tải trọng khi đó đc gọi là **mp tải trọng**.



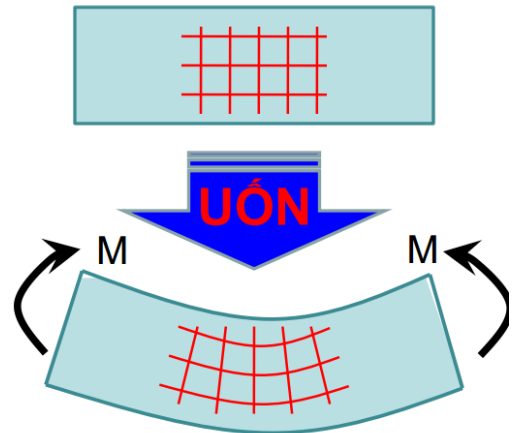
6.2. Uốn thuần túy

- Nội lực xuất hiện trong dầm chỉ tồn tại mômen uốn ta nói dầm chịu **uốn thuần túy**.



**) Thí nghiệm:*

- Xét một mẫu thanh chịu uốn thuần túy.
- Trước khi uốn: vạch lên mẫu các đường thẳng // và $\perp$ trục thanh.
- Quan sát mẫu sau khi uốn:
Đường // trục trở thành đường cong vẫn cùng // trục. k/c giữa chúng không đổi.
Đường $\perp$ trục thanh vẫn $\perp$.

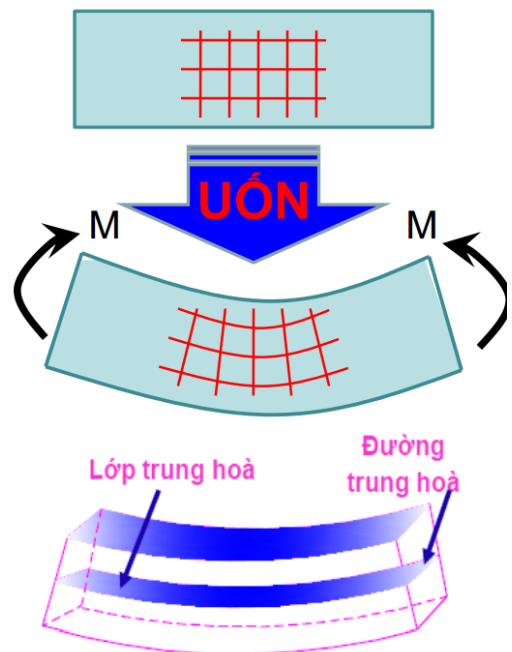


→ Giả thuyết về biến dạng:

- Mặt cắt ngang: luôn phẳng và $\perp$ với trục thanh.
 - Thớ dọc: luôn // trục thanh, ko chèn ép và ko tách xa nhau.
- Các góc vuông trước sau biến dạng vẫn vuông.

**) Quan hệ biến dạng:*

- Quan sát mẫu ta thấy có các thớ co lại, có thớ giãn ra, danh giới giữa hai vùng đó là một thớ ko bị biến dạng **→ thớ trung hòa**.
- Giao tuyến thớ trung hòa với mcn được gọi là **đường trung hòa**.
- Giả thiết biến dạng bé, ta coi các mcn vẫn phẳng.
- Vậy ta có thể tưởng tượng uốn thuần túy làm quay các mcn quanh đường trung hòa.



**) Quan hệ biến dạng:*

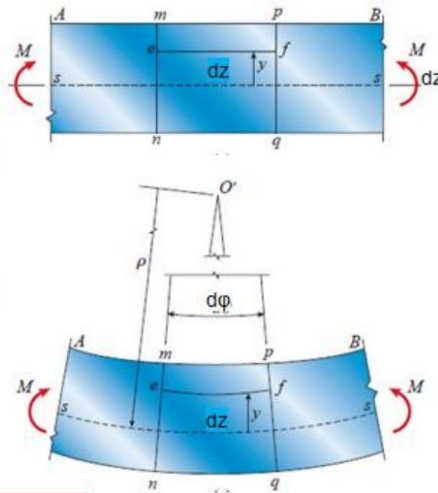
- Xét phân tố tạo bởi 2 mcn (mn-pq) sau khi chịu uốn thuần túy, chúng tạo với nhau góc $d\varphi$, bán kính cong ρ ta có:

$$\rho d\varphi = dz$$

- Xét thớ e-f có tung độ y so với trục trung hòa. sau biến dạng:

$$e'f' = dz = \rho d\varphi \xrightarrow{\text{Sau BD}} e'f' = (\rho + y) d\varphi$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = \frac{(\rho + y) d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}}$$



**) Ứng suất dầm chịu uốn thuần túy:*

- Từ giả thuyết rút ra từ thí nghiệm:
Các góc vuông sau BD vẫn vuông suy ra **không tồn tại ứng suất tiếp**.

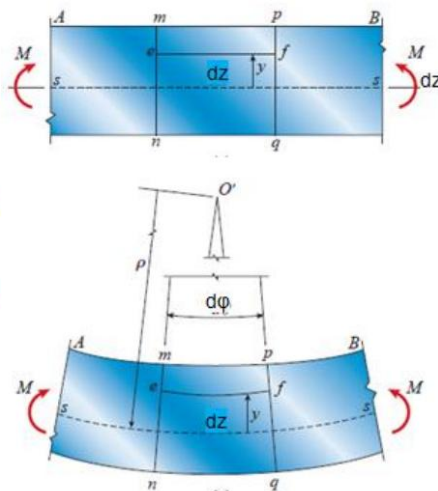
Các thớ tuy bị cong nhưng vẫn giữ k/c ko đổi với nhau $\rightarrow \sigma_y = 0$.

Chỉ còn lại $\sigma_z \neq 0 \rightarrow$ TTU'S phân tố chịu uốn thuần túy là **TTU'S đơn**.

**) Tìm σ_z . Ta có:*

$$M_x = \int_F y \sigma_z dF = \int_F E \varepsilon_z y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} J_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}} \Rightarrow \sigma_z = E \varepsilon_z = E \left(\frac{y}{\rho} \right) = E \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y}$$



**) Ứng suất dầm chịu uốn thuần túy:*

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

Trong đó:

M_x là mômen uốn, quy ước dấu “+” khi làm căng thớ dương và ngược lại.

y là tung độ của điểm đang xét tới trục trung hòa.

J_x là mômen quán tính của mcn với trục trung hòa Ox .

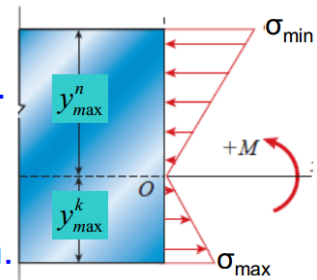
**) Ứng suất lớn nhất trên mcn:*

Ta nhận thấy σ_z là đường bậc nhất theo y .

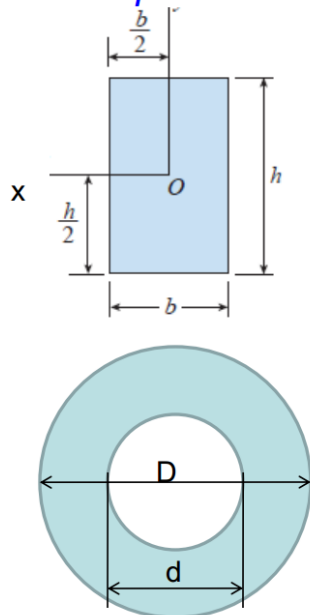
σ_z đạt min, max tại điểm xa trục trung hòa nhất.

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^n = \frac{M_x}{W_x^n} ; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^k = \frac{M_x}{W_x^k}$$

$W_x = \frac{y_{\max}}{J_x}$ được gọi là mômen chống uốn của mcn.



**) Mômen quán tính và mômen chống uốn của một số mcn:*



**) Vị trí đường trung hòa:*

Đường trung hòa tại đó $\sigma_z=0$. Ta có:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = \int_F \frac{M_x}{J_x} y dF = \frac{M_x}{J_x} \int_F y dF = 0$$

$$\Rightarrow \int_F y dF = S_x = 0$$

→ Đường trung hòa đi qua trọng tâm của mcn.

**) Kiểm tra bền:*

VL dẻo: $\max \{ \sigma_{z\max}, |\sigma_{z\min}| \} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$

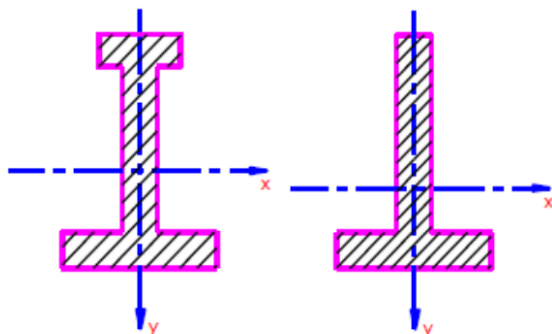
VL giòn: $\sigma_{z\max} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n}$

$$|\sigma_{z\min}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$$

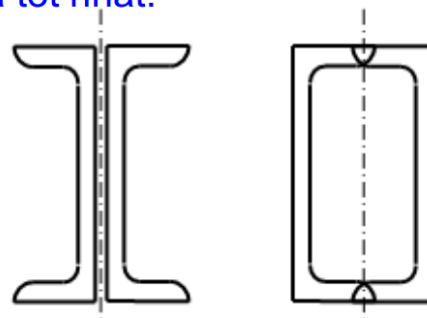
**) Mặt cắt ngang tiết kiệm vật liệu:*

Dựa trên công thức ứng suất dầm chịu uốn → các điểm càng xa đường trung hòa thì chịu ứng suất càng lớn.

Từ đây người ta thấy với cùng lượng vật liệu, nên đưa chúng ra xa đường trung hòa để có hiệu quả tốt nhất.

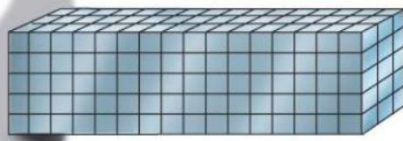


Vật liệu giòn

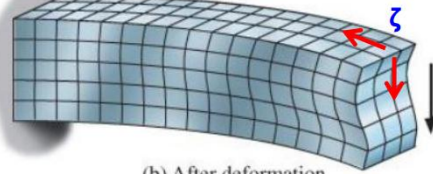


Vật liệu dẻo

6.3. Uốn ngang phẳng



(a) Before deformation



(b) After deformation

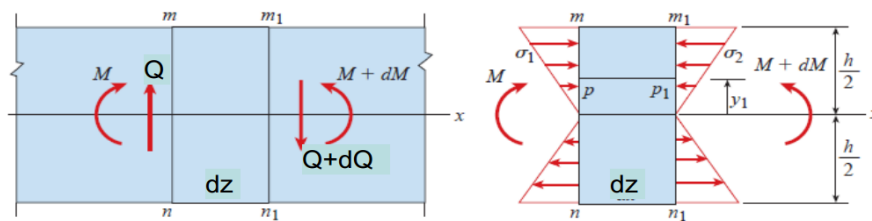
- Nội lực xuất hiện trong dầm bao gồm cả lực cắt Q_y và mômen uốn M_x ta nói dầm chịu **uốn ngang phẳng**.
- Lúc này ngoài U'S pháp:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

Còn có thêm cả ứng suất tiếp.

Tìm ứng suất tiếp bằng cách xét phân tố chiều dài dz .

- Xét phân tố theo phương ngang ta có các lực:

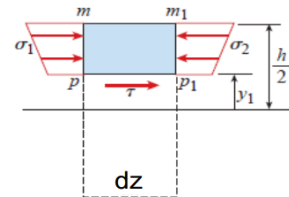


$$F_1 = \int_F \sigma_{z1} dF = \int_F \frac{M_x}{J_x} y dF$$

$$F_2 = \int_F \sigma_{z2} dF = \int_F \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF$$

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dz$$

$$\text{Phân tố CB} \rightarrow F_3 = F_2 - F_1$$



Ta có:

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dz = F_2 - F_1 = \int_F \frac{dM_x}{J_x} y dF$$

$$\Rightarrow \tau = \int_F \frac{dM_x}{dz \cdot b \cdot J_x} y dF = \int_F \frac{Q_y}{b \cdot J_x} y dF \Rightarrow \tau = \frac{Q_y S}{J_x \cdot b}$$

Trong đó:

Q là lực cắt trên mcn.

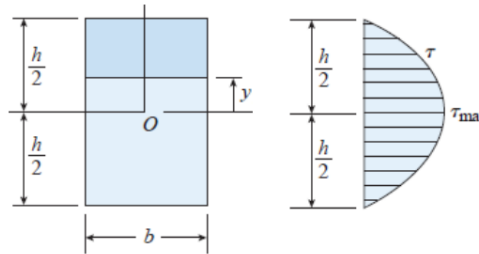
S là mômen tĩnh của diện tích cắt,

b là chiều dài cắt.

*) Ứng suất tiếp trên mcn hình chữ nhật:

$$\tau = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

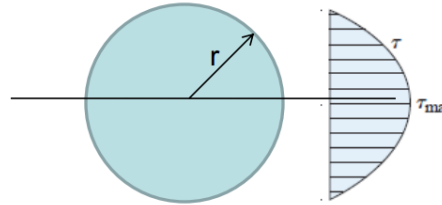
$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2F}$$



*) Ứng suất tiếp trên mcn hình tròn:

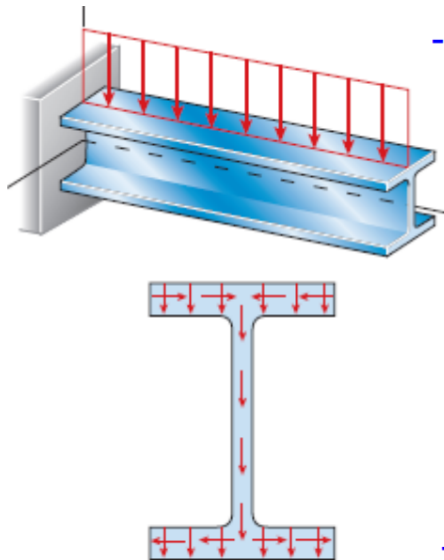
$$\tau = \frac{Q_y}{3J_x} (r^2 - y^2)$$

$$\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3F}$$

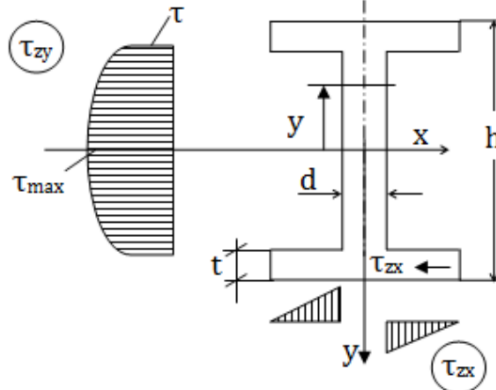


*) Mở rộng cho hình vành khăn: $\tau_{\max} = \frac{4Q_y}{3F} \left(\frac{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \right)$

*) Ứng suất tiếp trên mcn hình chữ I :

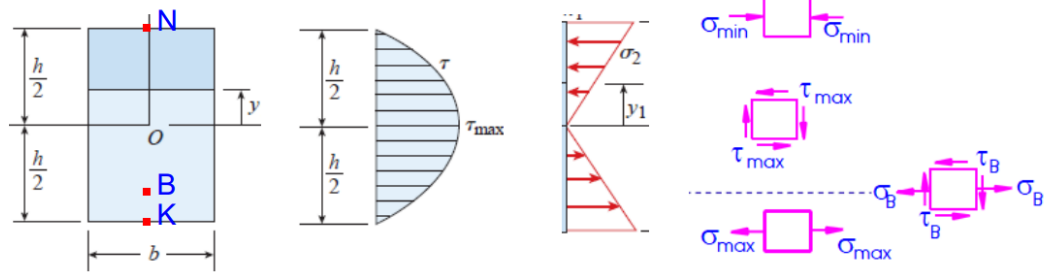


- Phần lòng hộp: $\tau_{zy} = \frac{Q_y (S_x - 0,5d.y^2)}{J_x d}$



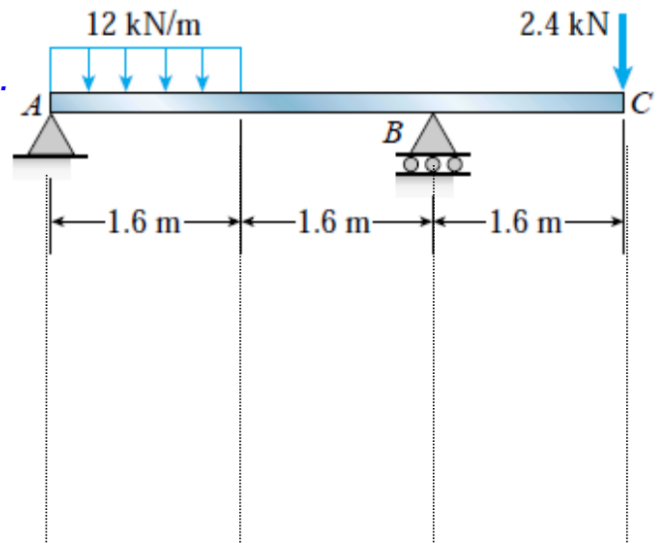
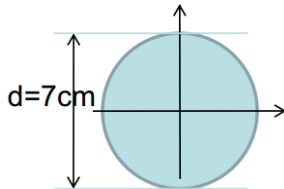
- Phần chân đế: $\tau_{zx} = \frac{Q_y (h - t)}{2J_x} x$

***) Kiểm tra bền dầm chịu uốn ngang phẳng :**



- Tại K, N: TTUS đơn: $\sigma_{\min} \leq [\sigma]_n; \sigma_{\max} \leq [\sigma]_k;$
- Tại O: TTUS trượt thuần túy: $\zeta \leq [\zeta]$
- Tại B: TTUS phẳng đặc biệt. Áp dụng các thuyết bền:
 - USTLN: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$
 - TNBĐHD: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

Ví dụ 1: Tìm $\sigma_{\max}$, $\zeta_{\max}$?
 Biết dầm mcn tròn, $d=7\text{cm}$.



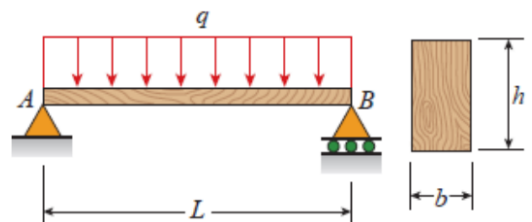
***) Ví dụ 2: Tìm $\sigma_{\max}$, $\zeta_{\max}$ trong dầm:**

$q=5,8 \text{ (kN/m)}$

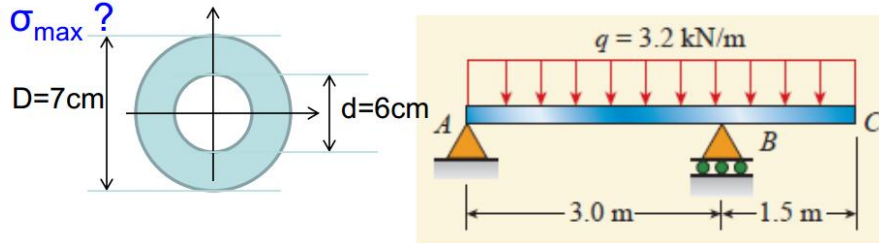
$L=4 \text{ (m)}$

$b=140 \text{ (mm)}$

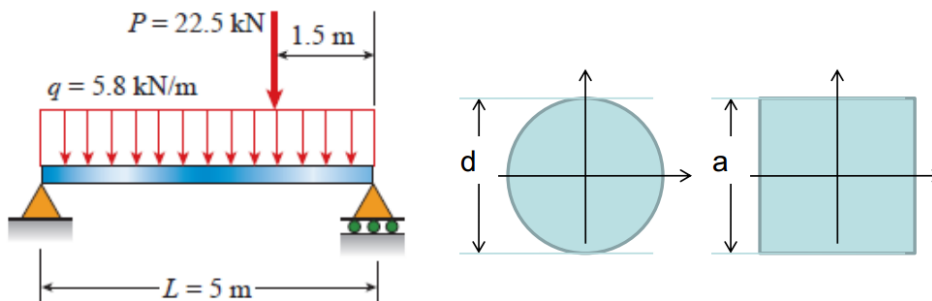
$h=240 \text{ (mm)}$



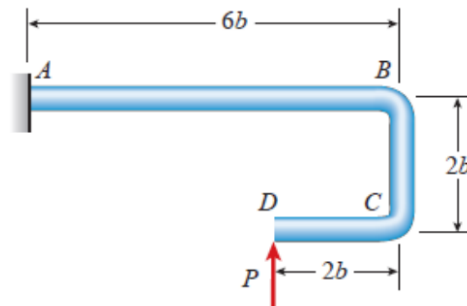
**) Ví dụ 3: Tìm $\sigma_{\max}$?*



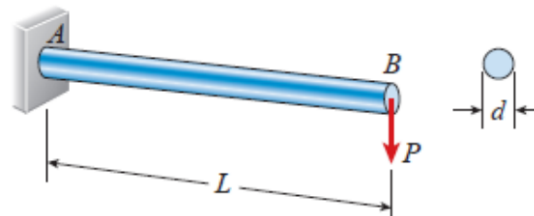
**) Ví dụ 4: Cho $[\sigma]=110$ Mpa. Hỏi $d=?$ hoặc $a=?$ để dầm đủ bền.
Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.*



**) Ví dụ 5: Khung ABCD có mcn tròn đường kính d. Chịu lực $P=40$ N. Hỏi $d=?$ để khung đủ bền.
Cho $[\sigma]=30$ Mpa. $b=37$ mm
Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.*



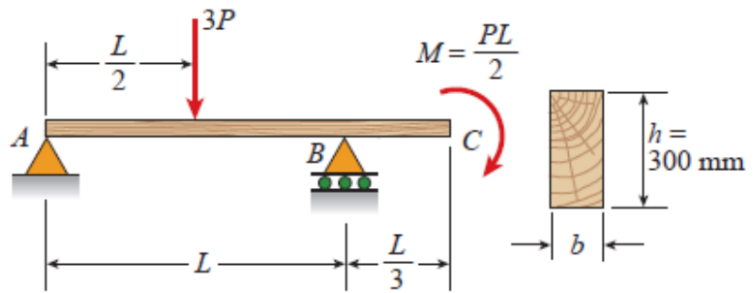
**) Ví dụ 6: Dầm AB chiều dài $L=450$ mm. Chịu lực $P=400$ N. Hỏi $d=?$ để dầm đủ bền.
Cho $[\sigma]=60$ Mpa.
Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt.*



*) Ví dụ 7: Cho $L=3,6(\text{m})$, $P=6(\text{kN})$. Tìm $[b]$?

a) Theo $[\sigma]=8,2 \text{ Mpa}$.

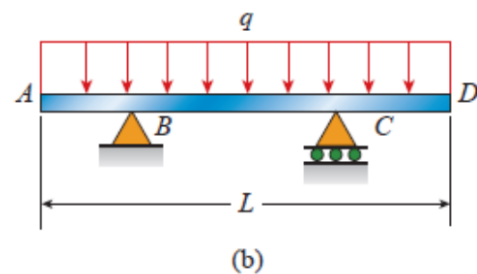
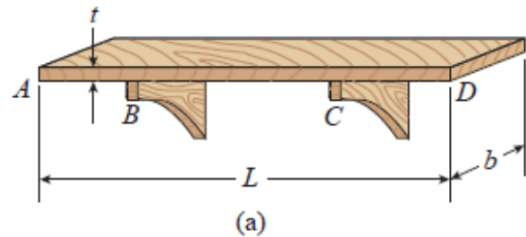
b) Theo $[\zeta]=0,7 \text{ Mpa}$.



*) Ví dụ 8: Cho $[\sigma]=7,5 \text{ Mpa}$. Tìm $[q]=?$ Bỏ qua a/h của lực cắt.

$L=915 \text{ mm}$; $t=22 \text{ mm}$; $b=305 \text{ mm}$

$BC=0,4L$.

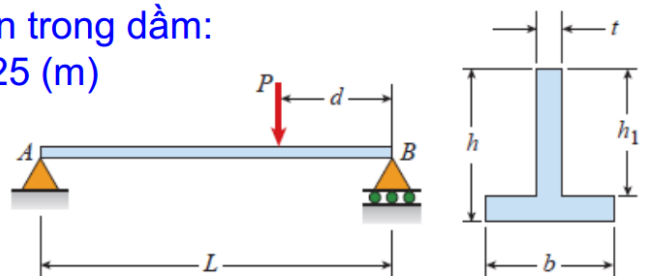


*) Ví dụ 9: Tìm $\sigma_{\max}$ kéo, nén trong dầm:

$P=6,2 \text{ (kN)}$, $L=3,2 \text{ (m)}$, $d=1,25 \text{ (m)}$

$b=80 \text{ (mm)}$, $t=25 \text{ (mm)}$

$h=120 \text{ (mm)}$, $h_1=90 \text{ (mm)}$



6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn

**) Phương trình vi phân của đường đàn hồi :*

Ta có:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Theo hình học vi phân ta có:

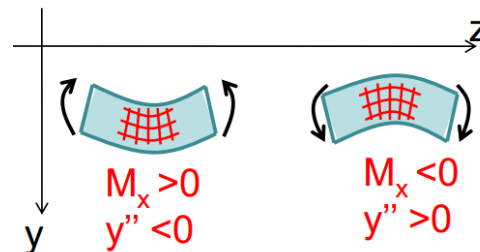
$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \right|$$

Bỏ qua VCB bậc cao ta có:

$$|y''| = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Ta thấy y'' luôn ngược dấu so với M_x nên suy ra:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \text{ là ptp đg đàn hồi.}$$



**) Một số phương pháp xác định ptp đường đàn hồi :*

- Phương pháp tích phân không định hạn.
- Phương pháp thông số ban đầu.
- Phương pháp hàm gián đoạn.
- Phương pháp vạn năng.

- Phương pháp mômen diện tích.
- Phương pháp dầm giả tạo.
- Phương pháp nhân biểu đồ vê-rê-sa-ghin.
- Phương pháp năng lượng.
- ...

***) Phương pháp tích phân không định hạn:**

Từ ptvp đg đàn hồi ta có:

$$y'' = \frac{-M_x}{EJ_x} \Rightarrow y' = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C$$

$$\Rightarrow \varphi = y' = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C$$

$$y = \int \left(-\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D$$

Các hằng số C, D được xác định thông qua điều kiện biên.

- Ngàm: chuyển vị, góc xoay bằng 0.

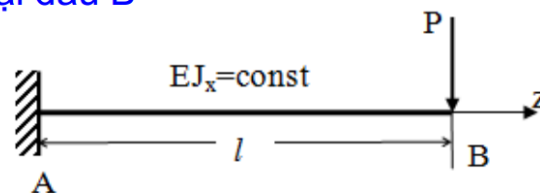
- Gối tựa: chuyển vị bằng không, góc xoay KHÁC 0.

Kết luận: Tìm biểu thức $M_x \rightarrow$ tích tích phân dựa trên đk biên.

Ví dụ 1: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu B

Mômen uốn:

Ptvp đg đàn hồi:



ĐK biên

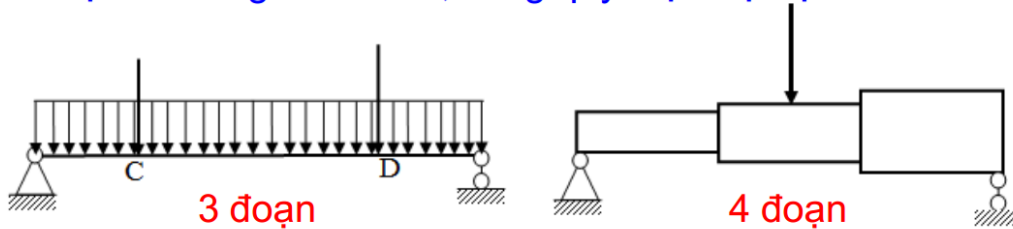
Góc xoay:

Độ võng:

***) Phương pháp thông số ban đầu:**

Nội dung của p² là xây dựng pt đg đàn hồi trên từng ĐOẠN.

Mỗi đoạn có cùng EJ=const, cùng quy luật chịu lực.



-Mỗi đoạn sẽ khác nhau một biểu thức $\Delta y(z)$:

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y(z)$$

Khai triển Taylor của $\Delta y(z)$:

$$\Delta y(z) = \Delta y(a) + \frac{\Delta y'(a)}{1!} (z - a) + \frac{\Delta y''(a)}{2!} (z - a)^2 + \frac{\Delta y'''(a)}{3!} (z - a)^3 + \dots$$

Trong đó:

$\Delta y(a)$, $\Delta y'(a)$ là bước nhảy của độ võng, góc xoay tại $z=a$.

(*Dầm thông thường là liên tục nên $\Delta y(a) = \Delta y'(a) = 0$*).

$$\Delta y''(a) = \frac{M_n(a)}{E_n J_n} - \frac{M_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \quad \Delta y^{(4)}(a) = \frac{q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}}$$

$$\Delta y'''(a) = \frac{Q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{Q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \quad \Delta y^{(5)}(a) = \frac{q'_n(a)}{E_n J_n} - \frac{q'_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}}$$

Thay vào ta có:

$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a (z - a) + \frac{1}{2!} \left[\frac{M_n(a)}{E_n J_n} - \frac{M_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \right] (z - a)^2 + \frac{1}{3!} \left[\frac{Q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{Q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \right] (z - a)^3 + \frac{1}{4!} \left[\frac{q_n(a)}{E_n J_n} - \frac{q_{n+1}(a)}{E_{n+1} J_{n+1}} \right] (z - a)^4 + \dots$$

Với:

$$y_1(z) = y_0 + y_0'z + \frac{1}{2!} \left[-\frac{M_0}{E_1 J_1} \right] z^2 + \frac{1}{3!} \left[-\frac{Q_0}{E_1 J_1} \right] z^3 + \frac{1}{4!} \left[-\frac{q_0}{E_1 J_1} \right] z^4 + \frac{1}{5!} \left[-\frac{q_0'}{E_1 J_1} \right] z^5 + \dots$$

Trong đó: $y_0, y_0', M_0, Q_0, q_0, q_0'$ được gọi là thông số ban đầu.

Đặc biệt với dầm có EJ không đổi:

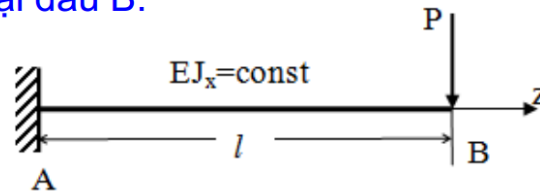
$$y_{n+1}(z) = y_n(z) + \Delta y_a + \Delta y_a'(z-a) - \frac{\Delta M_{n+1}}{EJ.2!} (z-a)^2 - \frac{\Delta Q_{n+1}}{EJ.3!} (z-a)^3 - \frac{\Delta q_{n+1}}{EJ.4!} (z-a)^4 + \dots$$

Trong đó: $\Delta M, \Delta Q, \Delta q, \Delta q'$ là bước nhảy tại mcn đang xét.

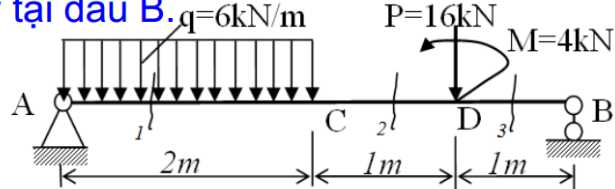
Chú ý: lực hướng lên là dương, mômen clockwise là dương.

Kết luận: Chia đoạn $\rightarrow$ xác định thông số tại đầu mỗi đoạn.
 $\rightarrow$ áp dụng công thức.

Ví dụ 2: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu B.



Ví dụ 3: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu B.



Thông số ban đầu các đoạn:

Đoạn 1 (z=0)	Đoạn 2 (z=2)	Đoạn 3 (z=3)

$$y_1(z) =$$

$$y_2(z) =$$

$$y_3(z) =$$

$$\Rightarrow y_3(z) =$$

***) Phương pháp hàm gián đoạn:**

Mục tiêu của pp là xây dựng biểu thức mômen uốn M_x cho toàn dầm. Dựa trên hàm gián đoạn:

$$\langle z - a \rangle^n = \begin{cases} (z - a)^n & \text{ khi } z > a \\ 0 & \text{ khi } z \leq a \end{cases}$$

Từ đây ta có thể:

→ Xây dựng một hàm duy nhất cho toàn dầm.

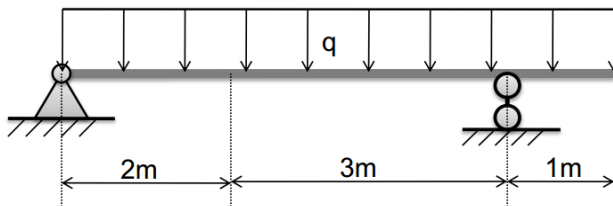
→ Dễ dàng tìm đc biểu thức mômen uốn M_x từ việc tích phân phân từ biểu thức $q(z)$. (Hạn chế của pp tích phân ko định hạn)

→ Chỉ cần tích phân hai lần để tìm độ võng.

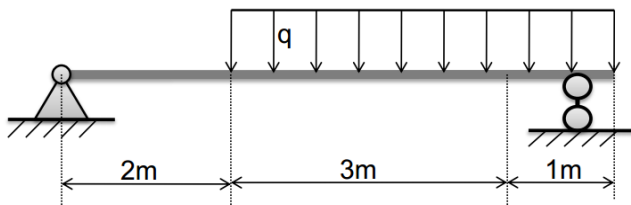
Nhược điểm: chỉ áp dụng cho dầm với EJ không đổi.

Chú ý: lực hướng lên mang dấu dương, mômen clockwise mang dấu dương. Ngược lại mang dấu âm.

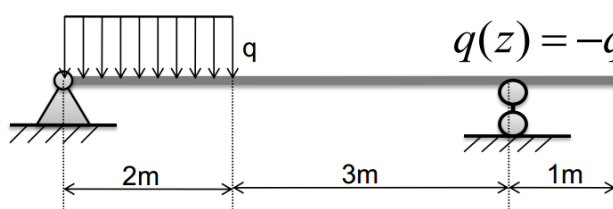
→ Xây dựng một hàm duy nhất cho toàn dầm:



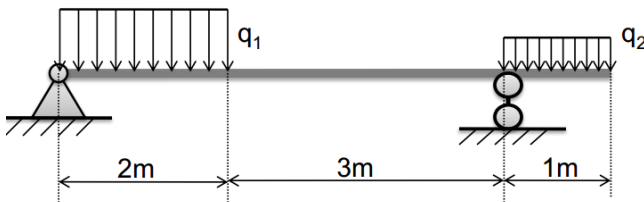
$$q(z) = -q$$



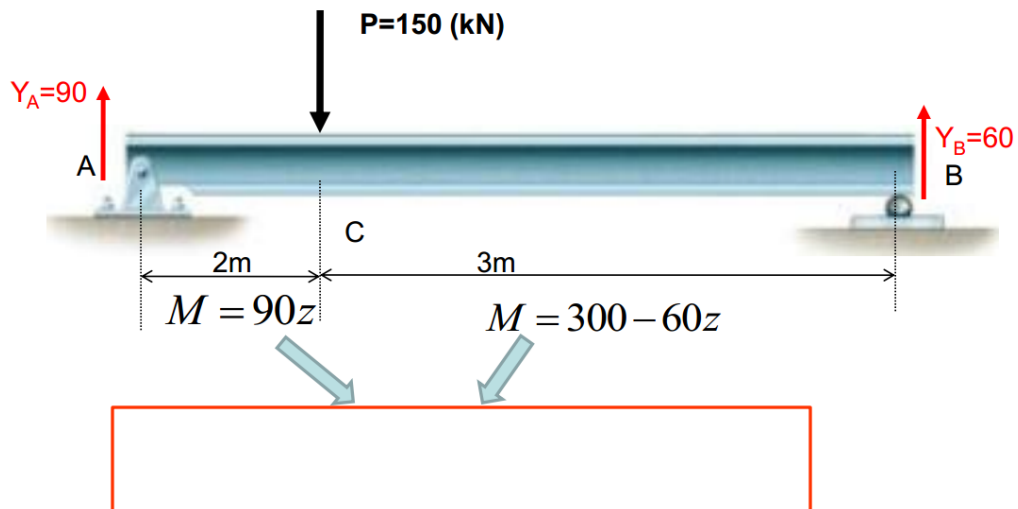
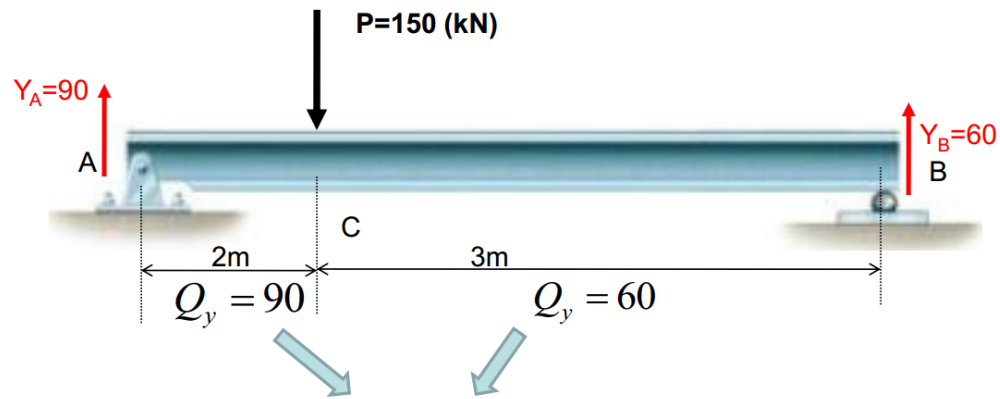
$$q(z) = -q \langle z - 2 \rangle^0$$



$$q(z) = -q \langle z - 0 \rangle^0 + q \langle z - 2 \rangle^0$$



$$q(z) = -q_1 \langle z - 0 \rangle^0 + q_1 \langle z - 2 \rangle^0 - q_2 \langle z - 5 \rangle^0$$



→ Tìm biểu thức $M_x(z)$:

- Tìm biểu thức $q(z)$ trên toàn dầm.
- Tích phân $q(z)$ cộng với lực tập trung cho ra $Q_y(z)$.
- Tích phân $Q_y(z)$ cộng với mômen tập trung cho ra $M_x(z)$.

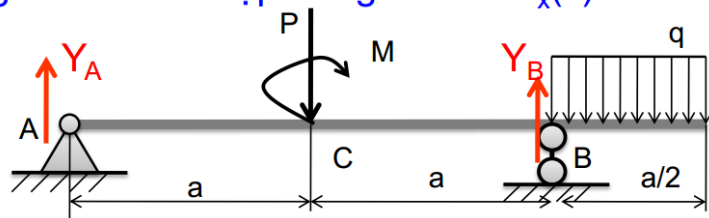
$$q(z) = -q \langle z - 2a \rangle^0$$



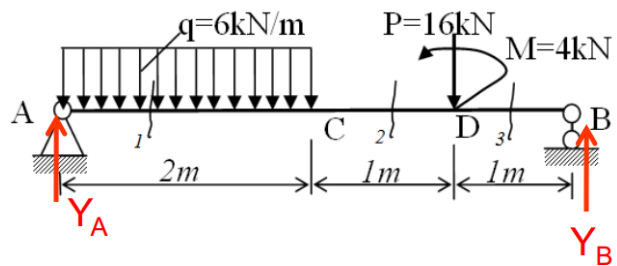
$$Q_y(z) = -q \langle z - 2a \rangle^1 + Y_A \langle z - 0 \rangle^0 - P \langle z - a \rangle^0 + Y_B \langle z - 2a \rangle^0$$



$$M_x(z) = -\frac{q}{2} \langle z - 2a \rangle^2 + Y_A \langle z - 0 \rangle^1 - P \langle z - a \rangle^1 + Y_B \langle z - 2a \rangle^1 + M \langle z - a \rangle^0$$



Ví dụ 4: Tìm $y(z)$, $\phi(z)$?



***) Phương pháp dầm giả tạo:**

Dựa trên mqh giữa độ võng, góc xoay và mômen uốn:

$$\frac{d\varphi}{dz} = y'' = \frac{-M_x}{EJ_x} \quad ; \quad \frac{dy}{dz} = \varphi$$

và mqh giữa nội lực và lực phân bố:

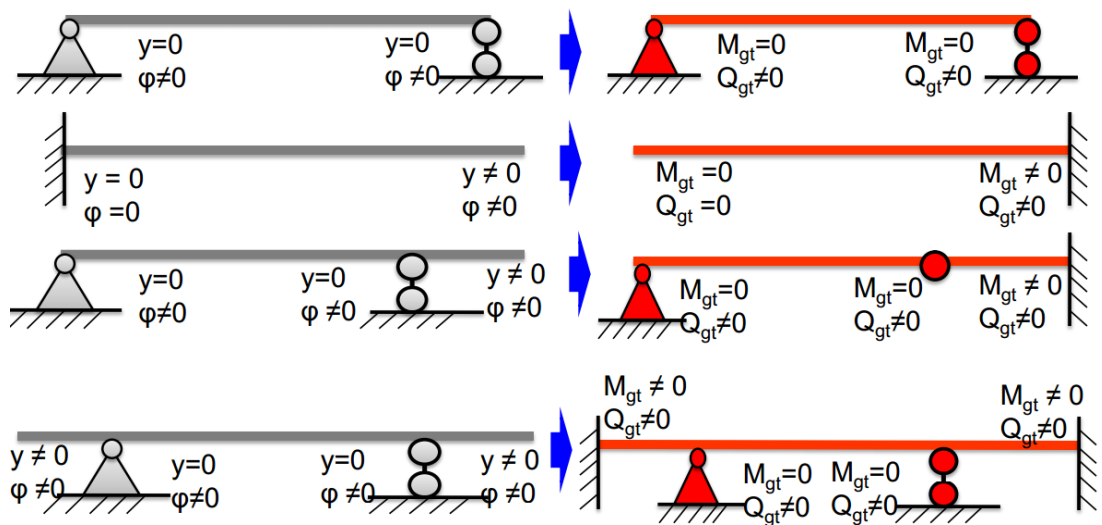
$$\frac{dQ_y}{dz} = q \quad ; \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

Từ đây người ta đưa ra ý tưởng, nếu tạo ngoại lực giả tạo:

$$q_{gt} = \frac{-M_x}{EJ_x} \Rightarrow \varphi = Q_{gt} \quad ; \quad y = M_{gt}$$

Liên kết của dầm giả tạo → được xử thông qua điều kiện biên.
Như vậy ta có thể áp dụng phương pháp mặt cắt quen thuộc để tìm độ võng, góc xoay của dầm.

Một số liên kết trong dầm giả tạo suy ra từ ĐK biên (dầm thực)

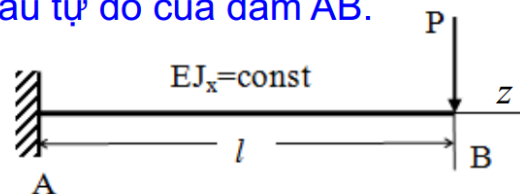


Ví dụ 5: Tìm độ võng, góc xoay tại đầu tự do của dầm AB.

Muốn tìm độ võng góc xoay tại đầu

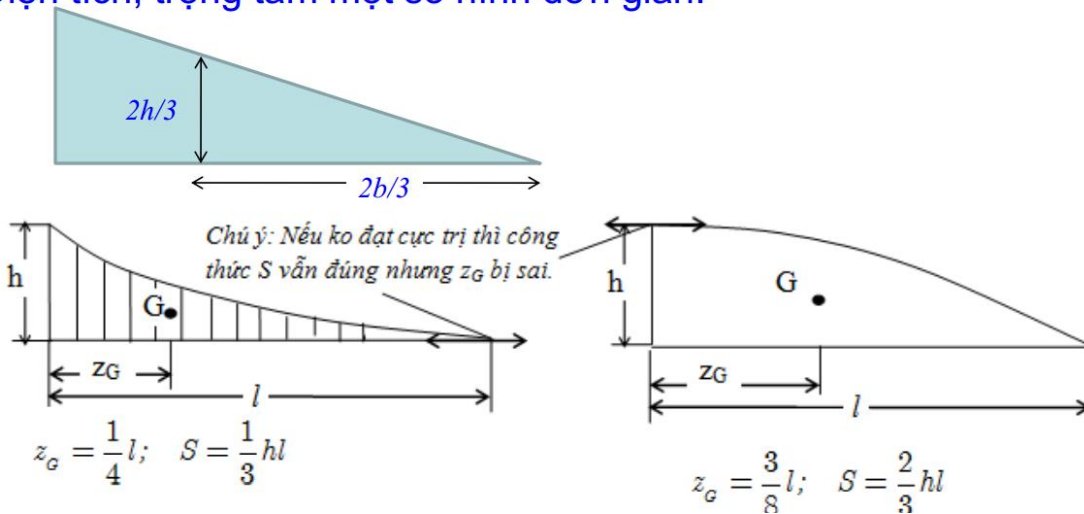
ta cắt mặt cắt tại đó rồi tìm nội lực

Q_{gt} , M_{gt} .



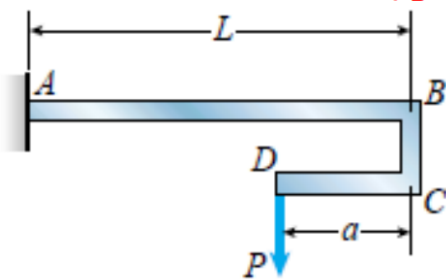
Nhược điểm: chỉ có lợi thế khi biểu đồ mômen M_x dễ tính diện tích và tìm trọng tâm.

Diện tích, trọng tâm một số hình đơn giản:



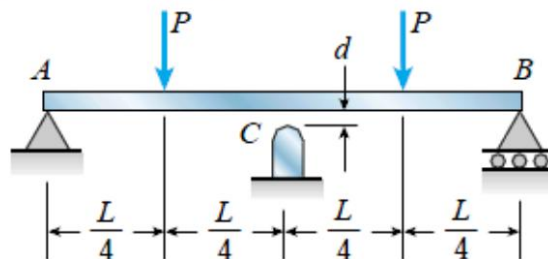
6.5. Ví dụ tính chuyển vị của dầm chịu uốn

**) Ví dụ 1 :* $a/L=?$ Để $y_B=0$

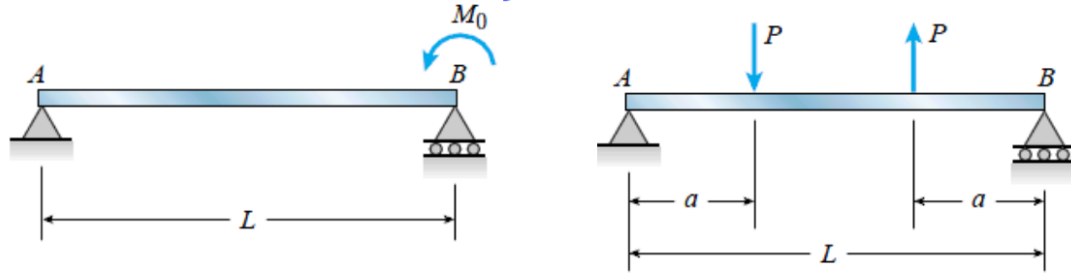


**) Ví dụ 2:*

Assuming that $d = 10^{-3}$ mm, $L = 6$ m, $E = 200$ GPa, and $I = 198 \times 10^6$ mm⁴, calculate the magnitude of the loads P so that the beam just touches the support at C .

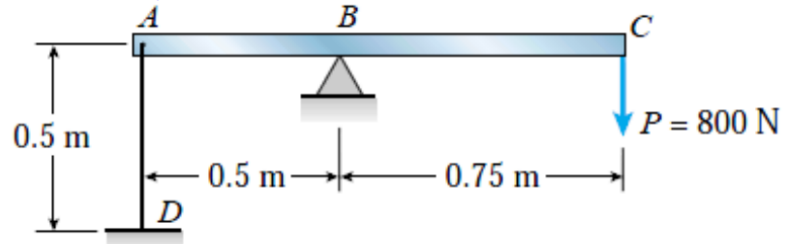


*) Ví dụ 3 : Tìm chuyển vị tại giữa dầm.

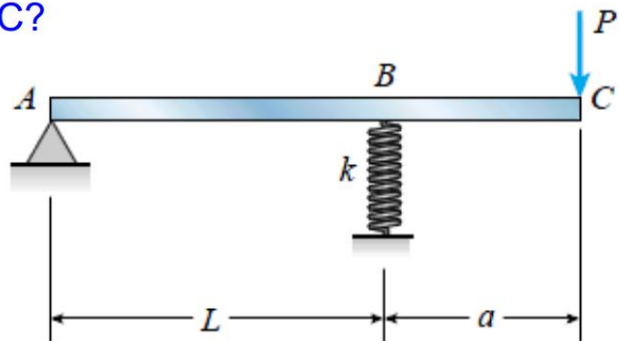


*) Ví dụ 4: tìm chuyển vị tại C?

Biết thanh AD có $EI=900\text{kN}$, dầm AC có $EJ=75\text{kNm}^2$.



*) Ví dụ 5: tìm chuyển vị tại C?



*) Ví dụ 6: tìm chuyển vị tại D? góc xoay tại B

