BỘ NÔNG NGHIỆP & PHÁT TRIỂN NÔNG THÔN

**CS2 - TRƯỜNG ĐẠI HỌC LÂM NGHIỆP**



**BÀI GIẢNG**

**CÁC PHƯƠNG PHÁP XỬ LÝ SỐ LIỆU TRONG ĐO ĐẠC**

**Biên soạn: ĐẶNG THỊ LAN ANH**

**ĐỒNG NAI - 2013**

**CHƯƠNG I. LÝ THUYẾT CƠ BẢN VỀ SAI SỐ TRONG ĐO ĐẠC**

**A. Mục tiêu**

Sau khi học xong chương này, Sinh viên sẽ hiểu các khái niệm về phép đo, sai số đo đạc, các tiêu chuẩn để đánh giá độ chính xác kết quả đo.

**B. Nội dung**

Giới thiệu các khái niệm về phép đo, các loại sai số đo và nguồn gốc của chúng, đặc tính sai số ngẫu nhiên, các loại sai số đặc trưng như: sai số trung bình, sai số trung phương, sai số tương đối dùng để đánh giá độ chính xác của đại lượng đo trực tiếp, sai số trung phương của hàm số các đại lượng đo trực tiếp.

**1.1.Khái niệm về phép đo và sai số đo.**

**1.1.1. Khái niệm về phép đo**

Muốn biết giá trị của một đại lượng như chiều dài của một đoạn thẳng, độ lớn của một góc, phải tiến hành đo đạc.

Phép đo là sự so sánh đại lượng cần xác định với đơn vị đo cùng loại

*Ví dụ: Khi đo chiều dài một đoạn thẳng ta so sánh nó với đơn vị đo độ dài (m, cm hoạc mm…)*

Giá trị của đại lượng đo sẽ là bội số của đơn vị đo

Trong thực tế có nhiều cách xác định giá trị đại lượng đo. Có thể phân loại phép đo như sau:

**1) Phép đo trực tiếp và đo gián tiếp**

***Đo trực tiếp:***

Là so sánh trực tiếp đại lượng cần đo với đơn vị đo tương ứng

*Ví dụ:- Đo độ dài của cạnh bằng thước thép được chiều dài l= 122,43cm*

*- Đo góc nàm ngang kẹp giữa 2 hướng bằng máy kinh vĩ, được giá trị góc là β = 67o20’.*

***Đo gián tiếp:*** Là trường hợp trị số của đại lượng cần đo được tính toán thông qua các đại lượng đo trực tiếp khác.

*Ví dụ: Muốn biết diện tính S của một hình chữ nhật ta cần phải đo trực tiếp chiều dài a và chiều rộng b rồi tính S theo công thức S = a.b.*

**2) Đo cùng độ chính xác và không cùng độ chính xác**

Nếu kết quả đo nhận được trong cùng một điều kiện đo thì đó là các kết quả đo có cùng độ chính xác, ngược lại nhận được trong điều kiện đo khác nhau sẽ không cùng độ chính xác.

*Ví dụ: - Điều kiện đo đặc trưng bởi yếu tố như người đo (phụ thuộc vào khả năng kỹ thuật và giác quan của từng người), máy móc, dụng cụ đo, môi trường đo, số lần đo.*

*- Kết quả đo góc β­1, β2, β3, trong một tam giác được một người đo cùng một máy, đo theo cùng một phương pháp với số lần đo như nhau trong điều kiện thời tiết ổn định và đồng nhất thì kết quả đo của 3 góc đó sẽ nhận được cùng độ chính xác.*

- Khi một trong các điều kiện đo đó khác nhau hoặc áp dụng các cách đo khác nhau…thì kết quả của 3 góc sẽ không cùng độ chính xác.

**3) Đo cần thiết và đo thừa**

Để giải quyết bài toán trắc địa thông thường, người ta phải đo thừa một số đại lượng hoặc đo nhiều lần một đại lượng. Ví dụ:

- Để xác định 6 yếu tố của một tam giác phẳng gồm 3 góc, 3 cạnh, phải đo tối thiểu 3 yếu tố. Trong 3 yếu tố này, bắt buộc phải có số đo của một cạnh. Ví dụ: đo 2 góc và một cạnh hoặc phải đo 2 cạnh và 1 góc. Số đại lượng đo ít nhất mà vẫn giải được bài toán được gọi là số đại lượng đo cần thiết (t). Nếu trong phép đo, tổng số đại lượng đo (n) vượt quá số đại lượng đo cần thiết (t) thì phép đo đó được gọi là đo thừa. Người ta ký hiệu số đại lượng đo thừa là r (r = n – t).

*Ví dụ:* Đối với bài toán tam giác ta có t = 3, r = n – t.

\* *Số đại lượng đo thừa đóng vai trò quan trọng trong bài toán trắc địa, nó dùng để kiểm tra kết quả đo, loại trừ sai số thô (sai lầm), nâng cao độ chính xác kết quả đo.*

*Ví dụ: Để xác định các góc trong một tam giác, trong điều kiện đo cùng độ chính xác, ta chỉ cần đo 2 góc β1, β2, (t = 2) còn góc thứ 3 có thể suy ra bằng quan hệ toán học*β *3 = 180o – (β1 + β2). Nhưng nếu đo thừa β3 (r = 1) thì không những giúp ta kiểm tra phát hiện sai lầm khi đo mà còn dựa vào đó để tìm ra sai số khép W*β= *180o– (β1 + β2+* β *3) để hiệu chỉnh vào từng góc một lượng vi = -W*β/3*nhằm nâng cao độ chính xác của kết quả đo góc.\*

**1.1.2. Nguồn gốc của sai số đo**

Có rất nhiều nguyên nhân gây ra sai số đo nhưng có thể quy gộp thành 3 nguyên nhân chủ yếu sau:

**1) Sai số do người**

Sai số do người là sai số do các giác quan của con người không chuẩn xác gây nên. Ví dụ: Mắt người chỉ có thể phân biệt được 2 điểm cách nhau 0,2mm nên khi đo chiều dài một đoạn thẳng bằng một thước thẳng khắc vạch đến mm, nếu ta ước đọc phần lẻ milimet sẽ có sai số đọc số.

**2) Sai số do dụng cụ, máy móc**

Sai số do dụng cụ, máy móc là sai số do sử dụng dụng cụ, máy móc không chính xác. *Ví dụ: Một thước thép có chiều dài lo = 10m nhưng thực tế, chiều dài của nó là l = 10,004m. Nếu không kiểm tra nghiệm và cải chính vào kết quả đo thì khi đo một cạnh dài, cứ một lần đặt thước ta sẽ phạm một sai số là +4mm.*

**3) Sai số do môi trường đo**

Sai số do môi trường đo là sai số do thời tiết đo không ổn định và do mức độ phức tạp của yếu tố địa hình, địa vật gây nên. *Ví dụ: Cùng đo chiều dài một đoạn thẳng bằng thước thép nhưng khi đo, nhiệt độ môi trường thay đổi làm chiều dài thép bị co, dãn hoặc do địa hình gập ghềnh, thước bị cong, vênh thì kết quả đo sẽ có sai số.*

Nhiệt độ, độ ẩm và áp suất không khí gần mặt đất xung quanh trạm máy và dọc theo tia ngắm luôn thay đổi làm cho mật độ không khí phân bố không đều. Khi tia ngắm đi qua các lớp không khí có mật độ khác nhau sẽ bị khúc xạ vì thế tia ngắm từ máy tới mục tiêu sẽ không đi theo một đường thẳngmà đi theo một đường cong có chiều lõm hướng xuống phía mặt đất. Đường cong tia ngắm trong không gian được phân tích ra hai thành phần trong mặt phẳng thẳng đứng và nằm ngang, chúng gây ra sai số chiết quang đứng và sai số chiết quang ngang. Thành phần sai số chiết quang ngang sẽ ảnh hưởng đến độ chính xác đo góc nằm ngang trong lưới tam giác.

Trên vùng lãnh thổ rộng lớn, nếu địa hình địa vật tương tự nhau thì chiết quang ngang mang tính hệ thống. Nhiệt độ và độ ẩm thường thay đổi theo chu kỳ ngày đêm vì thế đường cong chiết quang ngày đêm có xu hướng ngược chiều nhau. Để giảm ảnh hưởng của chiết quang ngang đến độ chính xác đo góc lưới tam giác hạng cao người ta thực hiện một nửa số vòng đo vào ban ngày và một nửa số vòng đo vào ban đêm.

Các tia ngắm đi qua khu vực có địa vật đặc biệt sẽ chịu ảnh hưởng của chiết quang cục bộ. Các địa vật đặc biệt như nhà cao tầng, ống khói nhà máy sẽ làm cho mội trường không khí xung quanh nhà nó bị biến dạng về nhiệt độ, áp suất và mật độ, đặc biệt khi các vật kiến trúc này bị đốt nóng hoặc mặt trời chiếu sáng. Quy luật ảnh hưởng chiết quang cục bộ đến chính xác đo góc rất khó xác định. Vì thế để tránh chiết quang ngang cục bộ ảnh hưởng đến kết quả đo góc, nên bố trí lưới tam giác sao cho tia ngắm cách xa các vật chướng ngại từ 1 đến 5 mét.

Thông thường các tia sáng mặt trời chiếu vào tiêu ngắm không song song với tiêu ngắm mà nó tạo với tiêu ngắm một góc bất kỳ, khi đó tiêu ngắm được chiếu sáng không đều, một nửa sáng, nửa tối. Việc chiếu sáng mục tiêu không đều làm cho người đo nhận nhầm vị trí trục của mục tiêu, ngắm chuẩn sai và gây ra sai số đo góc. Để khắc phục hiện tượng này, người ta không dùng tiêu ngắm hình trụ tròn mặt nhẵn mà dùng loại bồ ngắm “ vi sai” tạo bởi các thanh gỗ ghép.

*Ví dụ: Căn cứ vào điều kiện đo và các bước thao tác chính khi đo lưới tam giác, người ta xác định có 5 nguyên nhân chính gây ra sai số đo góc:*

*- Sai số máy kinh vĩ*

*- Sai số định tâm máy*

*- Sai số định tâm tiêu ngắm*

*- Sai số đo ngắm*

*- Sai số do ảnh hưởng môi trường đo*

**1.1.3. Phân loại các sai số đo**

Nếu gọi Li là trị đo thu được trong phép đo thứ i, X là trị thực của một đại lượng cần tìm thì sai số thực của nó là ∆i = X - Li.

Trong mỗi phép đo luôn tồn tại ba loại sai số đo, đó là sai số thô Ti, sai số hệ thống Si, sai số ngẫu nhiên .

∆i = Ti + Si + .

Khi xử lý số liệu đo, người ta phân lọai các sai số đo theo tính chất và quy luật xuất hiện của chùng. Có 3 loại sai số sau đây.

**1) Sai số thô (sai lầm)**(Ti)

Sai số thô là sai số do nhầm lẫn trong khi đo, khi ghi sổ hoặc tính toán.

Sai số thô không xuất hiện theo quy luật nhưng có thể phát hiện để loại bỏ nếu đo thêm trị đo thừa.

**2) Sai số hệ thống (**Si**)**

Khi xét dãy trị đo của cùng một đại lượng, nếu thấy các sai số đo có cùng một trị số và dấu không đổi hoặc biến đổi theo một quy luật nhất định thì trong đó tồn tại sai số hệ thống.

Sai số hệ thống tồn tại do các nguyên nhân hoàn toàn xác định và xuất hiện có quy luật rõ ràng. Nguyên nhân chủ yếu tạo nên các sai số hệ thống là ảnh hưởng của sự thay đổi mang tính hệ thống của các điều kiện phép đo. Do sự thay đổi có hệ thống đó nên sự ảnh hưởng giá trị đến kết quả đo cũng mang tính hệ thống.

Thông thường các quy luật ảnh hưởng của sai số hệ thống mang tính toán học. Các sai số hệ thống luôn mang tính cố định về dấu nhưng giá trị có thể không thay đổi (gọi là sai số hệ thống có định) hoặc thay đổi theo quy luật (gọi là sai số hệ thống biến đổi).

Sai số hệ thống cố định có thể kể ra là sai số kiểm nghiệm thước, sai số kiểm nghiệm dây inva trên mia gổ, sai số 2C hay sai số bắt mục tiêu trong máy kinh vĩ.

Các sai số do định tuyến, do ảnh hưởng của gió, do chiều cong trái đất (trong đo dài trực tiếp), do máy lún, mia lún, do chiết quang đứng (trong đo cao hình học)…được coi là những sai số hệ thống biến đổi.

Tóm lại các sai số hệ thống cố định là sai số hệ thống cố định cả về dấu và về giá trị. Sai số hệ thống biến đổi là sai số có dấu cố định nhưng giá trị thay đổi có quy luật.

Vì sai số hệ thống cần phải được loại bỏ trước khi đưa vào xử lý số liệu, mặt khác giá trị của chúng so với sai số thô thường rất nhỏ nên việc phát hiện và tìm biện pháp khắc phục chúng không đơn giản như với sai số thô.

Sai số hệ thống có thể loại bỏ hoặc giảm bớt nếu biết được nguyên nhân và quy luật xuất hiện của nó. Dùng phương pháp kiểm định sẽ tìm được trị số của nó để cải chính vào kết quả đo.

***Để giảm ảnh hưởng sai số hệ thống trong đo đạc thường sử dụng phương pháp sau:***

1. Xác định quy luật ảnh hưởng của sai số hệ thống, sau đó hiệu chỉnh vào kết quả đo.
2. Đưa quy trình đo hợp lý để ảnh hương sai số hệ thống không mang giấu và giá trị giống nhau, mà thay đỏi dấu để cuối cùng ảnh hưởng này triệt tiêu nhau.
3. Sử dụng phương pháp tính toán thích hợp.

***Ví dụ:***

* Kiểm nghiệm và hiệu chỉnh thước đo dài.
* Khảo sát sai số khắc vạch vòng độ.
* Đọc số trên bàn độ tại hai vị trí cách nhau180o khi đo hướng để lạo ảnh hưởng tâm vòng chuẩnkhông trùng tâm vòng độ.
* Đặt vòng độ tại vị trí khác nhau một đại lượng 180/n (n là số lần đo) để giảm ảnh hưởng sai số hệ thống khắc vạch vòng độ.
* Phân bố số lần đo góc ngang buổi sáng và chiều giống nhau và trong thời gian đo dài, tiến hành đo trong điều kiện thời tiết khác nhau để giảm ảnh hưởng chiết quang ngang.
* Xác định chênh cao bằng đo cao lượng giác theo hai chiều để loại trừ ảnh hưởng sai số hệ thống bàn độ đứng và sai số hệ thống chiết quang đứng, do không biết chính xác hệ số này.
* Khi bình sai đường chuyền duỗi thẳng, thấy việc bình sai góc và bình sai toạ độ tách rời nhau không những chỉ làm đơn giản quá trình tính toán mà còn làm giảm ảnh hưởng sai số hệ thống đo góc và cạnh.

***Để phát hiện sai số hệ thống, người ta dùng quy tắc ABBE.***

Nếu coi trị đoLilà tổng hợp của sai số ngẫu nhiên và sai số hệ thống, có dạng:

∆i = + Si với (i = 1)

Đặt A =

B =

thì dãy trị đo không có sai số hệ thống nhưng chỉ đúng với 68% trường hợp đưa ra xét.

Kemnix đã nâng tiêu chuẩn trên thành:

thì đúng với 96% trường hợp đưa ra xét.

**3) Sai số ngẫu nhiên(**

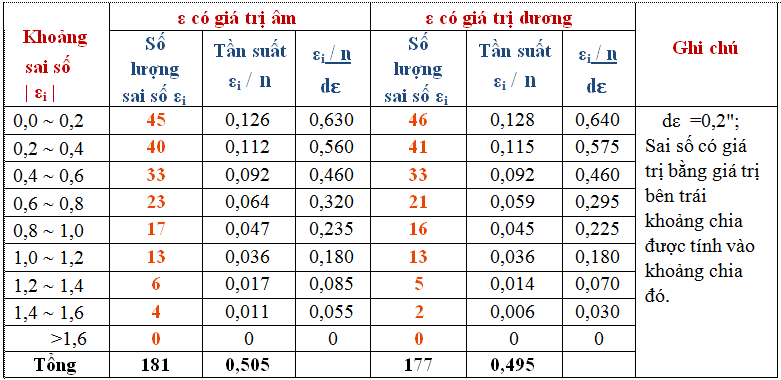
Nếu trong dãy trị đo xét thấy sai số có trị số và dấu luôn biến động, không theo quy luật rõ ràng thì trong dãy trị đo này tồn tại sai số ngẫu nhiên.

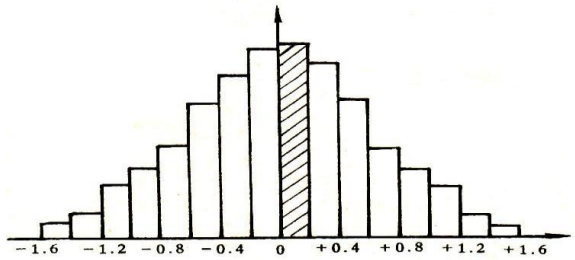
Vì sai số thô và sai số hệ thống có thể tìm biện pháp loại trừ và giảm bớt được ảnh hưởng của chúng lên kết quả đo nên có thể coi sai số ngẫu nhiên là thành phần chủ yếu của sai số và luôn tồn tại trong kết quả đo. Do vậy, nó là đối tượng nghiên cứu của lý thuyết sai số.

**4. Các tính chất cơ bản của sai số ngẫu nhiên**

Nếu nhìn vào dãy sai số ngẫu nhiên, khi đo một đại lượng nhiều lần chúng ta cảm giác chúng xuất hiện không có quy luật nhưng khi nghiên cứu chúng trong cùng một điều kiện đo với số lần đo độ lớn ta có thể thấy sai số ngẫu nhiên luôn xuất hiện theo một quy luật nhất định và theo lý thuyết xác suất.

Tiến hành đo các góc trong 358 tam giác, đo trong cùng điều kiện đo, được các số liệu như sau. εi = 1800 – Σ 3 góc đo, chia sai số ngẫu nhiên theo từng khoảng ∆ε = 0,2’’.



****

**Từ bảng trên ta rút ra được các nhận xét sau:**

(1) Trị tuyệt đối của sai số có một giá trị giới hạn nhất định;

(2) Sai số có giá trị tuyệt đối nhỏ nhiều hơn sai số có giá trị tuyệt đối lớn;

(3) Số lượng các sai số âm, dương có giá trị tuyệt đối bằng nhau xấp xỉ như nhau.

**Vậy các tính chất cơ bản của sai số ngẫu nhiên có 4 tính chất cơ bản sau:**

1) Trị tuyệt đối của sai số ngẫu nhiên không vượt quá một giới hạn nhất định. Giới hạn này phụ thuộc vào điều kiện đo.

2) Các sai số ngẫu nhiên có trị tuyệt đối nhỏ xuất hiện nhiều hơn các sai số ngẫu nhiên có trị tuyệt đối lớn.

3) Các sai số ngẫu nhiên âm và dương có trị tuyệt đối bằng nhau thì khả năng xuất hiện như nhau.

4) Khi số lần đo (n) tăng lên vô hạn thì trị trung bình cộng của các sai số ngẫu nhiên sẽ tiến tới số “0”.

= = 0

*Chú ý: Dấu tổng Gauss [ ] thay cho dấu . Ví dụ:* = [v]

Nhưng không dùng trong trường hợp tổng của 2 hoặc nhiều tham số khác chỉ số. Ví dụ aibj + ajbi  không thể dùng dấu [ ] được.

* **Các tiêu chuẩn đánh giá độ chính xác của kết quả đo:**

Sai số ngẫu nhiên luôn thay đổi cả về dấu và trị số, do đó không thể lấy một sai số ngẫu nhiên đơn lẻ nào để đặc trưng cho độ chính xác dãy trị đo trực tiếp. Để đánh giá độ chính xác của kết quả đo người ta dùng các tiêu chuẩn sau:

1. **Sai số trung bình cộng**

Là trị trung bình cộng các trị tuyệt đối các sai số thực thành phần, được xác định bởi công thức:

Trong đó các ∆i là các sai số thực thành phần; n là số lần đo.

1. **Sai số trung phương**

Là căn bậc hai của trị trung bình cộng của bình phương các sai số thực thành phần:

1. **Sai số giới hạn**

Ta biết giới hạn sai số đo phụ thuộc vào điều kiện đo. Trị đo nào đó có sai số vượt qua giới hạn đó số sẽ được coi là không đảm bảo độ chính xác. Qua khảo sát 1000 sai số ngẫu nhiên trong cùng điều kiện đo, chỉ có ba sai số ngẫu nhiên có trị số bằng ba lần sai số trung phương; điều đó có nghĩa là những sai số có trị số lớn như vậy xuất hiện rất hữu hạn. Vậy sai số giới hạn là giới hạn cực đại mà trị tuyệt đối của sai số đo ngẫu nhiên không thể vượt qua. Trong trắc địa mmax = (2m.

**4. Sai số trung phương tương đối(1/T)**

Sai số trung bình, trung phương, giới hạn là những sai số tuyệt đối. Trong đo chiều dài nếu dùng sai số tương đối thì sẽ phản ánh rõ hơn mức độ chính xác của kết quả đo.

Sai số tương đối là tỷ số giữa sai số tuyệt đối và giá trị của đại lượng đo, trong đó tử luôn nhận là 1 còn mẫu số được làm tròn đến bội số của 10. Mẫu số của sai số tương đối biểu thị cho chất lượng đo đạc, mẫu số càng lớn thì độ chính xác đo càng cao và ngược lại.

**5. Công thức Bessel**

Sai số trung phương được tính qua sai số thực. Trị thực của đại lượng đo thường không biết trước được, do vậy tiêu chuẩn đó cũng không xác định. Khi đo nhiều lần một đại lượng nào đó ta sẽ xác định được trị gần đúng nhất của nó, vì thế sai số gần đúng nhất vi cũng được xác định. Nhà bác học Bessel đã xây dựng công thức tính sai số trung phương qua sai số gần đúng này.  
Sai số thực :     ∆ i  = X - Li  
Sai số gần đúng :        vi    =  x - Li

Trong đó X - trị thực; x- trị gần đúng nhất; Li - trị đo ở lần đo thứ i  
∆i - vi = X- x =∆ε

Gọi ∆ε : sai số thực của trị trung bình cộng.  
→ ∆i = vi + ∆εvới  i = 1~ n,

Bình phương hai vế, lấy tổng rồi chia cả hai vế cho n ta được:

Mặt khác: ∆ε=

Bình phương biểu thức này được:

Suy ra : =

Thế vào công thức ta được:

Theo định nghĩa sai số trung phương, biểu thức được viết lại như sau:

Thay biểu thức này vào biểu thức có :

Công thức Betxen:

Đây là công thức Betxen dùng để tính sai số trung phương của đại lượng L khi đo n lần.  
**6. Sai số trung phương hàm số dạng tổng quát**

Trong trắc địa có nhiều trường hợp đại lượng cần xác định được xác định gián tiếp qua các đại lượng đo trực tiếp, hoặc các đại lượng cho trước; khi các đại lượng này mắc sai số thì các đại lượng cần xác định cũng sẽ có sai số. Ta sẽ nghiên cứu vấn đề này: Giả sử có hàm:

Z = f ( x1, x2, x3,........,xn )

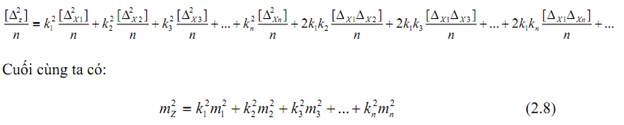
Trong đó xi là các đại lượng đo độc lập có các sai số trung phương tương ứng là: m1 , m2 , m3 ,..., mn  
Nếu xi có gia số tương ứng là ∆i  thì hàm Z cũng có gia số là ∆z :  
Z + ∆z = f( x1+∆1,  x2+∆2,  x3+∆3,........, xn+∆n).  
Vì các ∆i  nhỏ, khai triển hàm Z theo chuỗi Taylor và chỉ giữ lại số hạng bậc 1; thay các vi phân dx bằng các sai số thực ∆i ta có :

Z + ∆z = f (x1, x2,…, xn) +

Đặt ki =   
với xi cho trước thì các ki là hằng số ta có :

 ( ∆i)j = (k1∆1+ k2∆2+ k3∆3+......+ kn∆n)j

Cho j = 1~ n, bình phương hai vế, lấy tổng hai vế, chia cho n ta có:



**1.2. Trọng số và trị trung bình cộng mang trọng số**

* + 1. **Trọng số và sai số trung phương trọng số đơn vị**

Khi đo không cùng độ chính xác một đại lượng thì kết quả nhận được sẽ có độ tin cậy khác nhau và không thể tính trị trung bình cộng theo phương pháp thông thường được.

Pi =

Để giải quyết vấn đề này, khi tính toán người ta dựa vào một con số bổ trợ biểu thị mức độ chính xác của kết quả đo gọi là trọng số, ký hiệu là P.

Độ chính xác của kết quả đo càng cao thì trị số của P càng lớn còn trị số của sai số trung phương m càng nhỏ. Trọng số P luôn là trị số dương và thường không có đơn vị vật lý. Vì thế, trọng số là con số bổ trợ tỷ lệ nghịch với bình phương của sai số trung phương của trị đo không cùng độ chính xác, nghĩa là:

Pi =

Trong đó, C là hằng số tự chọn sao cho P trở thành con số tiện lợi và đơn giản khi xử lý số liệu đo. Về nguyên tắc, có thể chọn trị số C tùy ý nhưng phải nhất quán trong một bài toán xử lý số liệu, nghĩa là với trị đo thứ nhất chọn C bao nhiêu thì trị đo tiếp theo cũng phải chọn C là bấy nhiêu.

Nếu chọn trị số C bằng bình phương sai số trung phương của trị đo nào đó thì trọng số của trị đo này sẽ bằng 1, nghĩa là Po = = 1

Po được gọi là trọng số đơn vị, sai số trung phương tương ứng với Po = 1 gọi là sai số trung phương trọng số đơn vị, ký hiệu là µ. Khi đó, công thức có dạng:

PL  =

Vai trò của µ và P rất quan trọng trong khi xử lý bài toán trắc địa hỗn hợp có nhiều trị đo không cùng độ chính xác.

Ví dụ: Cạnh S được đo bằng 3 phương pháp khác nhau không cùng độ chính xác, nhận được kết quả và sai số trung phương nêu ở bảng sau

Nếu chọn µ = m2 ± 0,12 thì ta có

P1 = (0,12/0,30)2 = 0,16; P2 = 1; P3 = (0,12/0,18)2 = 0,44

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Trị đo số | Si | mi | Trọng số (Pi) |
| 1 | 48,38 | ±0,30 | 0,16 |
| 2 | 48,28 | ±0,12 | 1,00 |
| 3 | 48,29 | ±0,18 | 0,44 |

**1.2.2. Trị trung bình cộng mang trọng số và sai số trung phương của nó**

Trong ví dụ trên, cạnh S được đo theo ba phương pháp khác nhau, được 3 kết quả: S1, S2, S3,. Từng trị số Si có thể là kết quả trung bình của một dãy trị đo riêng với số lần đo khác nhau nên sai số trung phương mSikhác nhau, ta có dãy trị đo không cùng độ chính xác. Để tính trị số tin cậy nhất và đánh giá độ chính xác của cạnh S trong trường hợp này không thể dùng các công thức đã nêu trong mục IV mà phải dùng công thức tính trị trung bình cộng mang trọng số:

X = = (1.2.2)

Tương tự như khi tính trị trung bình cộng cùng độ chính xác, trong thực tế tính toán thường gặp các giá trị Li lớn và phức tạp, việc tính toán sẽ đơn giản hơn nếu ta lựa chọn một trị đo nào đó trong dãy trị đo Li làm trị gần đúng Xo của trị trung bình cộng X, sau đó tính độ lệch giữa trị gần đúng và các trị đo, cuối cùng tính được trị trung bình cộng mang trọng số theo công thức thực dụng sau:

= Li  - Xo X = X +

Để đánh giá độ chính xác của trị trung bình cộng mang trọng số ta dùng công thức:

mX =

Trong đó sai số trung phương trọng số đơn vị tính theo công thức sau:

µ = vi = x – Li, (i = 1,2,…n)

**CHƯƠNG II. PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI GẦN ĐÚNG**

**2.1. Khái niệm về phương pháp bình sai gần đúng**

Toàn bộ lưới trắc địa là một thể thống nhất, để tính toán chính xác các kết quả phải dùng phương pháp tính toán bình sai chặt chẽ, tức là phải xét toàn bộ các mối quan hệ hình học của các yếu tố trong lưới đồng thời. Trong phạm vi giáo trình này chỉ xét đến phương pháp bình sai gần đúng.

Phương pháp gần đúng khi bình sai chỉ áp dụng phương pháp tính toán đơn giản và riêng biệt, nghĩa là bình sai từng điều kiện riêng biệt sao cho khi bình sai điều kiện sau không vi phạm điều kiện trước đã bình sai.

**2.2. Phương pháp bình sai dãy trị đo của cùng một đại lượng**

Bình sai là giải quyết mâu thuẫn, loại trừ sự không phù hợp với quan hệ toán học vốn có giữa các trị đo bằng cách tìm ra số hiệu chỉnh vi, cải chính vào trị đo để tìm trị xác xuất nhất của nó và đánh giá độ chính xác của kết quả tìm được.

Nội dung của phương pháp bình sai dãy trị đo của cùng một đại lượng được trình bày như sau:

**2.2.1. Trường hợp dãy trị đo cùng một đại lượng có cùng độ chính xác**

Có một dãy kết quả đo của cùng một đại lượng có cùng độ chính xác:

L1, L2, …Li (i = 1 n)

Gọi trị cần tìm của đại lượng đó là x (x = Li + vi với i = 1 n)

vi = x – Li (1)

Để tìm trị x đáng tin cậy nhất, ta dùng nguyên lý số bình phương nhỏ nhất có dạng:

= [vv] = min

Để thỏa mãn điều kiện, ta có:

= [v] = 0 (2)

Thay (1) vào (2) và biến đổi ta sẽ được

[v] = nx - [Li] = 0

Như vậy, công thức tính trị đúng tin cậy nhất sẽ là x = =

Nếu nhận x = xo + dx thì biểu thức (1) có dạng:

vi = dx + li với li = xo– Li

hay [v] = ndx + [l] dx = -

Trị xác xuất nhất của đại lượng cần tìm lúc này có thể tính theo công thức sau:

x = xo-

Để đơn giản cho quá trình tính toán, ta chọn trị gần đúng xo là trị đo có giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

Thực chất của bài toán bình sai lúc này là tính trị số trung bình cộng và sai số trung phương của nó.Ta sử dụng công thức đã biết sau đây để tính.

1. **Sai số trung phương của trị đo Li theo công thức Betxen:**

m =

Đây là công thức Betxen dùng để tính sai số trung phương của đại lượng L khi đo n lần.

1. **Sai số trung phương của trị số trung bình cộng:**mx =

Các bước tính toán bình sai được sắp xếp trong một bảng tính để dễ dàng tính toán, theo dõi và kiểm tra.

*Ví dụ*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| N | Li | li | vi | vi2 |
| 1 | L1 | l1 | v1 | v12 |
| 2 | L2 | l2 | v2 | v22 |
| … | … | … | … | … |
| n | Ln | ln | vn | vn2 |
| Σ | xo |  |  | [vv] |

**Sử dụng các công thức nêu trên, ta rút ra trình tự bình sai trị đo trực tiếp có cùng độ chính xác của một đại lượng như sau:**

1. Chọn trị gần đúng xo , tính li theo công thức li = xo – Li

2. Tính trị trung bình cộng theo công thức x = xo-

3. Tính số hiệu chỉnh vi theo công thức vi = x – Li và tính [vv]

4. Tính sai số trung phương của trị đo L theo công thức

m =

5. Tính sai số trung phương của trị trung bình cộng theo công thức

mx =

6. Ghi kết quả cuối cùng

Các bước tính toán bình sai được sắp xếp trong một bảng tính để dễ dàng tính toán, theo dõi và kiểm tra.

**2.2.2. Trường hợp dãy trị đo cùng một đại lượng khác độ chính xác**

Giả sử có dãy trị đoLi (i = 1 n) có trọng số Pi tương ứng khác nhau

L1, L2, …Ln

P1, P2, …Pn

Sử dụng nguyên lý bình phương nhỏ nhất

= [pvv] = min

Thoả điều kiện: = = 0

Hay [pv] = 0

Với vi = x – Li

[pv] = [p]x – [pL] = 0

=

Nếu thay x = xo + dx (3), thì x được tính theo công thức:

Đặt li = xo – Li

vi = dx + li

mà [pv] = 0

Nên [pv] = dx[p] + [pl] = 0

dx = (4)

Thay (4) vào (3) ta tính được x = xo -

Thực chất của bài toán bình sai dãy trị đo cùng một đại lượng không cùng độ chính xác là tính trị số trung bình cộng mang trọng số và sai số trung phương của nó đối. Ta sử dụng công thức đã biết sau đây để tính.

1. **Công thức tính sai số trung phương của trị đo Li:**

m =

1. **Công thức tính sai số trung phương của trị trung bình cộng mang trọng số:**

mx =

Tổng [pvv] cũng có thể tính theo công thức

[pvv] = [pLL] -

Các bước bình sai được sắp xếp trong bảng tính để kiểm tra.

*Ví dụ:*

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | Li | pi | li | pili | vi | pivi | pivi2 | piLiLi |
| 1 | L1 | p1 | l1 | p1l1 | v1 | p1v1 | P1v12 | p1L1L1 |
| 2 | L2 | p2 | l2 | p2l2 | v2 | p2v2 | P2v22 | p2L2L2 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| N | Ln | pn | ln | pnln | vn | pnvn | pnvn2 | pnLnLn |
|  | xo | [p] |  | [pl] |  | [pv] | [pvv] | [pLL] |

**Sử dụng các công thức đã trình bày ở trên ta rút ra trình tự bình sai trị đo trực tiếp không cùng độ chính xác của một đại lượng như sau:**

1. Chọn trị gần đúng xo , tính độ lệch li theo công thức li = xo – Li

2. Chọn một hằng số C cho bài toán, tính trọng số của các kết quả đo

P =

3. Tính số hiệu chỉnh trung bình cộng theo công thức x = xo -

4. Tính số hiệu chỉnh vi theo công thức vi = x – Li và tính [pvv]

m =

5. Tính sai số trung phương trọng số đơn vị theo công thức m =

6. Tính sai số trung phương của trị trung bình cộng mang trọng số

mx =

7. Ghi kết quả cuối cùng.

*Ví dụ:*

Đoạn thẳng AB được đo 9 lần bằng thước thép, kết quả thu được ghi vào cột thứ 2 của bảng. Tính trị đáng tin nhất của đoạn thẳng AB và đánh giá độ chính xác của kết quả đo và kết quả tính xAB.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| No | Si (m) | Li (cm) | vi (cm) | vivi (cm)2 |
| 1  2  3  4  5  6  7  8  9 | 182,06  182.13  182.10  182.15  182.05  182.08  182.07  182.12  182.14 | -6  -13  -10  -15  -5  -8  -7  -12  -14 | 4  -3  0  -5  5  2  3  -2  -4 | 16  9  0  25  25  4  9  4  16 |
|  | xo= 182.00 | -90 | 0.0 | 108.00 |

Trên đây là trường hợp dãy trị đo nhiều lần cùng độ chính xác của cùng một đoạn thẳng AB. Bởi vậy quá trình tính toán tiến hành theo thứ tự sau:

Chọn trị gần đúng của x là

xo = 182.00 m

Tính các số chênh li = xo – Li = xo – Si và tính số gia

dx = - = - = 10 cm

Tính trị đáng tin cậy nhất của chiều dài AB theo

x = xo + dx = 182.00 + 10 cm = 182.10 m

Tính số hiệu chỉnh vi = x – Li và sau đó kiểm tra [v] = 0, tính [vv] = 108.00

Tính các sai số trung phương

m = = = 3.7 cm

mx = = 1.2 cm

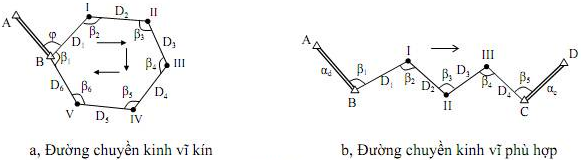
**2.3. Bình sai gần đúng lưới đường chuyền kinh vĩ**

* + 1. **Khái quát về đường chuyền kinh vĩ**

Tập hợp các điểm được liên kết với nhau bởi các đoạn thẳng kẹp giữa là các góc phẳng tạo thành đường gẫy khúc hoặc duỗi thẳng. Các góc phẳng đo bằng máy kinh vĩ với sai số trung phương đo góc mβ = ± 30’’, các cạnh đo bằng thước thép hoặc các máy đo xa quang điện với sai số trung phương tương đối 1/T = 1/2000, tập hợp các điểm này gọi là đường chuyền kinh vĩ.

Phạm vi ứng dụng: đường chuyền kinh vĩ là một dạng của lưới khống chế đo vẽ, được áp dụng phổ biến ở những nơi rậm rạp, tầm nhìn khó khăn, được đặt theo hướng của các công trình dạng thẳng phục vụ trực tiếp cho đo vẽ bản đồ.

Đồ hình cơ bản của đường chuyền kinh vĩ:

Hình 2.3.1

**2.3.2. Trình tự bình sai đường chuyền kinh vĩ phù hợp và khép kín**

**B1. Tính sai số khép đường chuyền**

fβ = Σβ đo – Σβ LT

*a) Đối với lưới đường chuyền phù hợp:*

Σβ LT = (αC – αĐ) + n.180o (Tính theo góc trái)

Σβ LT = (αĐ – αC) + n.180o (Tính theo góc phải)

*b)Đối với lưới đường chuyền khép kín:*

Σβ LT =(n – 2).180o (theo góc trong)

Σβ LT =(n + 2).180o (theo góc ngoài)

**B2. Tính số hiệu chỉnh cho các góc đo và trị sau bình sai của chúng:**

Nếu sai số khép fβ ≤ 60’’thì ta phân phối đều sai số khép cho các góc đo với dấu ngược lại:(n là số góc)

Vβi **=**  ; Kiểm tra : Σ Vβi = - fβ

Trị số các góc sau bình sai tính theo công thức:

β’i = βi + Vβi

**B3. Tính chuyền phương vị cho các cạnh và tính số gia tọa độ**

Ở hình 2.3.1b, trị số góc định hướng của cạnh CD được tính từ tọa độ điểm gốc C và D là αc ; ta còn có thể tính góc định hướng của nó từ góc định hướng cạnh AB (αd) và các góc đo βi:

+ Tính chuyền phương vị

  αi= αi - 1– βiph + 180o ( theo góc phải)

αi= αi - 1 + βitr - 180o ( theo góc trái)

+ Tính số gia tọa độ



**B4. Tính sai số khép tọa độ, tính và so sánh với hạn sai nếu đạt thì tính số hiệu chỉnh cho số gia tọa độ và tính số gia tọa độ hiệu chỉnh**

+ Tính sai số khép tọa độ

A

B

C

D

I

*a) Đường chuyền phù hợp*





*b) Đường chuyền khép kín*



A

B



\*Trường hợp đặc biệt: (như hình bên)





+ So sánh với hạn sai



Nếu ( = 1/2000) đạt thì

+ Tính số hiệu chỉnh và số gia tọa độ hiệu chỉnh



*\* Kiểm tra:*

= - fX; = - fY

**B5. Tính tọa độ cho các điểm**



Từ đây ta tính toạ độ cho các điểm của lưới khống chế trên cơ sở toạ độ các điểm gốc và các gia số toạ độ đã được bình sai này.

**2.4. Bình sai gần đúng lưới thủy chuẩn kỹ thuật**

**2.4.1. Chỉ tiêu kỹ thuật lưới độ cao**

**2.4.1.1. Đo cao hình học**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| YẾU TỐ KỸ THUẬT | HẠNG | |
| IV | Kỹ thuật |
| *1. Chỉ tiêu xây dựng lưới* |  |  |
| Chiều dài đường đơn: -Đồng bằng  -Trung du, miền núi | 16-20km  100 km | 8km  8km |
| Chiều dài từ điểm góc đến điểm nút: -Đồng bằng  -Trung du, miền núi | 9-15km  75km | 6km  6km |
| Chiều dài giữa các điểm nút: -Đồng bằng  -Trung du, miền núi | 6-10km  50km | 4km  4km |
| Sai số khép chênh cao: -Khi số trạm/ 1km < 15  -Khi số trạm/ 1km > 15 | ± 20mm√L(km)  ± 25mm√L(km) | ± 50mm√L(km)  ± 50mm√L(km) |
| *2. Kiểm tra 1 trạm máy* |  |  |
| (K + đen – đỏ) | ≤ ±3mm | ≤ ±5mm |
| Số chênh giữa chênh cao tính theo mặt đen và mặt đỏ) | ≤ ±5mm | ≤ ±7mm |
| [(T+D)/2] - G | ≤ ±5mm | ≤ ±5mm |
| Chênh khoảng cách từ máy đến mia sau và mia trước | ≤ 3m | ≤ 5m |
| Chênh khoảng cách cộng dồn | ≤ 10m | ≤ 50m |
| Chiều cao tia ngắm: S > 30m  S < 30m | >0.2m  >0.1m | >0.1m  >0.1m |
| Chiều dài tia ngắm: | ≤ 150m  ≤ 100m | ≤ 200m  ≤ 150m |

**2.4.1.2. Đo cao lượng giác**

+  (Chênh của 1 cạnh đo đi và về)

+ (mm) (Khép cả đường)

**2.4.2. Đo cao**

*a. Đo 1 trạm thủy chuẩn*

|  |  |
| --- | --- |
| - Giả sử cần xác định chênh cao giữa A và B như hình vẽ: thì mia dựng tại A gọi là mia sau, mia dựng tại B gọi là mia trước.  - Đặt máy thủy chuẩn giữa A và B cân bằng chính xác | Mia sau Mia trước    A B |

- Quay máy ngắm mặt đen mia sau đọc số trên mia theo thứ tự : Dây trên - dây dưới - dây giữa, quay máy ngắm mặt đen mia trước đọc số trên mia theo thứ tự : Dây trên - dây dưới - dây giữa, ngắm mặt đỏ mia trước đọc số trên mia theo chỉ giữa, quay máy ngắm mặt đỏ mia sau đọc số trên mia theo chỉ giữa. Như vậy kết thúc 1 trạm đo thủy chuẩn hạng III.

\* Trước khi chuyển máy đến trạm khác cần tiến hành kiểm tra trạm đo và so sánh với hạn sai cho phép. Nếu đạt yêu cầu thiết chuyển trạm, còn không đạt thì phải tiến hành đo lại. Nôi dung kiểm tra và các hạn sai xem chỉ tiêu kỹ thuật lưới độ cao

A

B

i

v

l

S

D

hAB

*b. Đo cao lượng giác*

- Giả sử cần xác định chênh cao

giữa A và B thì đặt máy tại A, đối

tâm cân bằng chính xác, đo chiều

cao máy (i), ngắm mia dựa vào dây trên và dây dưới xác định khoảng cách nghiêng (S), căn cứ vào dây giữa đọc chiều cao mia (l), đọc góc đứng (V).

- Mỗi cạnh như vậy phải đo đi và đo về hoặc đo 2 lần liên tiếp nhưng thay đổi cao mia

- Tính khoảng cách ngang: 

- Tính chênh cao từ A đến B: hAB = D.tgV+i – l

**2.4.3. Lưới khống chế độ cao:**

- Các điểm khống chế độ cao được bố trí trùng với các điểm khống chế mặt phẳng

- Các điểm cơ sở bố trí lưới thủy chuẩn kỹ thuật, các điểm của lưới đo vẽ đo thủy chuẩn kinh vĩ hoặc đo cao lượng giác.

- Đo các lưới độ cao trên

- Tiến hành tính độ cao cho các điểm theo phương pháp bình sai gần đúng

*\* Tính toán bình sai:*

*a. Đường đơn:*

- Lập bảng tính, ghi số liệu gốc và số liệu đo vào bảng

- Tính sai số khép đường: 

- Nếu fh ≤ fh (CP) thì tính số hiệu chỉnh cho chênh cao: 

- Tính chênh cao hiệu chỉnh: 

- Tính độ cao cho các điểm: 

*b. Đường khép kín:*

- Tính tương tự như trên chỉ khác: fh = Σhi

**CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI ĐIỀU KIỆN**

**3.1 Cơ sở lý thuyết bình sai điều kiện**

Nếu ở chương trước,chúng tahiểu trị đo là kết quả của phép đo được bằng thiết bị, máy móc thì ở đây chúng ta hiểu trị đo là các trị xác xuất được xử lý từ đo lặp lại một đại lượng.

Sơ đồ xử lý số liệu đo khái quát như sau:

1. Đo lặp một đại lượng x1, x2,…xn rồi xử lý số liệu để có được
2. Bình sai trị đo là giải quyết mâu thuẫn toán học giữa các

Vậy ở chương này, quy ước x’ là các trị đo. Đó chính là các giá trị trừ chương trước.

Giả sử đo n đại lượng có:

- Giá trị thực

x’1, x’2,…x’n - Trị đo tương ứng

p1, p2…pn - Trọng số

Các đại lượng này có quan hệ toán học sau:

= 0

= 0

…………………....... (3.1)

= 0

Có thể tồn tại rất nhiều biểu thức song, chỉ quan tâm đến r biểu thức độc lập mà thôi. Các phương trình (3.1) gọi là các phương trình điều kiện. Số lượng biểu thức độc lập chính bằng các trị đo dư.

Do có sai số trong quá trình đo nên vế phải của các phương trình (3.1) không bằng “0” mà bằng các giá trị Wj nào đó.

= W1

= W2

………………….......

= Wr

= Wj

Các đại lượng W1, W2…Wr gọi là các sai số khép. Chúng có thể lớn hay bé. Vì vậy, trước khi bình sai (phân bổ chúng vào các trị đo để thỏa mãn phương trình (3.1)) cần phải kiểm tra lại xem chúng có nằm trong giới hạn cho phép hay không. Nếu không thì phải loại trừ (tiến hành đo lại).

Như vậy, nhiệm vụ cơ bản của các bài toán bình sai bao gồm:

a. Phân bố sai số khép, tìm số cải chỉnh vào các trị đo

b. Đánh giá kết quả đo theo tài liệu bình sai

Gọi v1, v2,…vn là các số hiệu chỉnh vào các trị đo. Nghĩa là các trị bình sai sẽ là

xi = x’i + vi

Và phải thỏa mãn phương trình (3.1). Tức là

= 0

= 0

…………………............................... (3.2)

= 0

= 0

Đây là hệ phương trình có n ẩn và r phương trình (r < n) nên hệ có vô số nghiệm.

Triển khai vế trái của phương trình dưới dạng chuỗi Taylor và bỏ qua thành phần bậc > 2 ta có

+( ) +( ) +…+ ( )

Trong đó ( )là đạo hàm riêng của tại giá trị gần đúng x’ của x

Đặt wj =

Với j = 1 thì = a1 = a2 = an

Với j = 2 thì = b1 = b2 = bn

Với j = r thì = r1  = r2 = rn

Vậy, phương trình điều kiện của số hiệu chỉnh được viết lại thành như sau:

a1.v1 + a2v2 + … + anvn + W1 = 0

b1.v1 + b2v2 + … + bnvn + W2 = 0 (3.3)

………………….

r1.v1 + r2v2 + … + rnvn + Wr = 0

[av] + w1 = 0

[rv] + wr = 0

Ta đặt B = , W= , V =

Phương trình (3.3) được viết lại thành BV + W = 0 (3.4)

Như vậy, có thể thấy hệ phương trình (3.3) có r phương trình vào có n ẩn với r, n nên hệ có vô số nghiệm. Giải được bài toán này hay giải theo nghĩa thông thường là không giải được mà ta phải dựa vào :

Phương trình nhỏ nhất [pvv] = min

Với VT . P . V = VTPV

Theo nguyên tắc Lagrang chúng ta có

(v1, v2, ..) = [pvv] + λ1 + λ2 + … λr

= [pvv] + λ1 ([av] + W1) + λ2 ([bv] + W2) + … + λr ([rv] + Wr)

Như vậy, các số hiệu chỉnh phải thỏa mãn điều kiện sau:

= 0 (i = 1 n)

Để cho tiện tính toán, ta ký hiệu

λ1 = - 2k1

λ2 = - 2k2

λr = -2kr

Do đó = [pvv] -2k1 ([av] + W1) – 2k2 ([bv] + W2) - … - 2kr ([rv] + Wr)

Đặt K = thì = VTPV – 2KT(BV + W)

Theo nguyên tắc đạo hàm vecto, chúng ta có

= (2p1 + 2v2p2 + … + 2vnpn) – 2k1a1 – 2k1b1 – 2k1ar – 2k2b1 – 2k2b2 - … - 2krrn = 0

Vì (v1, v2, … vn)(1xn) (n x m) =v1p1 + v2p2 + … + vnpn = VTP

Nên = 2VT.P – 2KT.B = 0 hay VT.P = KT.B

Và KT.B = [k1, k2,…kr] (1 x r)

= k1a1 + k2b1 + … +krr1 + k1a2 + k2b2 + … + krr2 + … + k1an + k2bn + … krrn

= k1a1 + k1a2 + .. + kran + k2b1 + … + k2br + … + krr1 + krr2 + .. + krrn

= = 2. VT.P – 2KT.B = 0

Hay VT.P = KT.B (3.5)

Nhân 2 vế của biểu thức (3.5) với P-1 ta có

VT.P.P-1 = KT.B.P-1

màP.P-1  = 1

Do đó VT= KT.B.P-1

Vì tính chất của ma trận chuyển vị là (ABC)T = CTBTAT nên V = P-1BTK (3.6)

Thay (3.6) vào (3.4) ta có

B.V + W = 0

B.P-1BTK + W = 0

ta có N.K + W = 0 (3.7)

Phương trình (3.7) được gọi là hệ phương trình chuẩn. các số liên hệ (k1, k2…kn) được gọi là các số liên hệ.

Như vậy, hệ phương trình (3.7) có r ẩn và r phương trình. Sau khi giải hệ phương trình (3.7) ta xác định được ki và thay thế vào (3.6) ta xác định được các hệ số hiệu chỉnh cũng như các giá trị bình sai.

xi = x’i + vi

Vậy các giá trị

X = được xác định theo công thức trên sẽ thỏa mãn [pvv] = min

Phương trình (3.7) được viết dưới dạng đại số như sau:

**Nội dung của phương pháp bình sai điều kiện được tóm tắt thành các bước sau:**

1. Thành lập các hệ phương trình = 0
2. Thành lập hệ phương trình điều kiện số hiệu chỉnh

BV + W = 0

1. Thành lập hệ phương trình chuẩn

N.K + W = 0 (N = B. P-1BT)

4. Giải hệ phương trình chuẩn

Có 2 cách giải: - Phương pháp nghịch đảo ma trận (phổ biến): NK+W = 0 NK = - W K = - N-1.W

- Phương pháp giải theo sơ đồ Gauss

5. Đánh giá độ chính xác

- Sai số trung phương trọng số đơn vị

m = =

n: Số ẩn số

t: Số trị đo cần thiết

r: Số trị đo thừa

* Sai số trung phương của hàm sốmF =m

Trong đó: mFlà sai số trung phương của hàm số F = F(x’1, x’2, ….x’t)

**3.2. Công thức thành lập các phương trình điều kiện số hiệu chỉnh đối với lưới khống chế trắc địa**

* + 1. **Phương trình điều kiện trong mạng lưới độ cao**

r = n – t

n: số lần đo

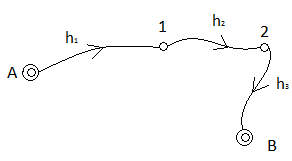
t: số ẩn số cần thiết

r: đại lượng đo dư( số phương trình điều kiện)

Trong lưới độ cao, số ẩn số t chính bằng các điểm cần xác định.

**Các dạng phương trình cơ bản:**

1. **Điều kiện khép 2 điểm gốc:**

Phương trình liên hệ đối với hình (3.2.1a)

HA + h1 + h2 + h3 = HB

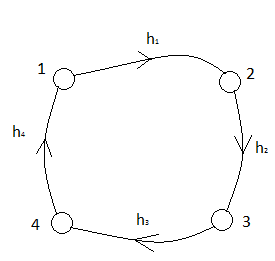
Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

v1 + v2 + v3 + W = 0

W = HA + + + - HB

1. **Điều kiện khép vòng:**

Phương trình liên hệ đối với điều kiện khép vòng hình(3.2.1b)

h1 + h2 + h3 +h4 =0

Phương trình điều kiện số hiệu chỉnh:

v1 + v2 + v3 + v4+ W = 0

W = + + +

* *Chú ý: Các phương trình điều kiện phải độc lập tuyến tính.*

**3.2.2. Phương trình điều kiện trong mạng lưới tam giác đo góc**

Lưới tam giác đo góc: Là lưới trong đó đo toàn bộ các góc. Trong lưới này tối thiểu phải có một góc định hướng gốc, một cạnh gốc và toạ độ một điểm gốc.

r = n – t

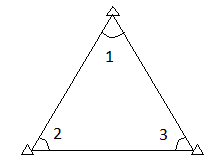
n: số lần đo

t: số ẩn số cần thiết

r: đại lượng đo dư (số phương trình điều kiện)

|  |  |
| --- | --- |
| t = p x 2  p: là số điểm cần xác định | Đối với lưới độc lập t = ( p\* – 2 ) x 2.  p\* : là tổng số điểm |

Trong lưới đo góc, tồn tại một số dạng điều kiện cơ bản sau đây

1. **Điều kiện hình ( hình 3.2.2a)**

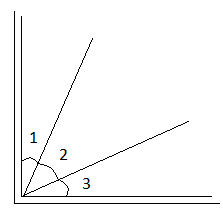
v1 + v2 + v3 + W = 0

W= 1 + 2 + 3 – 180o

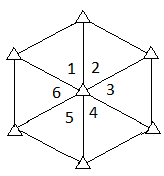
Số điều kiện này bằng số các tam giác không phụ thuộc nhau.

1. **Điều kiện các góc cố định: (hình 3.2.2b)**

A , B, C là ba điểm cho trước nên từ toạ độ các điểm gốc này ta tính được góc và xem như đã biết. Điều kiện này được thành lập khi ta có các góc cho trước mà vẫn thực hiện đo góc.

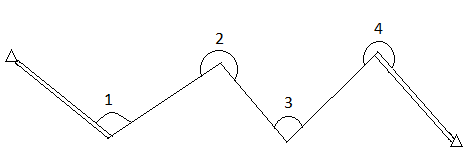
v1 + v2 + v3 + W = 0

W = y’1 + y’1 +y’1 – ABC

**c) Điều kiện vòng (hình 3.2.2c)**

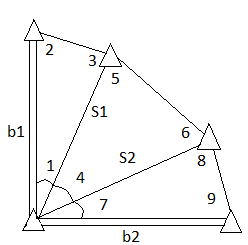
Dựa theo điều kiện của các góc tại 1 đỉnh có cạnh chung bằng 3600 ta có

v1 + v2 + v3 + v4 + v5 + v6 + W - 3600= 0

W = 1 + 2 +3 +4 + 5 + 6 - 3600

**d) Điều kiện các góc phương vị (hình 3.2.2d)**

v1 + v2 + v3 + v4 + W = 0

**e) Điều kiện của các cạnh tương ứng**

Điều kiện này xuất phát từ điều kiện sin của các góc trong tam giác.

Từ đó ta có . . . – 1 = 0

**f) Điều kiện cực**

Cách thành lập tương tự phương trình điều kiện chiều dài.

**g) Điều kiện tọa độ**

lgsin(y + v’) = lgsiny + – [

Đặt hệ số = cotagy

M = 0,4343 P’’ = 206265

Như vậy, phương trình điều kiện có dạng + w = 0

**3.3. Đánh giá độ chính xác trong bình sai điều kiện**

* + 1. **Sai số trung phương trọng số đơn vị**

Trong trường hợp tổng quát, sai số trung phương trọng số đơn vị

m =

* + 1. **Sai số trung phương của hàm**
* Công thức tính trọng số đảo:

= [tpp] - - - …. -

Sai số trung phương của hàm số mF = m.

**CHƯƠNG IV. PHƯƠNG PHÁP BÌNH SAI GIÁN TIẾP**

Phương pháp bình sai gián tiếp (còn gọi là phương pháp bình sai tham số) làthông qua việc chọn t tham số độc lập, biểu đạt mỗi đại lượng đo thành hàm của t tham số đó, thành lập mô hình hàm số, theo nguyên lý bình sai nhỏ nhất, dùng phương pháp tìm cực trị tự do để giải, tìm trị xác suất nhất của các tham số, từ đó tìm được trị bình sai của các đại lượng đo.

Giả sử trong một kết cấu trắc địa nhằm xác định t đại lượng cần thiết, chúng ta có dãy trị đo Li (i = 1 n) khác trọng số Pi (i = 1 n).

Để tiến hành bình sai gián tiếp, chúng ta chọn t ẩn số độc lập x’j (j = 1 t). Việc lựa chọn ẩn số tuân theo những quy định sau:

1. Các ẩn số phải chọn độc lập và dư ( đúng = trị số đo cần thiết)
2. Đối với lưới độ cao: ẩn số = trị bình sai của các điểm độ cao cần xác định
3. Đối với lưới tọa độ phẳng: ẩn số = trị bình sai của tọa độ điểm cần xác định

**4.1 Cơ sở lý thuyết bình sai gián tiếp**

x = xo + dx ; Li = L’i + vi

Trong đó, xo là trị gần đúng; L’ilà trị đo.

**4.2 Thành lập hệ phương trình số hiệu chỉnh và hệ phương trình chuẩn**

**4.2.1 Thành lập hệ phương trình các số hiệu chỉnh**

Gọi xjolà trị gần đúng, dxj (j = 1 t) là gia số của ẩn số tương ứng x;j (j = 1 t)

Hệ phương trình trị bình sai của trị đo dạng tổng quát:

L’i= Fi (xo1 + dx1,xo2 + dx2,…. xot + dxt) với (i = 1 n) (4.2.1a)

Vì Li= L’i+ vi nên hệ (4.2.1) được chuyển thành hệ n phương trình số hiệu chỉnh có dạng:

vi =F i (xo1 + dx1,xo2 + dx2,…. xot + dxt) – Li  ( i = 1 n) (4.2.2)

Đưa phương trình về dạng tuyến tính theo khai triển Taylor:

vi =F i (xo1 ,xo2,…. xot) + – Li  = + li ( i = 1 n) (4.2.1b)

Đặt = ai ;  = bi ; ……; = ti

Và li  = F i (xo1 ,xo2,…. xot) – Li = Loi – Li

Ta sẽ có vi = ajdx1 + b1dx2  … + tidxt + li với (i = 1 n) (4.2.1c)

Ký hiệu A = nxt  ; X = ; V = ; L = (4.2.1d)

Và dạng (4.2.1d) được viết thành V = AX + L

Vì n > 1 nên hệ (4.2.1c) hay (4.2.1d) luôn có số phương trình lớn hơn ẩn số độc lập

x’j (j = 1 t).

**4.2.2 Thành lập hệ phương trình chuẩn**

Theo nguyên lý số bình phương nhỏ nhất dạng : = VTPV = min

Trong đó P =

= VTPV = (AX + L)T.P.(AX + L) = min hay = 2XT. AT.P.A + 2L.P.A = 0

Hay (AT.P.A).X + AT.P.L = 0

Đặt: a) N = AT.P.A = (ma trận đối xứng qua đường chéo chính, kích thước txt)

b) M = AT.P.L = = (là ma trận số hạng tự do, kích thước tx1)

Ta sẽ viết được NX + M = 0 (4.2.2.1)

NX + M = (4.2.2.1a)

Hệ (4.2.2.1) được gọi là hệ phương trình chuẩn dạng ma trận và hệ (4.2.2.1a) là hệ phương chuẩn dạng tuyến tính.

**4.3 Phương trình số hiệu chỉnh đối với lưới độ cao**

Xây dựng công thức tổng quát phương trình số hiệu chỉnh của hiệu chênh cao đo.

Ẩn số: trị bình sai của độ cao các điểm cần xác định.

Để có dạng tổng quát của phương trình số hiệu chỉnh của hiệu chênh cao đo, ta xét tuyến đo (4.3.1)

Nếu chọn các ẩn số là trị bình sai của độ cao Hk’ và H’j của hai điểm (K) và (j), thì từ hình (4.3.1) ta viết được:

h’=h+vh=( Hoj+dHj)-(Hok+dHk)= dHj - dHk + (Hoj - Hok ) = dHj - dHk + h o

Hay

vh= dHj - dHk + (h o-h) = dHj - dHk +Ih(4.3.2)

Công thức (4.3.2) cho ta dạng tổng quát của phương trình số hiệu chỉnh của hiệu chênh độ cao có ẩn số chọn là trị bình sai của độ cao các điểm cần tìm K và j. Trường hợp điểm j là điểm cho trước độ cao (không có sai số), công thức (4.3.2) nhận dạng đặc biệt (4.3.2a) như sau:

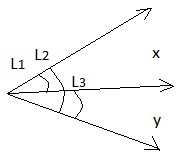
vk=-dHk+Ih1(4.3.2a)

Nếu điểm (K) là điểm có độ cao cho trước không có sai số, thì (4.3.2) sẽ có dạng (4.3.2b):

vh=dHj - Ih2(4.3.2b)

**4.4 Các dạng phương trình số hiệu chỉnh đối với lưới mặt bằng**

Xây dựng phương trình số hiệu chỉnh của các trị đo phương vị, trị đo góc, trị đo cạnh.

Ẩn số: trị bình sai của toạ độ điểm cần xác định của lưới.

Trạm đo góc phẳng là một cấu trúc thành phần của lưới toạ độ phẳng, nên trước khi xét dạng của các phương trình số hiệu chỉnh của các trị đo trong lưới toạ độ phẳng, chúng ta khảo sát cách viết phương trình số hiệu chỉnh của trị đo trong bình sai gián tiếp trạm đo góc và chọn ví dụ đơn giản ở hình (4.4)

Trạm đo (4.4) có các trị đo cần thiết:

t = S-1= 2

nên có thể chọn 2 ẩn số x’ và y’ theo phương án như ở hình vẽ

Trên cơ sở của các ẩn số x’ và y’ đã chọn, phương trình số hiệu chỉnh của các trị đo của trạm đo viết được bằng cách so sánh trị bình sai của các trị đo với các ẩn số. Ta có

L’1=L1+v1 =x’

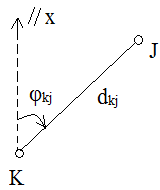
L’2=L2+v2 =x’ + y’

L’3=L3+v3 = y’

Áp dụng nguyên tắc trên ta có thể viết được phương trình số hiệu chỉnh của bất kỳ trị đo nào trong trạm đo góc được bình sai phương pháp gián tiếp.

**4.4.1 Phương trình số hiệu chỉnh cạnh**

Giả sử có cạnh đo dkj giữa điểm đầu (K) và điểm cuối (j) trên hình (4.4.1a). Góc phương vị của cạnh đó ký hiệu là φkj

Với cạnh đo dkj ta viết đẳng thức:

d’kj = dkj + vd = dokj + d(dkj)hay

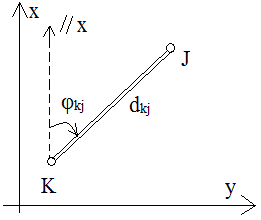
vd =(dokj - dkj) + d(dkj) = Id + d(dkj)

Khi nhận trị bình sai của các toạ độ các điểm (K) và (j) làm ẩn số thì vì

d2kj = (xj –xk)2 +(yj -yk)2 =d(xj, xk, yj, yk)

Vi phân toàn phần và đạo hàm biểu thức trên. Thay các đạo hàm trên vào d(dkj) và sau đó vào vd ta nhận được dạng tổng quát phương trình số hiệu chỉnh của trị đo cạnh dạng:

vd= - cosdxk – sin dyk + cosdxj + sindyj + ld

**4.4.2 Phương trình số hiệu chỉnh góc phương vị**

Góc phương vị φkj của cạnh (kj) là góc tạo bởi hướng bắc và hướng của cạnh đó tính theo chiều thuận của kim đồng hồ kể từ hướng bắc.

Ta biểu diễn góc phương vị φkj trên hình( 4.4.2)

Với trị đo góc phương vị ta viết được đẳng thức:

φkj’= φkj +v φ

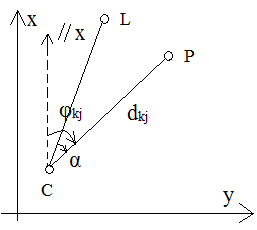
Hay nếu chọn trị bình sai của toạ độ các điểm đầu (K) và điểm cuối (j) làm ẩn số, thì để có phương trình số hiệu chỉnh của phương vị đo φkj, ta biểu diễn góc φkj dưới dạng hàm các ẩn số đó và tìm vi phân dφkj

Phương trình hiệu số điều chỉnh của trị đo phương vị dạng

= bkjdxk - akj dyk - bkjdxj + akj dyj +l

Cần chú ý rằng các trị đo có đơn vị (‘’) thì khi tính các hệ số hướng akj và bkj ta phải nhân với ρ’’

**4.4.3 Phương trình số hiệu chỉnh góc**

Góc đo α là hiệu của phương vị hướng phải và phương vị của hướng trái tương ứng. Trên hình (4.4.3) hướng ( CL), (CP) lần lượt là hướng trái và hướng phải của góc đo α. Ta ký hiệu các điểm L, C, P lần lượt là điểm trái, điểm đỉnh và điểm phải của góc đó. Muốn xác định các hướng trái và phải, chúng ta đứng trên điểm đỉnh C và nhìn về phía góc đo α.

Đối với trị đo góc α ta cũng viết được đẳng thức:

α’ = α +vα = αo +dα

hayvα = (αo – α) +dα =la + dα

Khi nhận trị bình sai của toạ độ các điểm trái ( L), điểm phải ( P), điểm đỉnh (C) làm ẩn số thì từ quan hệ

Thay dα vào phương trình số hiệu chỉnh vα ta có phương trình đó dưới dạng hệ ký hiệu Hausbrandt:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| = | dxL dyL  aL bL | dxP  dyP  - aP - bP | dxC  dyC  (aP - aL) (bP - bL) | + lα |  |

Ở đầu hàng của ký hiệu Hausbrandt ta lần lượt viết gia số toạ độ dx và dy của điểm trái (L) và điểm phải ( P), điểm đỉnh (C). Hàng thứ 2 viết các hệ số hướng tương ứng của hướng trái aL , hướng phải ( có dấu -) và các hiệu của hệ số hướng phải và hướng trái.

**4.5 Giải hệ phương trình chuẩn và đánh giá độ chính xác**

Hệ phương trình chuẩn có dạng: NX + M = 0

Với N = AT. P. A và M = AT. P. L

 Cho sơ đồ lưới thủy chuẩn trình bày theo hình sau: Các điểm A, B và C là điểm gốc có độ cao tương ứng HA = 17,637, HB= 25,950 và HC= 19,000 m. Các điểm 1, 2, 3 là điểm cần xác định độ cao. Trị đo chênh cao và chiều dài của từng tuyến cho ở bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Stt | Tuyến | Chênh cao (m) | Chiều dài (km) |
| 1 | A🡪1 | 4,694 | 10,1 |
| 2 | 1🡪2 | 8,322 | 9,8 |
| 3 | 3🡪1 | 1,365 | 10,0 |
| 4 | 3🡪2 | 6,945 | 14,2 |
| 5 | 2🡪B | -4,690 | 11,6 |
| 6 | C🡪3 | 4,700 | 12,3 |

a, Bình sai gián tiếp mạng lưới trên và tính độ cao các điểm 1, 2 và 3.

b, Đánh giá độ chính xác độ cao điểm 1, 2 và 3.

* Xác định tham số (t)

Tham số cần xác định chính là các độ cao: H1, H2, và H3 với trị sơ bộ của chúng là

(m)

(m)

(m)

* Xác định ma trận trọng số P của trị đo

Trong lưới thuỷ chuẩn, trọng số của các tuyến được tính theo công thức  với Li là chiều dài của tuyến i và c là hằng số. Nếu chọn c = 10.0 km, ta có

P = diag(0.99, 1.02, 1.00, 0.70, 0.86, 0.81)

* Xác định ma trận hệ số của tham số A và véc tơ sai số khép W

# Phương trình tham số của các trị đo là

⇒ với 

⇒ với 

⇒ với 

⇒ với 

⇒ với 

⇒ với 

* Xác định ma trận phương trình chuẩn N và ma trận trọng số đảo của tham số Qx



* Tính số hiệu chỉnh tham số và giá trị của tham số sau bình sai



Vậy 





* Tính số hiệu chỉnh trị đo và sai số trung phương đơn vị trọng số





* Xác định sai số trung phương độ cao sau bình sai của điểm 1, 2 và 3





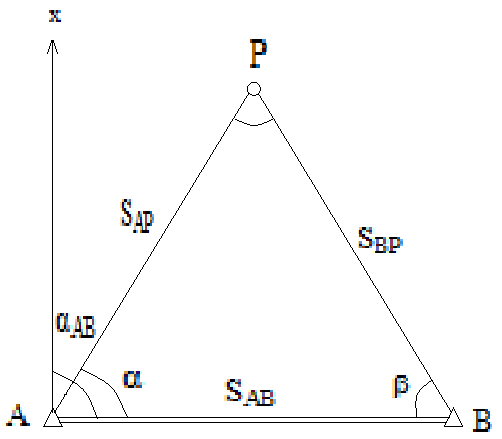


**CHƯƠNG V. PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TOẠ ĐỘ**

**CÁC ĐIỂM SAU BÌNH SAI**

**5.1 Các phương pháp giao hội xác định điểm**

Khi cần chêm dày thêm điểm khống chế toạ độ vào giữa các điểm khống chế cấp cao đã có trên khu đo, ta dùng phương pháp giao hội xác định điểm là thuận lợi hơn cả. Tuỳ theo phương pháp đo mà người ta chia ra làm hai loại: giao hội thuận, giao hội nghịch.

**5.1.1 Phương pháp giao hội thuận**

Có hai điểm khống chế cấp cao A, B đã biết toạ độ. Muốn xác định toạ độ của điểm P theo phương pháp giao hội thuận người ta đặt máy tại điểm A và B, đo các góc nằm ngang α và β. Có thể ứng dụng nhiều phương pháp để tính toạ độ điểm P.

1. **Giải tam giác và tính toạ độ**

Từ toạ độ của 2 điểm đã biết A, B dùng bài toán ngược tính ra chiều dài cạnh SAB và góc phương vị αAB:

αAB = art

SAB = =

Dùng hai góc đo và cạnh SABtính ra chiều dài cạnh SBP, SAP:

SAP = ; SBP =

Tính góc phương vị cạnh AP, BP:

αAP = αAB – α

αBP = αBA + β

Tính toạ độ điểm P:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| XP = XA + SAP. cos αAP  YP = YA + SAP. sin αAP | Hoặc: | XP = XB + SBP. cos αBP  YP = YB + SBP. sin αBP |

Hai giá trị toạ độ tính được theo hai cách trên , chỉ chênh lệch nhau do sai số tính toán gây ra.

1. **Tính toạ độ theo công thức IUNG**

Tọa độ của điểm P có thể tính trực tiếp từ tọa độ điểm A, B và các góc đo α, β theo công thức:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.12a) |

Chứng minh: ta có:

Từ hình vẽ và công thức trên ta có thể viết:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | (5.1.12b) | | | |
| ⇔ | | (5.1.12c) | | |
| ⇔ | | | (5.1.12d) | |
| ⇔ | | | | (5.1.12e) |

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABP, ta có :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | (5.1.12f) | |
| ⇔ | | (5.1.12g) |

Thay (5.1.12g) vào (5.1.12e) ta được (5.1.12a).

1. **Tính toạ độ theo công thức Gauss**

Theo công thức Gauss, tọa độ điểm P được tính từ tọa độ hai điểm A, B và hai góc phương vị αAP, αBP.

- Tính phương vị αAP, αBP theo công thức

- Ta có:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| , | (5.1.13a) | |
| ⇔ | | (5.1.13b) |

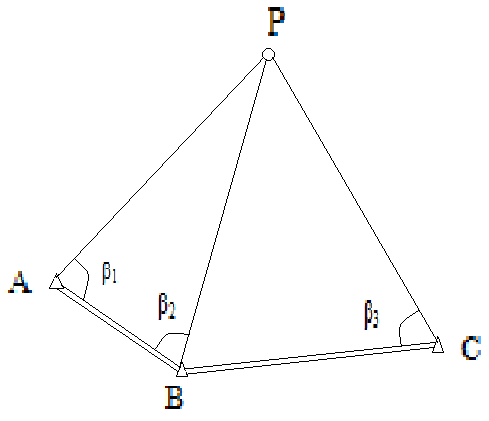
Đây là hệ phương trình với hai ẩn số XP, YP. Nghiệm của hệ này là:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.13c) |
| Hoặc: | (5.1.13d) |

1. **Độ chính xác giao hội thuận**

Vị trí điểm P được xác định bằng hai toạ độ XP, YP. Nếu xác định được sai số trung phương toạ độ là mx và my thì sai số trung phương vị trí điểm P sẽ được tính theo công thức:

M =

 Nhờ phương pháp xác định sai số trung phương hàm số thông qua bình sai gián tiếp kết quả đo, người ta tìm ra công thức ước lượng sai số trung phương vị trí điểm giao hội thuận như sau:

M = SAB. .

M = .

Trong đó:

- sai số trung phương đo góc α và β;

SAB- chiều dài cạnh góc nối hai điểm A, B;

γ = 180o – (α + β) là góc hợp bởi hai hướng giao hội.

Từ công thức ta thấy rằng: Sai số vị trí điểm giao hội tỷ lệ thuận với độ lớn của sai số đo góc và độ lớn cạnh đáy giao hội, tỷ lệ nghịch với . Sai số M sẽ nhỏ nhất khi góc giao hội γ = 90o. Chính vì lẽ đó người ta thường yêu cầu bố trí điểm giao hội thuận sao cho góc giao hội càng gần 90o càng tốt.

Khi giao hội thuận từ hai hướng ta chỉ có các trị đo vừa đủ để giải toán mà chưa có trị đo thừa để kiểm tra. Để có điều kiện kiểm tra và nâng cao độ chính xác vị trí điểm P , người ta quy định khi xác định điểm khống chế đo vẽ bằng phương pháp giao hội thuận phải đo góc tại 3 điểm khống chế.

Từ cặp điểm A, B ta tính được toạ độ điềm P là x’P, y’P. Từ cặp điểm B, C ta tính được toạ độ điểm x’’P, y’’P. Độ lệch của hai cặp toạ độ điểm P phải nhỏ hơn một giá trị cho phép được quy định trước, tuỳ thuộc vào độ chính xác cần thiết của điểm P.

Nếu độ lệch giữa hai giá trị toạ độ nhỏ hơn sai số cho phép thì lấy trị trung bình để được xP, yP chính xác.

**5.1.2 Phương pháp giao hội nghịch**

***Hình 5.1.2a: Đồ hình giao hội nghịch***



Nội dung của phương pháp: Đặt máy đo góc tại điểm cần xác định toạ độ, đo góc đến các điểm khống chế cấp cao.

- Yếu tố có sẵn : Tọa độ hai điểm A, B, C;

- Yếu tố đo: Hai góc β1, β2;

- Yếu tố cần xác định : Toạ độ điểm P.

***Các phương pháp tính tọa độ điểm P***

1. **Tính tọa độ điểm P theo phương pháp góc phụ.**

***Hình 5.1.2b: Góc phụ trong đồ hình giao hội nghịch***



Hai góc phụ ϕ và ψ được xác định như trên hình 5.1.2b.

- Tính hai góc phụ ϕ và ψ

Từ hình 5.1.2a ta có:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21a) |

Suy ra:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21b) |

Trong đó γ được tính từ tọa độ các điểm A, B, C:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21c) |

Trong tam giác ABP ta có:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21d) |

Trong tam giác CBP ta có:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21e) |

Từ (6-76) và (6-77) suy ra :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21f) |
| Đặt | (5.1.21g) |

Bằng lượng giác, ta chứng minh được:

***Hình 5.1.2c: Đồ hình giao hội nghịch***



|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.21h) |

Theo (5.1.21b), ta xác định được tổng (ϕ + ψ); theo (5.1.21g) xác định được a, thay a vào (5.1.21h) ta xác định được (ϕ - ψ). Từ tổng (ϕ + ψ) và hiệu (ϕ - ψ) ta giải được ϕ và ψ.

Khi biết ϕ và ψ, áp dụng công thức trong giao hội thuận góc để tính tọa độ điểm P.

1. **Tính tọa độ điểm P theo phương pháp Dalambe.**

Đặt máy tại điểm cần xác định P, đo đến ba điểm khống chế A, B, C được hai góc β1 và β2.

Gọi αPA, αPB, αPC tương ứng là các góc định hướng của cạnh PA, PB, PC. Bằng hình học và lượng giác ta chứng minh được:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.22a) |

Từ hình vẽ ta có:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.1.22b) |
|  |  |

Khi đã biết ba giá trị phương vị αPA, αPB, αPC, sử dụng công thức Gauss để tính tọa độ điểm P.