CHƯƠNG 1: CƠ HỌC GIẢI TÍCH

1.1. Các khái niệm cơ bản về cơ hệ không tự do

1.1.1. Cơ hệ không tự do

Cơ hệ không tự do là tập hợp các chất điểm mà trong đó chuyển động của các chất điểm thuộc cơ hệ không những chỉ phụ thuộc vào lực tác dụng mà còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.

1.1.2. Liên kết

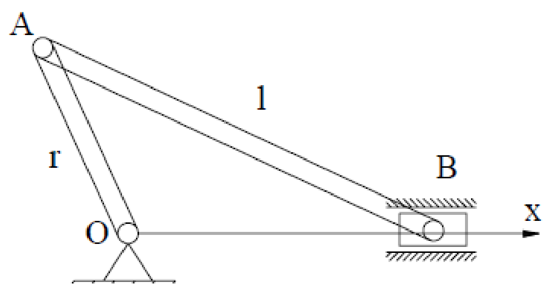
a. Định nghĩa

Liên kết là những điều kiện ràng buộc chuyển động về mặt hình học và động học của cơ hệ. Những điều kiện này không phụ thuộc vào lực tác dụng và điều kiện ban đầu.

b. Phương trình liên kết

Phương trình liên kết là các phương trình hay bất phương trình biểu thị về mặt toán học sự ràng buộc về mặt hình học và động học của các chất điểm thuộc cơ hệ. Chúng có dạng như sau:

$$f_i(t, \overrightarrow{r_k}, \overrightarrow{v_k}) \geq 0$$



trong đó: k = $\overline{1,n}$; $i = \overline{1,s}$ với s là số phương trình liên kết.

Với cơ cấu tay quay, thanh truyền như hình vẽ, ta có thể viết các phương trình liên kết của cơ cấu phẳng tay quay thanh truyền như sau:

$$x(0) = y(0) = 0$$

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2$$

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l^2$$

$$y_B = 0$$

c. Phân loại liên kết

Dựa vào dạng của phương trình liên kết mà ta phân loại các liên kết.

Liên kết dừng: là liên kết mà phương trình của nó không chứa yếu tố thời gian.

$$f_i(\vec{r_k}, \vec{v_k}) \geq 0$$

Liên kết không dừng: là liên kết mà phương trình của nó có chứa yếu tố thời gian t. $f_i(t, \vec{r_k}, \vec{v_k}) \geq 0$

Liên kết hình học: là liên kết mà phương trình liên kết của nó không chứa yếu tố vận tốc $\vec{v_k}$ hoặc nếu có ta có thể tích phân được để đưa về dạng không chứa yếu tố vận tốc.

Liên kết động học: là liên kết mà phương trình liên kết của nó chứa yếu tố vận tốc $\vec{v_k}$.

Từ phần này trở đi, tất cả các liên kết mà chúng ta xét đều là liên kết dừng và hình học, nghĩa là

$$f_i(\vec{r_k}) = 0 \Leftrightarrow f_i(x_k, y_k, z_k) = 0$$

1.1.3. Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do của cơ hệ

a. Định nghĩa

Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là tập hợp các di chuyển vô cùng bé mà mỗi chất điểm của cơ hệ có thể thực hiện được để sao cho phù hợp với liên kết tại vị trí đang xét.

Di chuyển khả dĩ của chất điểm được ký hiệu $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$ với $\vec{r}$ là vectơ định vị của chất điểm, còn di chuyển thực được ký hiệu là $d\vec{r}(dx, dy, dz)$. Di chuyển khả dĩ chỉ có ý nghĩa về mặt hình học, nó không phụ thuộc vào lực tác dụng và thời gian t.

Như vậy, di chuyển khả dĩ hay còn gọi là di chuyển ảo của hệ phải thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ Di chuyển vô cùng bé.

+ Các di chuyển thực hiện được mà không phá vỡ liên kết.

b. Số bậc tự do

Định nghĩa: Số bậc tự do của cơ hệ bằng số di chuyển khả dĩ độc lập của hệ đó.

Giả sử cơ hệ có n chất điểm thì có 3n di chuyển khả dĩ độc lập. Nhưng hệ lại có m phương trình liên kết, do đó số bậc tự do của hệ sẽ là S = 3n – m

Ví dụ: Một chất điểm ở trên đường thẳng có một bậc tự do.

Một chất điểm tự do trong không gian có 3 bậc tự do.

Một vật rắn tự do trong không gian có 6 bậc tự do.

1.1.4. Tọa độ suy rộng và lực suy rộng của cơ hệ

Các tham số độc lập, nếu chúng có số lượng đúng bằng số bậc tự do của hệ và xác định duy nhất được vị trí của hệ thì gọi là các tọa độ suy rộng của hệ.

Ta ký hiệu tọa độ suy rộng bằng: $\{q_i\} = q_1, q_2, ..., q_s$

Tọa độ suy rộng có thể là đoạn thẳng, các cung, các góc, diện tích… Việc chọn tọa độ suy rộng gắn liền với việc xác định số bậc tự do và bằng số di chuyển khả dĩ của cơ hệ.

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Đề-các của chất điểm thuộc cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, ..., q_n)$$

$$y_k = y_k(q_1, q_2, ..., q_n)$$

$$z_k = z_k(q_1, q_2, ..., q_n)$$

Hay $$\vec{r_k} = \vec{r_k}(q_1, q_2, ..., q_n) = x_k\vec{i} + y_k\vec{j} + z_k\vec{k}$$

Khi hệ chuyển động thì các tọa độ suy rộng biến đổi liên tục theo thời gian t, nghĩa là:

$$q_1 = q_1(t)\ ;\ q_2 = q_2(t);\ \ldots\ q_s = q_s(t)$$

Các biểu thức trên gọi là phương trình chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng.

Đạo hàm bậc nhất theo thời gian các tọa độ suy rộng ta thu được vận tốc suy rộng tương ứng của cơ hệ.

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}\ ;\ \dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt};\ \ldots;\ \dot{q}_s = \frac{dq_s}{dt}$$

b. Lực suy rộng

Xét cơ hệ có n chất điểm chịu tác dụng của các lực $\vec{F_1};\vec{F_2};...;\vec{F_n}$. Vì cơ hệ có liên kết hình học nên số tọa độ suy rộng đủ để xác định vị trí của cơ hệ đúng bằng số bậc tự do của cơ hệ đó $q_1, q_2, ..., q_s$.

Nếu cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ, trong đó chỉ có tọa độ suy rộng q_1 biến đổi với số gia δq_1 , còn các tọa độ suy rộng khác không đổi thì vectơ $\vec{r_k}(q_1, q_2, ..., q_s)$ của các chất điểm nhận được một di chuyển nguyên tố là $\delta(\vec{r_k})_1 = \frac{\partial \vec{r_k}}{\partial q_1}.\delta q_1$.

Tổng công nguyên tố của các lực tác dụng lên hệ trên di chuyển $\delta(\vec{r_k})_1$ sẽ là:

$$\delta A_1 = \vec{F_1}\delta(\vec{r_1})_1 + \vec{F_2}\delta(\vec{r_2})_1 + ... + \vec{F_n}\delta(\vec{r_n})_1$$

$$\delta A_1 = \vec{F_1}\frac{\partial \vec{r_1}}{\partial q_1}.\delta q_1 + \vec{F_2}\frac{\partial \vec{r_2}}{\partial q_1}.\delta q_1 + ... + \vec{F_n}\frac{\partial \vec{r_n}}{\partial q_1}.\delta q_1$$

$$\delta A_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = Q_1 \delta q_1 \text{ với } Q_1 = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}$$

Q_1 gọi là lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_1. Tương tự ta có các lực suy rộng $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$. Nếu cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ mà tất cả các tọa độ suy rộng đồng thời biến đổi, khi đó tổng công của các lực tác dụng lên cơ hệ trên di chuyển khả dĩ đó sẽ là:

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j$$

Nếu các lực tác dụng lên hệ là lực có thế. Khi đó:

$$\sum \delta A_k = -\delta \Pi = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \delta q_s \right)$$

Vậy: $Q_1 = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_1}$; $Q_2 = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_2}$; …; $Q_s = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_s}$

Vậy nếu các lực tác dụng lên cơ hệ là lực có thế thì lực suy rộng bằng đạo hàm riêng của thế năng (với dấu "-") theo tọa độ suy rộng tương ứng.

1.2. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

1.2.1. Công khả dĩ

Công khả dĩ là công sinh ra bởi lực tác dụng lên chất điểm trên di chuyển trùng với di chuyển khả dĩ của chất điểm đó.

Công khả dĩ của lực hoạt động $\vec{F}$ trên di chuyển khả dĩ được ký hiệu là: δA^F .

Công khả dĩ của phản lực liên kết $\vec{N}$ trên di chuyển khả dĩ là δA^N .

1.2.2. Liên kết lý tưởng

Liên kết của cơ hệ được gọi là liên kết lý tưởng nếu tổng công nguyên tố của các phản lực liên kết tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^N = \sum \overrightarrow{N_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

1.2.3. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Nội dung: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ có liên kết lý tưởng cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

Chứng minh nguyên lý:

* Điều kiện cần

GT	- Hệ có liên kết lý tưởng - Hệ cân bằng
KL	$\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$

Xét chất điểm thứ k thuộc hệ, chịu tác dụng của $\overrightarrow{F_k}$ và $\overrightarrow{N_k}$. Theo giả thiết:

$$\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k} = 0$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ thì chất điểm thứ k có di chuyển khả dĩ $\delta\overrightarrow{r_k}$. Ta có:

$$\delta A_k = (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k}).\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

Đối với toàn hệ ta có: $\sum \delta A_k = \sum (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k}).\delta\overrightarrow{r_k} = 0 \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_k}.\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{N_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$

$\Rightarrow \sum \overrightarrow{F_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$ (Vì hệ có liên kết lý tưởng)

* Điều kiện đủ:

GT	- Hệ có liên kết lý tưởng - $\sum \delta A_k^F = \sum \overrightarrow{F_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$
KL	- Hệ cân bằng

Giả sử hệ cân bằng, trên hệ có các lực hoạt động thỏa mãn điều kiện

$$\sum \overrightarrow{F_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0.$$

Nếu tại thời điểm nào đó cơ hệ bắt đầu chuyển động thì ta có: $\delta T \neq 0$.

Theo định lý động năng: $\delta T = \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{N_k}\delta\overrightarrow{r_k} \neq 0$

$\Rightarrow \sum \overrightarrow{F_k}\delta\overrightarrow{r_k} \neq 0$ (Vì hệ có liên kết lý tưởng)

Điều này trái với giả thiết nên hệ cân bằng mãi mãi.

Ý nghĩa: Nguyên lý di chuyển khả dĩ thiết lập được điều kiện cân bằng ở dạng tổng quát của cơ hệ bất kỳ. Nó cho phép ta sử dụng phương pháp tĩnh học để giải bài toán động lực một cách tổng quát.

1.2.3. Vận dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ

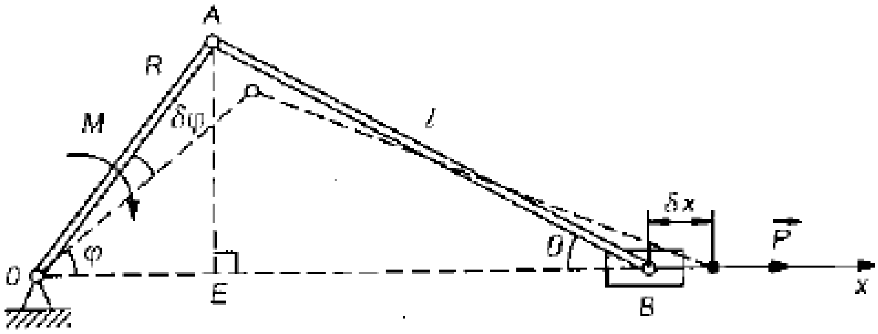
a. Ví dụ 1

Tìm hệ thức liên hệ giữa mômen M của ngẫu lực tác dụng lên tay quay của cơ cấu thanh truyền và áp lực P lên pittông khi cân bằng. Cho biết OA = r và AB = l.

Giải

Cơ cấu có một bậc tự do. Lực $\vec{P}$ và ngẫu lực $\vec{M}$ sinh công.

Cho tay quay di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$, khi đó con trượt B di chuyển δx .



Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ: $M\delta\varphi + P\delta x = 0$

Ta có:

$$r\sin\varphi = l\sin\alpha \Rightarrow r\cos\varphi\delta\varphi = l\cos\alpha\delta\alpha$$

$$\Rightarrow \delta\alpha = \frac{r\cos\varphi}{l\cos\alpha}\delta\varphi = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\delta\varphi$$

Mà:

$$x = r\cos\varphi + l\cos\alpha \Rightarrow \delta x = -r\sin\varphi\delta\varphi - l\sin\alpha\delta\alpha$$

$$\Rightarrow \delta x = (-r\sin\varphi\delta\varphi - r\sin\varphi\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\delta\varphi)$$

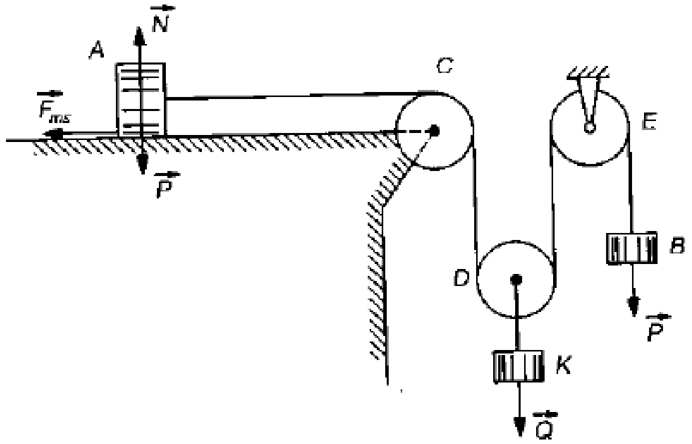
$$\Rightarrow \delta x = -(r\sin\varphi + \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}})\delta\varphi$$

Thế vào pt trên, ta được:

$$M\delta\varphi + P\delta x = 0 \Leftrightarrow M\delta\varphi - P(r\sin\varphi + \frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}})\delta\varphi = 0$$

$$\Rightarrow M = Pr\sin\varphi(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}})$$

b. Ví dụ 2



Người ta buộc hai vật nặng A và B có cùng trọng lượng vào hai đầu một sợi dây không giãn, không trọng lượng. Dây đi từ vật A song song với mặt phẳng ngang không nhẵn, vắt qua ròng rọc cố định C rồi lồng vào ròng rọc động D, sau đó lại vắt qua ròng rọc cố định E và buộc vào vật nặng B. Vật nặng K có trọng lượng Q treo vào trục ròng rọc động D. Xác định trọng lượng P của mỗi vật A và B cũng như hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng ngang, biết rằng hệ ở trạng thái cân bằng. Bỏ qua trọng lượng các ròng rọc.

Giải

Hệ khảo sát gồm các vật A, B, ròng rọc D và vật K. Hệ có hai bậc tự do nên có hai điều kiện cân bằng.

Ta cố định vật A, cho vật B rơi xuống một đoạn δs_B . Khi đó vật K đi lên một đoạn δs_K . Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$-Q\delta s_K + P\delta s_B = 0 \Leftrightarrow -Q.\delta s_K + P.2\delta s_K = 0 \Rightarrow P = \frac{Q}{2}$$

Ta cố định vật B, cho vật K rơi xuống một đoạn δs_K thì vật A di chuyển một đoạn δs_A . Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ:

$$Q\delta s_K - F_{ms}\delta s_A = 0 \Leftrightarrow Q\delta s_K - f.P.2\delta s_K = 0$$
$$\Rightarrow f = \frac{Q}{2P} = 1$$

1.2.2. Điều kiện cân bằng trong tọa độ suy rộng độc lập đủ

a. Trường hợp chung

Theo nguyên lý di chuyển khả dĩ, điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng cân bằng là tổng công nguyên tố của tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không. Trong tọa độ suy rộng, điều kiện đó sẽ là:

$$\sum \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ... + Q_s\delta q_s = 0$$

Vì các $\delta q_1; \delta q_2; ...; \delta q_s$ độc lập nhau nên đẳng thức trên chỉ thỏa mãn khi và chỉ khi: $Q_1 = Q_2 = ... = Q_s = 0$.

Định lý: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ có liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng cân bằng trong tọa độ suy rộng là tất cả các lực suy rộng tương ứng với các tọa độ suy rộng của cơ hệ đều bằng không.

b. Trường hợp các lực có thế

Trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên hệ là những lực có thế và hàm thế năng có dạng là $\Pi = \Pi(q_1; q_2; ...; q_s)$ thì điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng cân bằng tại một vị trí nào đó là hàm thế năng đạt cực trị tại vị trí đó.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = \overline{1, s})$$

1.3. Nguyên lý Đalămbe – Lagrăng (Phương trình tổng quát động lực học)

1.3.1. Nguyên lý Đalămbe – Lagrăng

Xét cơ hệ gồm n chất điểm có liên kết lý tưởng, và đang chuyển động. Ngoài lực hoạt động $\overrightarrow{F_k}$ và phản lực liên kết $\overrightarrow{N_k}$, ta thêm vào chất điểm thứ k lực $\overrightarrow{F_k^{qt}} = -m_k \overrightarrow{\mathrm{W}_k}$.

Theo nguyên lý Đalămbe ta thu được một hệ lực cân bằng:

$$\left(\overrightarrow{F_k}; \overrightarrow{N_k}; \overrightarrow{F_k^{qt}}\right) \sim 0$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ, áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ ta có:

$$\sum \left(\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{N_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}}\right).\delta\overrightarrow{r_k} \sim 0 \Leftrightarrow \sum (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}})\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{N_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

Vì hệ đang xét có liên kết lý tưởng nên $\sum \overrightarrow{N_k}.\delta\overrightarrow{r_k} = 0$. Do đó

$$\sum (\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F_k^{qt}})\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình tổng quát động lực học hay còn gọi là nguyên lý Đalămbe – Lagrăng.

Phát biểu nguyên lý: Nếu cơ hệ có liên kết lý tưởng thì tại mỗi thời điểm, tổng công nguyên tố của các lực hoạt động và lực quán tính đặt vào cơ hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không.

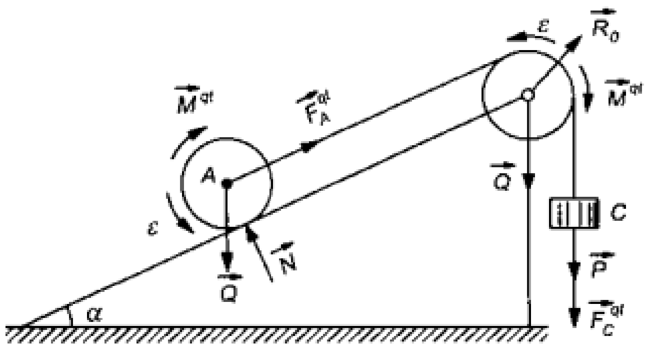
Phương trình động lực học có thể được viết dưới dạng giải tích như sau:

$$\sum \left[(F_{kx} + F_{kx}^{qt})\delta x_k + (F_{ky} + F_{ky}^{qt})\delta y_k + (F_{kz} + F_{kz}^{qt})\delta z_k \right] = 0$$

1.3.2. Áp dụng nguyên lý

a. Ví dụ 1

Một con lăn A trọng lượng Q trong khi lăn không trượt xuống dưới theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α , đã nâng vật C trọng lượng P nhờ một sợi dây không giãn, không trọng lượng vắt qua ròng rọc cố định B. Khi đó ròng rọc B quay quanh trục cố định đi qua tâm O của nó và trực giao với mặt phẳng của ròng rọc. Con lăn A và ròng rọc B là những đĩa tròn đồng chất có cùng bán kính và trọng lượng. Tìm gia tốc của trục con lăn.



Giải

Hệ khảo sát gồm: Con lăn A, ròng rọc B, vật nặng C và dây. Hệ có một bậc tự do.

Các lực chủ động gồm: $\vec{Q};\vec{P}$

Phản lực liên kết gồm: $\vec{N};\vec{R_o}$

Các lực quán tính gồm: $\overrightarrow{F_C^{qt}} = -m_c\overrightarrow{W_C} = -\dfrac{P}{g}\overrightarrow{W_C}$

$$\overrightarrow{F_A^{qt}} = -m_A\overrightarrow{W_A} = -\frac{P}{g}\overrightarrow{W_A}$$

$$M_{qt} = J.\varepsilon = \frac{1}{2}m_A R^2.\varepsilon = \frac{Q}{2g}R^2\varepsilon$$

Áp dụng phương trình tổng quát động lực học, ta có:

$$(Q\sin\alpha - F_A^{qt})\delta s - (P + F_C^{qt})\delta s - 2M^{qt}\delta\varphi = 0$$
$$\Leftrightarrow (Q\sin\alpha - \frac{Q}{g}W_A)\delta s - (P + \frac{P}{g}W_C)\delta s - 2\frac{Q}{2g}R^2\varepsilon\delta\varphi = 0$$

Vì dây không dãn nên: $W_A = W_C = W$, $\delta s = R\delta\varphi$

Thế vào phương trình trên và biến đổi:

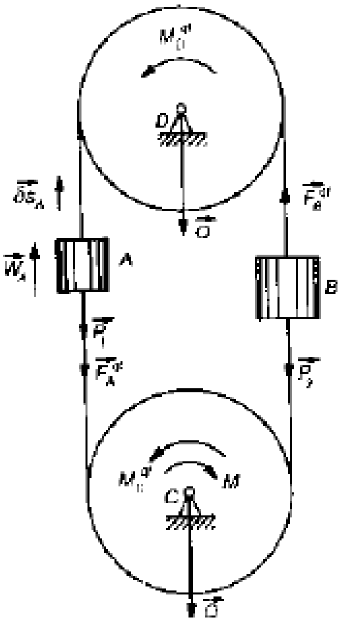
$$(Q\sin\alpha - \frac{Q}{g}\mathrm{W})\delta s - (P + \frac{P}{g}\mathrm{W})\delta s - 2\frac{Q}{2g}R^2\frac{\mathrm{W}}{R}\frac{\delta s}{R} = 0$$

$$\Leftrightarrow Q\sin\alpha - \frac{2Q+P}{g}\mathrm{W} - P = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{W} = \frac{Q\sin\alpha - P}{2Q+P}g$$

b. Ví dụ 2

Hai vật A và B có trọng lượng P_1 và P_2 được buộc vào sợi dây vòng qua hai ròng rọc C, D. Để đưa vật A lên, người ta tác dụng vào ròng rọc C một ngẫu lực có mômen M không đổi. Các ròng rọc C, D có cùng trọng lượng Q, bán kính R. Tìm gia tốc vật A, bỏ qua khối lượng dây.



Giải

Cơ hệ gồm có hai ròng rọc và hai vật A, B. Hệ có một bậc tự do.

Các lực hoạt động gồm: $\vec{P_1}$; $\vec{P_2}$; $\vec{Q}$, M

Các lực quán tính gồm:

$$F_{qt}^{A} = \frac{P_1}{g}\mathrm{W}_A \; ; \; F_{qt}^{B} = \frac{P_2}{g}\mathrm{W}_B \; ; \; M_C^{qt} = M_D^{qt} = J.\varepsilon = \frac{Q}{2g}R^2\varepsilon = \frac{Q}{2g}R\mathrm{W}_A$$

Vì dây không giãn nên ta có: $\mathrm{W}_A = \mathrm{W}_B$, $\delta s_A = \delta s_B$

Áp dụng nguyên lý Đalămbe – Lagrăng ta có:

$$(-P_1 - F_{qt}^{A})\delta s_A + (P_2 - F_{qt}^{B})\delta s_B + M\delta\varphi - 2M^{qt}\delta\varphi = 0$$

Thế các lực quán tính vào và biến đổi (lưu ý: $\delta s_A = \delta s_B = R\delta\varphi$), ta được:

$$\mathrm{W}_A = \frac{M + R(P_2 - P_1)}{R(Q + P_1 + P_2)}g$$

1.4. Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ không tự do

1.4.1. Phương trình Lagrăng loại II

a. Trường hợp chung

Từ phương trình tổng quát động lực học, ta có:

$$\sum\left((\overrightarrow{F_k}+\overrightarrow{F_k^{qt}}\right)\delta\overrightarrow{r_k}=0 \Leftrightarrow \sum\delta A_k^F+\sum\delta A_k^{qt}=0$$

Giả sử hệ có s bậc tự do và vị trí của cơ hệ được xác định bởi các tọa độ suy rộng q_1, q_2, … q_n. Ta có:

$$\sum\delta A_k^F=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\ldots+Q_s\delta q_s$$

$$\sum\delta A_k^{qt}=Q_1^{qt}\delta q_1+Q_2^{qt}\delta q_2+\ldots+Q_s^{qt}\delta q_s$$

Với $Q_1^{qt}=\sum\overrightarrow{F_k^{qt}}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}$; $Q_2^{qt}=\sum\overrightarrow{F_k^{qt}}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_2}$; …; $Q_s^{qt}=\sum\overrightarrow{F_k^{qt}}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_s}$ là các lực quán tính suy rộng.

Thay vào phương trình trên ta được:

$$(Q_1+Q_1^{qt})\delta q_1+(Q_2+Q_2^{qt})\delta q_2+\ldots+(Q_s+Q_s^{qt})\delta q_s=0$$

$$\Rightarrow Q_1+Q_1^{qt}=0\ ;\ Q_2+Q_2^{qt}=0\,;\ \ldots;\ Q_s+Q_s^{qt}=0$$

Ta có: $Q_1^{qt}=-\sum m_k\overrightarrow{W_k}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}=-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(m_k\overrightarrow{V_k}\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\right)-m_k\overrightarrow{V_k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\right)\right]$

mà $\overrightarrow{V_k}=\frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt}=\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}=\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_2}\dot{q}_2+\ldots+\frac{\partial\overrightarrow{r_k}}{\partial q_s}\dot{q}_s$

với $\dot{q}_1;\dot{q}_2;\ldots;\dot{q}_s$ là vận tốc suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng q_1, q_2, …, q_s.

Đạo hàm $\overrightarrow{V_k}$ theo vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$, ta được:

$$\frac{\partial \overrightarrow{V_k}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_k}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}$$

Thay đổi thứ tự lấy đạo hàm, ta được:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt}\right) = \frac{\partial \dot{\overrightarrow{r_k}}}{\partial q_i}$$

Thay hai phương trình trên vào biểu thức của lực quán tính, thực hiện một số phép biến đổi, ta có:

$$Q_1^{qt} = -\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k V_k^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k V_k^2\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow Q_1^{qt} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}\right] \Rightarrow Q_1 = -Q_1^{qt} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1}\right]$$

Đối với các lực quán tính suy rộng khác, ta có các biểu thức tương tự. Vậy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2$$

……

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s$$

Đây là hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ trong tọa độ suy rộng, hay còn gọi là phương trình Lagrăng loại II.

Nếu các lực tác dụng lên hệ là lực có thế thì

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}$$

……

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$$

Do $\Pi(q_1,q_2,...,q_s)$ không phụ thuộc các vận tốc suy rộng $\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s$ nên các phương trình trên có thể viết:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_1}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_2}=0$$

……

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_s}=0$$

Ta gọi $L=T-\Pi$ là hàm Lagrăng thì phương trình Lagrăng loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0$$

……

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0$$

Phương trình Lagrăng loại II cho ta phương pháp tổng quát để giải bài toán động lực học.

1.4.2. Các tích phân đầu của chuyển động

a. Tích phân năng lượng

Xét hệ có n chất điểm chịu liên kết lý tưởng, hình học, giữ và dừng. Giả sử vị trí của cơ hệ được xác định bởi s tọa độ suy rộng độc lập và đủ q_1, q_2, …, q_s và các lực hoạt động đều là lực có thế. Khi đó phương trình Lagrăng loại II sẽ là:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad \text{với } i = 1,2, \ldots, s$$

Trong đó T và Π là động năng và thế năng của hệ được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng độc lập đủ. Ta có: $\overrightarrow{V_k}=\frac{d\overrightarrow{r_k}}{dt}=\sum\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\dot{q}_i$

Và động năng T được tính theo các vận tốc suy rộng

$$T=\sum\frac{1}{2}m_k V_k^2=\frac{1}{2}\sum m_k\overrightarrow{V_k}\overrightarrow{V_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\dot{q}_i\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

Nếu ký hiệu $\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_i}\frac{\partial \overrightarrow{r_k}}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j=a_{ij}$ gọi là hệ số quán tính của cơ hệ với $a_{ij}=a_{ji}$ thì động năng của hệ là $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$

Vậy động năng của cơ hệ là hàm đẳng cấp bậc hai đối với các vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$. Do đó ta có hệ thức sau:

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T$$

Ta nhân cả hai vế của phương trình Lagrăng với vận tốc suy rộng $\dot{q}_i$ rồi lấy tổng cả hai vế theo chỉ số i, ta được:

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

Mà $\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s}\dot{q}_s = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\dot{q}_i$

Mặt khác

$$\sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum \frac{d}{dt}\left(2\dot{T}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

$$= 2\frac{dT}{dt} - \left(\frac{dT}{dt} - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \frac{dT}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\Rightarrow \sum \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{dT}{dt} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\Rightarrow -\sum \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{dT}{dt} \Leftrightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0$$

$$\Rightarrow T + \Pi = E = \text{const}$$

Vậy cơ năng của hệ được bảo toàn. Đẳng thức trên gọi là tích phân năng lượng, còn E được gọi là hằng số năng lượng, nó được xác định từ điều kiện ban đầu của chuyển động.

b. Tích phân xyclic

Định nghĩa tọa độ xyclic: Tọa độ suy rộng q_k nào đó được gọi là tọa độ xyclic nếu

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0; \quad Q_k = 0$$

Tức là q_k là tọa độ xyclic nếu nó không có mặt trong biểu thức động năng, thế năng của cơ hệ, còn lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với nó bằng không.

Phương trình Lagrăng loại II ứng với tọa độ xyclic q_k là:

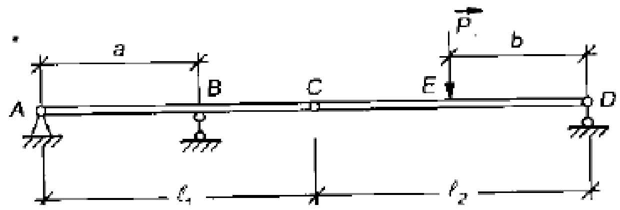
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \text{const}$$

Đẳng thức này gọi là tích phân xyclic.

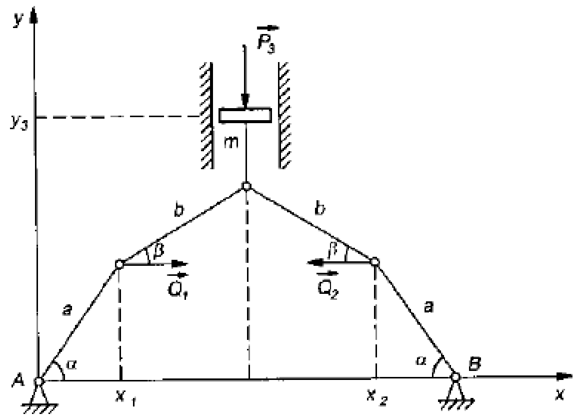
BÀI TẬP

I. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

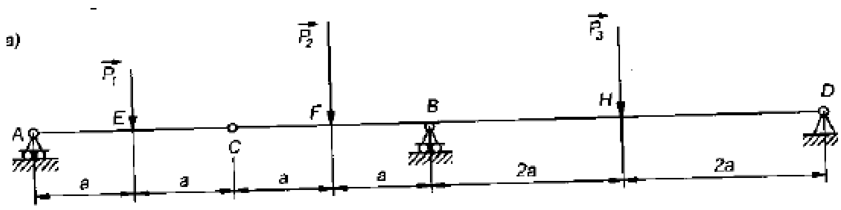
Bài 1: Hai dầm AC và CD nối với nhau bằng bản lề tại C và chịu tác dụng của lực P đặt tại E. Kích thước cho như trên hình vẽ. Tìm phản lực tại gối tựa B, bỏ qua trọng lượng các dầm.



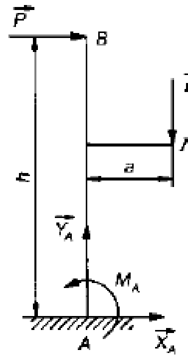
Bài 2: Cho sơ đồ một máy nén như hình bên dưới. Tìm liên hệ giữa các lực $\vec{Q_1};\vec{Q_2};\vec{P_3}$ khi hệ cân bằng ($Q_1 = Q_2 = Q$ và $P_3 = P$). Góc α và β cho trước. Bỏ qua trọng lượng các thanh.



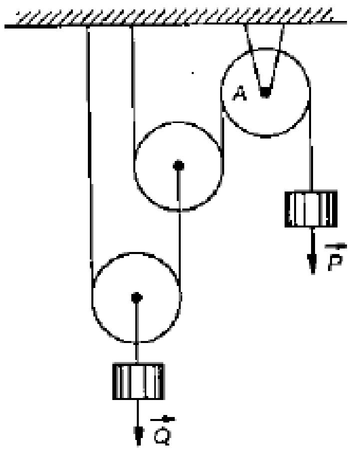
Bài 3: Cho hệ thanh chịu lực và chịu liên kết như hình bên dưới. Cho $P_1 = 2kN$; $P_2 = 6kN$; $P_3 = 3kN$. Tính phản lực tại A, B, D.



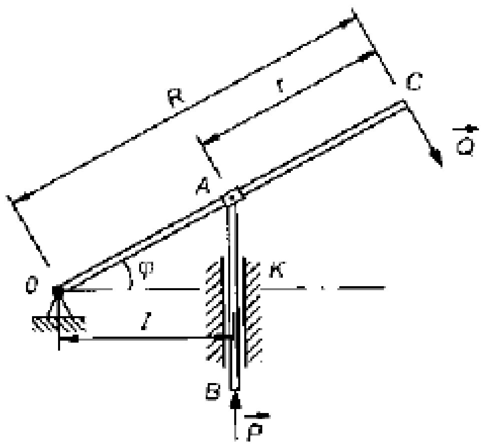
Bài 4: Cột AB chịu liên kết ngàm tại A và chịu lực như hình bên dưới. Hãy tìm phản lực tại A.



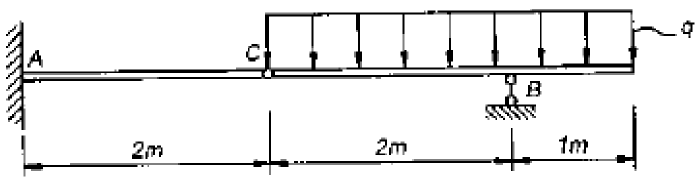
Bài 5: Một cơ hệ gồm có ròng rọc cố định A và n ròng rọc động. Xác định tỷ số giữa tải trọng được nâng Q và lực P đặt vào đầu dây vắt qua ròng rọc cố định A để hệ cân bằng



Bài 6: Cho một cơ cấu thanh trượt. Khi tay quay OC quay quanh trục nằm ngang O thì con chạy A chuyển dịch dọc theo tay quay OC làm cho thanh AB chuyển động trong rãnh thẳng đứng K. Cho biết OC = R, OK = l . Tại C cần phải đặt lực Q vuông góc với OC bằng bao nhiêu để cân bằng với lực P tác dụng vào thanh AB như hình bên.

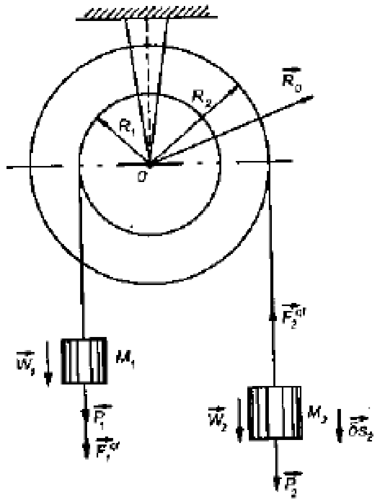


Bài 7: Cho hệ dầm như hình vẽ. Tìm các phản lực tại A và B. Cho biết q = 4,9N/m.

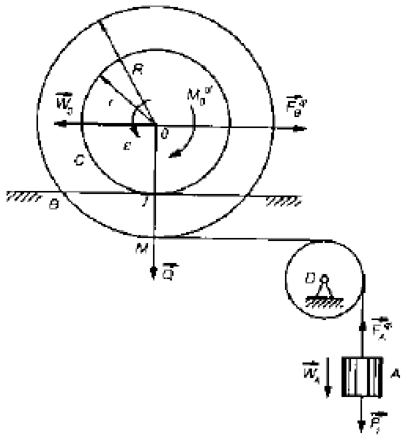


II. Nguyên lý Đalămbe – Lagrăng (phương trình tổng quát động lực học)

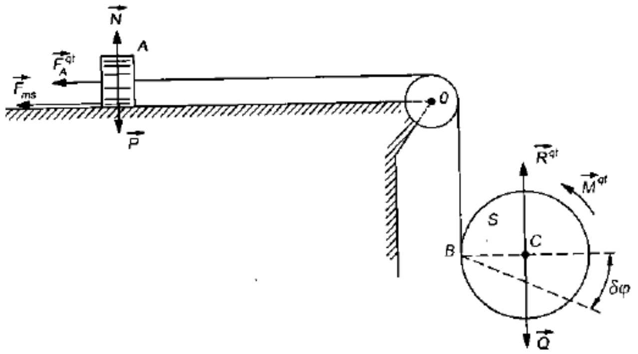
Bài 8: Hai tải trọng M_1 trọng lượng P_1, M_2 trọng lượng P_2 treo vào hai sợi dây mềm không dãn cuốn vào hai tang quay cùng trục có bán kính R_1, R_2. Tải trọng chuyển động dưới tác dụng của trọng lượng ($P_2>P_1$). Bỏ qua khối lượng các tang quay và dây. Xác định gia tốc của tang quay.

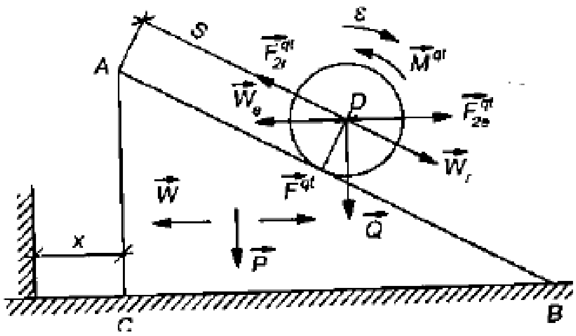


Bài 9: Vật A có trọng lượng P được hạ xuống nhờ sợi dây không dãn, không trọng lượng vắt qua ròng rọc D cố định không trọng lượng cuốn vào bánh xe B làm cho trục C lăn không trượt trên đường ray ngang. Hai bánh xe B và C lồng vào nhau, trọng lượng chung là Q và bán kính quán tính đối với trục O là ρ . Tìm gia tốc của vật A.



Bài 10: Một vật A trọng lượng P được buộc vào đầu một sợi dây không giãn, không trọng lượng. Dây vắt qua ròng rọc cố định O, đầu kia của dây cuốn vào khối trụ S có trọng lượng Q, bán kính R. Vật A có thể trượt trên mặt phẳng ngang, hệ số ma sát giữa vật A và mặt phẳng ngang là f. Tìm gia tốc vật A và gia tốc tâm C của khối trụ khi hệ chuyển động, bỏ qua khối lượng của ròng rọc.

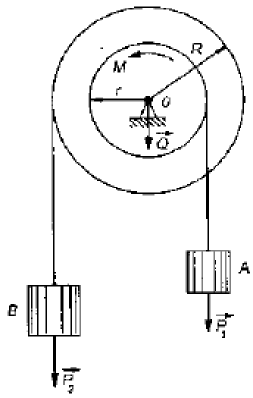




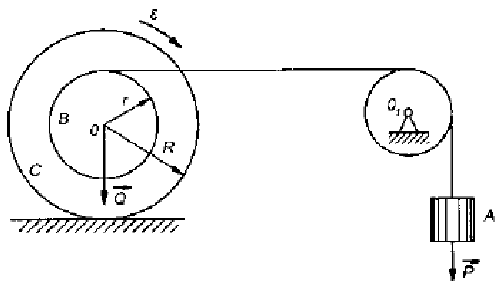
Bài 11: Trên một mặt phẳng nằm ngang trơn, ta đặt một lăng trụ tam giác ABC có trọng lượng P,

nó có thể trượt không ma sát trên mặt phẳng đó. Hình trụ tròn đồng chất trọng lượng Q lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng AB của lăng trụ.

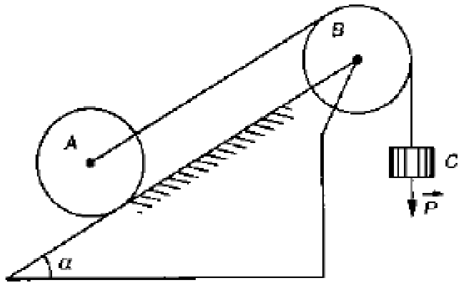
Bài 12: Hai vật nặng P_1 và P_2 được buộc vào hai dây cuốn vào hai tang của một tời bán kính r, R. Để năng vật nặng P_1 lên, ta tác dụng lên tời một mômen quay M. Tìm gia tốc góc của tời quay. Biết trọng lượng của tời là Q và bán kính quán tính đối với trục quay là ρ .



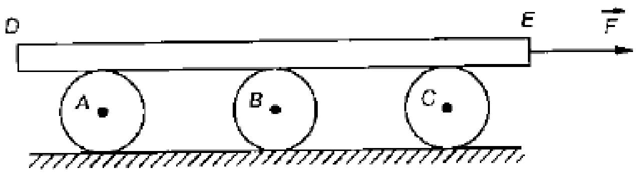
Bài 13: Một cơ cấu cho như hình bên. Vật A có trọng lượng P. Trọng lượng chung của trống B và bánh xe C là Q, bán kính quán tính đối với trục O là ρ. Tìm gia tốc của vật A khi nó hạ xuống.



Bài 14: Con lăn A lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng một góc α với phương ngang làm vật C trọng lượng P được nâng lên nhờ ròng rọc B. Con lăn A và ròng rọc B là hai đĩa tròn đồng chất cùng trọng lượng Q và bán kính R. Xác định gia tốc vật C.

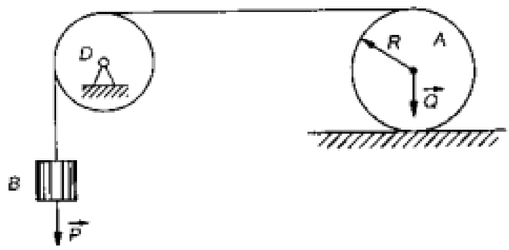


Bài 15: Thanh DE trọng lượng Q được đặt trên ba con lăn hình trụ A, B, C có cùng trọng lượng P, bán kính R. Tác dụng lực $\vec{F}$ lên thanh, bỏ qua sự trược giữa thanh và các con lăn, cũng như giữa các con lăn với mặt phẳng ngang. Các con lăn là trụ tròn đồng chất. Tìm gia tốc của thanh.



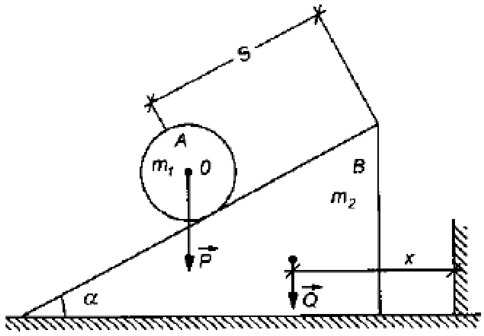
Bài 16: Vật B trọng lượng P làm chuyển động con lăn A hình trụ tròn đồng chất trọng lượng Q bán kính R nhờ dây mềm uốn quanh con lăn vắt qua ròng rọc cố định D và

buộc vào vật B. Xác định gia tốc vật B khi con lăn lăn không trượt, hệ số ma sát lăn là f_D, bỏ qua khối lượng ròng rọc D.



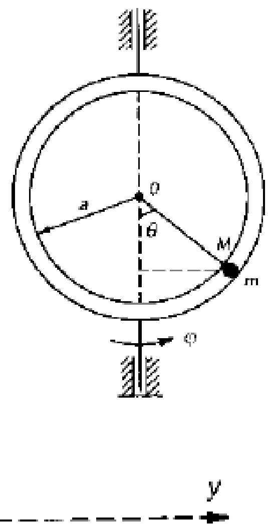
III. Phương trình Lagrăng loại II

Bài 17: Một con lăn A hình trụ đồng chất khối lượng m_1 bán kính R, lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng của lăng trụ tam giác B khối lượng m_2 và có góc nghiêng với mặt phẳng ngang góc α . Lăng trụ có thể trượt trên mặt phẳng ngang nhẵn. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ và tìm các tích phân đầu của chuyển động.

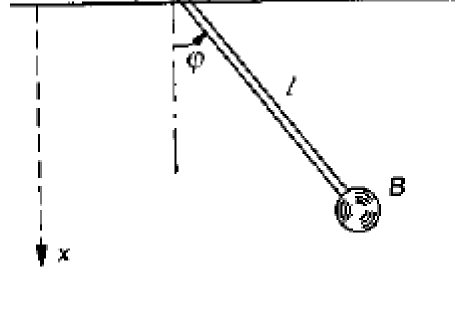


Bài 18: Giải lại bài 10 bằng phương pháp Đalămbe – Lagrăng.

Bài 19: Một chất điểm khối lượng m chuyển động theo vòng xuyến bán kính a. Trong khi vòng xuyến quay quanh đường kính thẳng đứng AB với vận tốc góc ω do ngẫu lực M. Mômen quán tính của vòng xuyến đối với đường kính này là J. Hãy lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm và xác định ngẫu lực M cần thiết để giữ cho vận tốc góc không đổi.

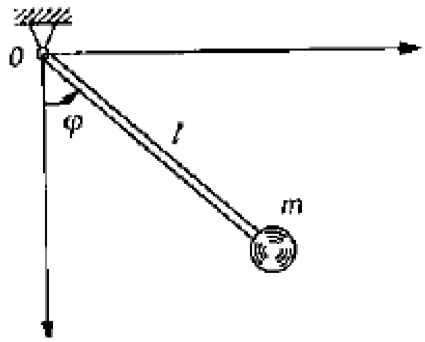


Bài 20: Một con lắcelíptic gồm có con chạy A khối lượng m_1 trượt không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang và quả cầu nhỏ khối lượng m_2 nối với con chạy bằng thanh AB chiều dài l. Thanh có thể quay quanh trục A gắn liền với con chạy và vuông góc với mặt



phẳng. Hãy thiết lập phương trình chuyển động của con lắc, bỏ qua khối lượng của thanh. Tìm các tích phân đầu của chuyển động.

Bài 21: Hãy lập phương trình chuyển động của con lắc gồm một chất điểm khối lượng m treo trên một sợi dây có độ dài biến đổi theo quy luật cho trước $l = l(t)$.



CHƯƠNG 2: ĐỘNG LỰC HỌC TRONG CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

2.1. Phương trình cơ bản trong chuyển động tương tối

Xét chất điểm M khối lượng m chuyển động trong hệ quy chiếu động Oxyz do tác dụng của lực $\vec{F}$, đồng thời Oxyz lại chuyển động so với hệ quy chiếu cố định $O_1x_1y_1z_1$. Ở đây, ta tìm sự liên hệ giữa gia tốc tương đối $\overrightarrow{W_r}$ với các lực tác dụng.

Theo định luật II Niutơn, trong chuyển động tuyệt đối ta có:

$$m\overrightarrow{W_a} = \vec{F}$$

Mà $\overrightarrow{W_a} = \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_{kor}} \Rightarrow m\overrightarrow{W_a} = m\left(\overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_{kor}}\right) = \vec{F}$

$$m\overrightarrow{W_r} = \vec{F} + (-m\overrightarrow{W_e}) + (-m\overrightarrow{W_{kor}}) \Rightarrow m\overrightarrow{W_r} = \vec{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} + \overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$$

Vậy tất cả các phương trình và định lý của cơ học trong chuyển động tương đối của chất điểm được thiết lập như trong chuyển động tuyệt đối nếu ta thêm vào các lực quán tính $\overrightarrow{F_e^{qt}}$ và lực quán tính Kôriôlit $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$.

Nếu hệ Oxyz chuyển động tịnh tiến thì $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = 0$ nên: $m\overrightarrow{W_r} = \vec{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}}$

Nếu hệ Oxyz chuyển động tịnh tiến thẳng đều thì $\overrightarrow{F_e^{qt}} = 0$; $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = 0$ nên:

$$m\overrightarrow{W_r} = \vec{F}$$

Vậy khi hệ động chuyển động tịnh tiến thẳng đều thì phương trình cơ bản của chất điểm trong chuyển động tương đối giống hệt như phương trình cơ bản của chất điểm trong chuyển động tuyệt đối.

Nếu $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} \neq 0$, ta có $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = -m\overrightarrow{W_{kor}} = -2m\overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{V_r}$

Vậy $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ cũng vuông góc với tiếp tuyến quỹ đạo tương đối nên

Hình chiếu của $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ lên tiếp tuyến của quỹ đạo tương đối luôn bằng không nên

$$mW_{r\tau} = F_{\tau} + F_{e\tau}^{qt}$$

Công của lực $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}}$ trên dịch chuyển tương đối bất kỳ bằng không.

2.2. Phương trình cân bằng tương đối

Nếu chất điểm không có chuyển động tương đối $\overrightarrow{V_r} = 0$ và $\overrightarrow{W_r} = 0$ thì $\overrightarrow{F_{kor}^{qt}} = 0$. Khi đó:

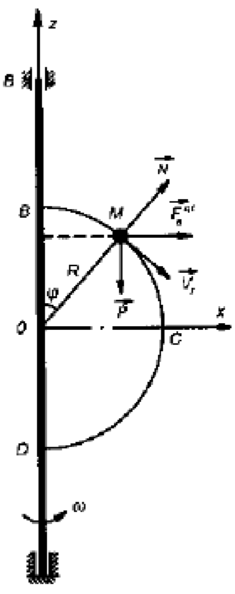
$$\vec{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} = 0$$

Phương trình này là điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm.

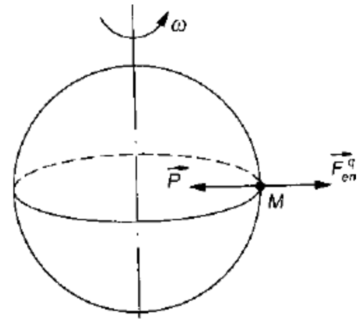
Định lý: Điều kiện cần và đủ để chất điểm cân bằng trong chuyển động tương đối là tổng hình học các lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính trong chuyển động của chất điểm bằng không.

BÀI TẬP

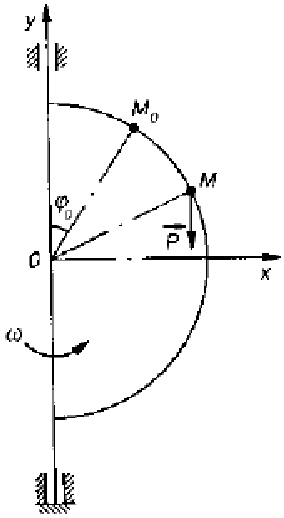
Bài 22: Nửa vòng tròn BCD bán kính R quay quanh đường kính BD với vận tốc góc ω . Một nhẫn M trọng lượng P trượt không ma sát từ điểm B sát trục quay theo nửa vòng tròn với vận tốc ban đầu $V_o = 0$. Tìm vận tốc tương đối V_r tại điểm C.



Bài 23: Cần phải tăng vận tốc góc của Trái Đất khi quay quanh trục của nó lên bao nhiêu lần để tại một điểm trên mặt đất ở xích đạo, chất điểm không có trọng lượng nữa. Biết bán kính Trái Đất là R = 6370km.

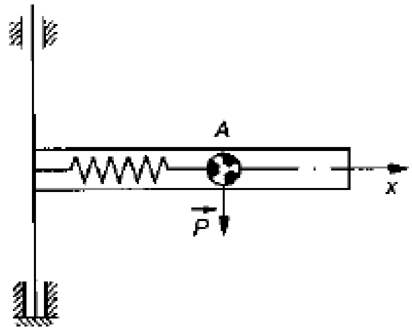


Bài 24: Điểm M có khối lượng m chuyển động không ma sát trong ống hình bán nguyệt bán kính R và quay quanh đường kính thẳng đứng với vận tốc góc ω = const. Xác định vận tốc tương đối V_r phụ thuộc vào góc φ là góc giữa OM và trục quay nếu ban đầu $\varphi = \varphi_o; \dot{\varphi} = 0$.



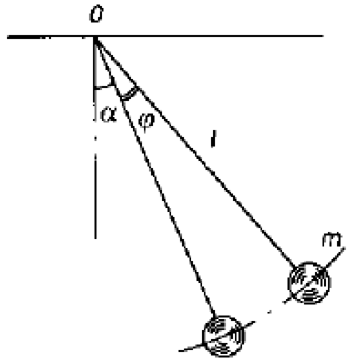
Bài 25: Quả cầu A có khối lượng m = 0,2kg chuyển động trong ống thẳng nằm ngang và được gắn trực giao với trục quay thẳng đứng ở đầu ống. Một lò xo có độ cứng C = 4kN/m nối quả cầu với trục quay. Độ dài của lò xo khi chưa biến dạng là a = 3cm.

a. Xác định quy luật biến đổi vận tốc góc ω của ống khi nó quay quanh trục để sao cho quả cầu chuyển động trong ống với vận tốc tương đối không đổi V_r = 1cm/s, nếu tại thời điểm ban đầu ở cách đầu ống một khoảng b = 5cm.



b. Tìm áp lực do quả cầu tác dụng lên thành ống khi t = 1s.

Bài 26: Trong một toa tàu đang chuyển động theo đường thẳng nằm ngang có một con lắc dao động bé điều hòa. Hãy xác định:



a. Gia tốc của con tàu.

b. Tìm hiệu số chu kỳ dao động của con lắc T_1 là chu kỳ dao động của con lắc khi toa tàu đứng yên và T_2 là chu kỳ dao động của con lắc khi toa tàu chuyển động với gia tốc W.

Bài 27: Một chất điểm rơi tự do trên Bắc bán cầu từ độ cao cách mặt đất 500m. Chú ý đến sự quay của trái đất quanh trục của nó và bỏ qua lực cản của không khí. Hãy xác định điểm rơi xuống lệch về phương Đông bao nhiêu. Địa điểm rơi tại vĩ tuyến 60^o.

CHƯƠNG 3: LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG

3.1. Các khái niệm mở đầu

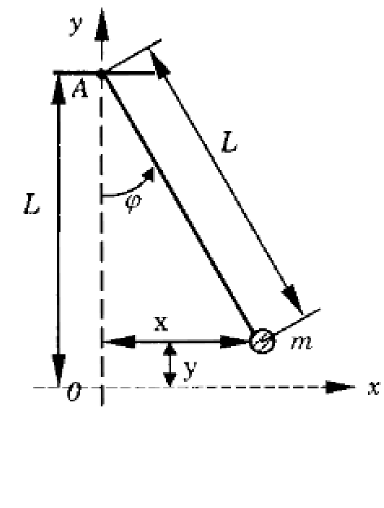
3.1.1. Khái niệm về trạng thái cân bằng ổn định của cơ hệ

3.1.2. Các định nghĩa và các khái niệm cơ bản về dao động

Bậc tự do của một hệ cơ học là tập hợp các tham số độc lập tối thiểu đủ để xác định vị trí và hình dáng bản thân hệ một cách duy nhất trong không gian. Các tham số này được gọi là các bậc tự do hay tọa độ suy rộng của hệ. Số lượng các tham số trong tập hợp nêu trên gọi là số bậc tự do của hệ. Hệ cơ học có thể có một, nhiều hay vô số bậc tự do.

Người ta thường phân biệt hai dạng hệ theo số lượng bậc tự do. Đó là các hệ hữu hạn bậc tự do và hệ vô số bậc tự do. Việc chọn các bậc tự do phụ thuộc vào chủ thể nghiên cứu của đối tượng.

Ta nghiên cứu chuyển động của một con lắc toán học đơn giản như hình bên dưới. Chất điểm có khối lượng m, tập trung ở đầu dây không trọng lượng độ dài L được cố định đầu kia tại một điểm A nào đó. Vị trí của chất điểm trong mặt phẳng được xác định bằng hai tọa độ x và y. Nhưng vì một đầu dây cố định và khoảng cách từ vật đến vị trí A không đổi, bằng L nên hệ sẽ chỉ có một bậc tự do, đó là góc giữa đoạn dây tạo với phương thẳng đứng, ký hiệu là φ .



Chọn hệ tọa độ như trong hình vẽ, ta có:

$$x = L\sin\varphi; y = L(t - \cos\varphi)$$

Khi đó động năng và thế năng của vật bằng:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}^2$$
$$V = mgy = mgL(1 - \cos\varphi)$$

Bỏ qua những lực khác, phương trình Lagrăng của hệ có dạng:

$$\ddot{\varphi}+\left(\frac{g}{L}\right)\sin\varphi=0$$

Trong đó g là gia tốc trọng trường. Đây là một phương trình vi phân bậc hai phi tuyến, sau khi khai triển Taylor hàm rin, có dạng

$$\ddot{\varphi}+\omega_o^2\varphi-\frac{\omega_o^2}{2}\varphi^2+...=0;\quad \omega_o^2=\frac{g}{L}$$

Nếu chỉ xét thành phần bậc nhất ta được phương trình cơ bản biểu diễn dao động điều hòa.

$$\ddot{\varphi}+\omega_o^2\varphi=0$$

Phương trình này cho ta nghiệm:

$$\varphi=a\sin(\omega_o t+\theta)$$

biểu diễn một dao động điều hòa với biên độ dao động a, tần số dao động ω_o (hay chu kỳ dao động $T=\frac{2\pi}{\omega_o}$) và pha ban đầu θ . Dao động này có thể biểu diễn ở dạng phức:

$$\varphi=\mathrm{Re}\left\{Ae^{-i\omega_o t}\right\}$$

trong đó A gọi là biên độ phức của dao động điều hòa $A=aie^{-i\theta}$ và

$$\alpha=|A|\ ;\ \theta=-\arg A+\frac{\pi}{2}$$

Vì vậy thông thường ta sử dụng dạng phức của dao động điều hòa

$$X=Ae^{-i\omega_o t}$$

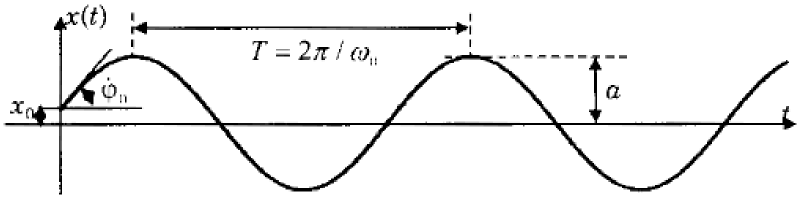
Trong trường hợp dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do, biên độ và pha ban đầu được xác định bằng điều kiện đầu $\varphi(0)=\varphi_o;\dot{\varphi}(0)=\dot{\varphi}_o$, tức

$$a=\sqrt{\varphi_o^2+\frac{\dot{\varphi}_o^2}{\omega_o}},\qquad \theta=\mathrm{arctg}\left(\frac{\varphi_o\omega_o}{\dot{\varphi}_o}\right)$$

Khi kể đến lực cản nhớt tỷ lệ với vận tốc, dao động tự do của hệ một bậc tự do có cản được mô tả bằng phương trình

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_o \dot{z} + \omega_o^2 z = 0$$

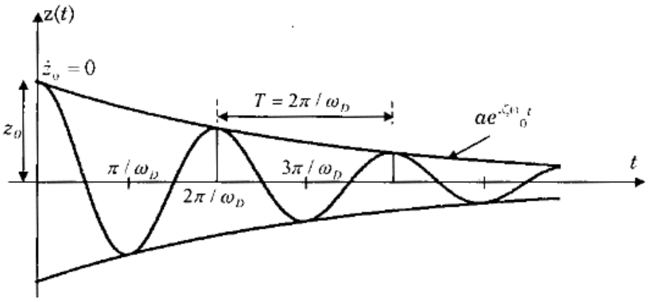
Nghiệm phương trình biểu diễn một dao động tắt dần.



$$z = ae^{-\xi\omega_o t}\sin(\omega_o t + \theta)$$

$$\omega_D = \omega_o\sqrt{1-\xi^2}$$

Với ξ là một số dương và được gọi là hệ số tắt dần dao động, đặc trưng cho lực cản nhớt, ω_D là tần số dao động của hệ có cản. Trong khuôn khổ dao động, chúng ta chỉ xét trường hợp hệ số tắt dần nhỏ hơn 1. Biên độ a và pha ban đầu θ của hệ có cản được xác định bằng điều kiện ban đầu $z(0) = z_o; \dot{z}(0) = \dot{z}_o$ có dạng



$$a = \sqrt{z_o^2 + \frac{(\dot{z}_o + \xi\omega_o z_o)^2}{\omega_D^2}}; \quad \theta = arctg\left(\frac{z_o\omega_D}{\dot{z}_o + \xi\omega_o z_o}\right)$$

Ký hiệu z_n và z_{n+1} là hai đỉnh dương liên tiếp của dao động tại các thời điểm $n\frac{2\pi}{\omega_D}$ và $(n+1)\frac{2\pi}{\omega_D}$; δ là hệ số suy giảm dao động logarit $\delta = \ln\frac{z_n}{z_{n+1}}$. Khi đó ta có thể xác định hệ số tắt dần dao động ξ từ phương trình $\delta = 2\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \xi = \delta / \sqrt{4\pi^2 - \delta^2}$.

3.1.3. Phân loại dao động

Tùy theo sự phân bố khối lượng trên hệ, cấu tạo và kích thước của hệ, tính chất của các loại tải trọng và các tác dụng động bên ngoài, ảnh hưởng và sự tương tác của môi trường dao động, cũng như sự làm việc của hệ … mà người ta có nhiều cách phân loại dao động khác nhau. Để thuận tiện cho việc phân tích dao động của các hệ, ta đưa ra một số cách phân loại sau.

a. Phân theo số bậc tự do của hệ dao động

Cách phân theo số bậc tự do đưa hệ về ba loại dao động sau:

Dao động của hệ một bậc tự do.

Dao động của hệ hữu hạn bậc tự do.

Dao động của hệ vô hạn bậc tự do.

b. Phân loại theo tính chất và nguyên nhân gây ra dao động

Dao động tự do: là dao động sinh ra do chuyển vị và tốc độ ban đầu của hệ. Điều kiện ban đầu được tạo nên do tác động của các xung lực tức thời và tách hệ ra khỏi vị trí cân bằng, nói cách khác, dao động tự do là dao động không có tải trọng động duy trì trên hệ.

Dao động cưỡng bức: là dao động sinh ra do các tải trọng động và các tác dụng động bên ngoài khác. Dao động cưỡng bức bao gồm rất nhiều loại như: dao động của hệ chịu tải trọng có chu kỳ, hệ chịu tải trọng ngắn hạn, hệ chịu tải trọng di động, của các công trình và nhà cao tầng chịu tác dụng của gió, của các công trình chịu tải trọng động đất xung nhiệt…

c. Phân loại theo sự tồn tại của lực

Dao động không tắt dần: là dao động bỏ qua ảnh hưởng của lực cản.

Dao động tắt dần: là dao động có xét tới lực cản.

d. Phân theo kích thước và cấu tạo của hệ

Dao động của hệ sẽ bao gồm:

Dao động của hệ thanh (dầm, dần, vòm, khung…).

Dao động của tầm.

Dao động của vỏ

Dao động của các khối mỏng.

Dao động của hệ treo

Dao động của các kết cấu công trình đặc biệt.

e. Phân theo dạng phương trình vi phân mô tả dao động

Dao động tuyến tính: là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân tuyến tính.

Dao động phi tuyến: là dao động mà phương trình vi phân mô tả dao động là phương trình vi phân phi tuyến.

3.2. Dao động nhỏ của cơ hệ một bậc tự do

3.2.1. Dao động tự do của hệ bảo toàn

Xét hệ một bậc tự do như hình vẽ. Nếu tách hệ đàn hồi này ra khỏi vị trí cân bằng với chuyển vị ban đầu của khối lượng y_o hoặc tác động lên hệ một xung lực nào đó đặc trưng bởi tốc độ ban đầu của khối lượng v_o thì khối lượng sẽ dao động. Các dao động chỉ sinh ra do các kích động ban đầu như vậy được gọi là dao động tự do. Các dao động này được thực hiện bởi các lực đàn hồi phát sinh trong hệ do các kích động ban đầu. Với các dao động tự do, tải trọng không tồn tại trong quá trình dao động của hệ, vì vậy vế phải của phương trình vi phân dao động tự do trong trường hợp này có dạng:

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = 0$$

Khi không xét tới ảnh hưởng của lực cản c = 0, phương trình vi phân dao động tự do sẽ là:

$$M\ddot{y} + Ky = 0$$

Đây là phương trình vi phân cấp hai không có vế phải và có hệ số là hằng số. Để giải phương trình vi phân này, ta sử dụng phép thế Ơle với nghiệm:

$$y(t) = De^{st}$$

Thế biểu thức này vào phương trình trên ta được:

$$(MS^2 + K)De^{st} = 0 \Leftrightarrow (S^2 + \omega^2).De^{st} = 0 \ \text{(với } \omega^2 = \frac{K}{M}\text{)}$$

$$\Rightarrow S = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega i$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là:

$$y(t) = D_1 e^{s_1 t} + D_2 e^{s_2 t} \Leftrightarrow y(t) = D_1 e^{\omega i t} + D_2 e^{-\omega i t}$$

Mà $e^{\pm\omega i t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$, thế vào phương trình trên ta được

$$y(t) = (D_1 + D_2)\cos\omega t + (D_1 - D_2)i\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = -(D_1 + D_2)\omega\sin\omega t + (D_1 - D_2)i\omega\cos\omega t$$

Các hằng số D_1 và D_2 được xác định từ điều kiện ban đầu, tại thời điểm t = 0, ta có:

$$y(0) = y_o\ ;\ \ \dot{y}(0) = v_o$$

Từ đó ta suy ra: $D_1 + D_2 = y_o$; $D_1 - D_2 = \frac{v_o}{\omega}$

Tìm các hệ số này và thế vào phương trình ở trên, ta nhận được phương trình dao động tự do của hệ một bậc tự do.

$$y(t) = y_o\cos\omega t + \frac{v_o}{\omega}\sin\omega t$$

Ta có thể viết gọn hơn phương trình trên ở dạng một hàm lượng giác bằng cách đưa ký hiệu mới A và γ vào với :

$$y_o = A\sin\gamma$$

$$\frac{v_o}{\omega} = A\cos\gamma$$

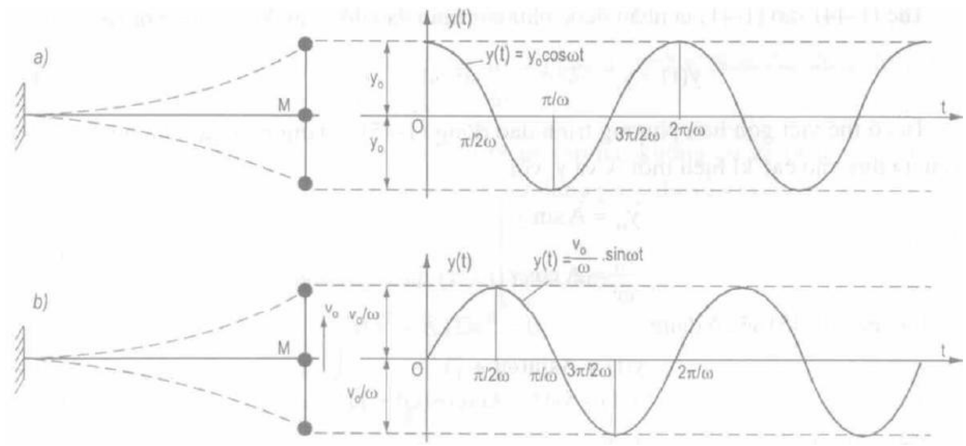
Lúc này phương trình trên sẽ có dạng :

$$y(t) = A\sin(\omega t + \gamma)\ \ \ v(t) = \dot{y}(t) = \omega A\cos(\omega t + \gamma)$$

Với A và γ được xác định như sau :

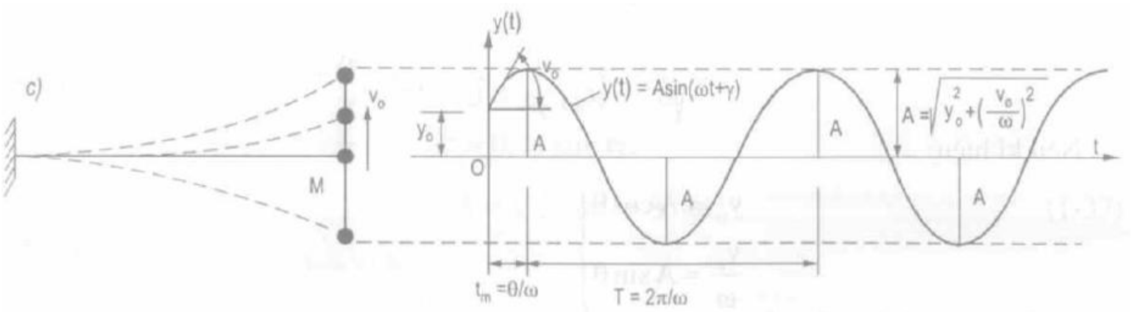
$$A = \sqrt{(y_o)^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2}\ \ \ \gamma = arctg\frac{v_o}{\omega y_o}$$

Dưới đây sẽ đưa ra phương trình dao động đối với các trường hợp khác nhau của điều kiện kích động ban đầu :



Khi hệ chỉ chịu chuyển vị ban đầu $y(0) = y_o$, $v(0) = 0$. Phương trình dao động trong trường hợp này sẽ là : $y = y_o \cos \omega t$.

Khi hệ chỉ chịu tốc độ ban đầu $v(0) = v_o$, $y(0) = 0$. Phương trình dao động



trong trường hợp này sẽ là : $y = \dfrac{v_o}{\omega} \sin \omega t$.

Khi hệ chịu cả chuyển vị ban đầu và tốc độ ban đầu $y(0) = y_o$, $v(0) = v_o$. Phương trình dao động trong trường hợp này sẽ là : $y(t) = y_o \cos \omega t + \dfrac{v_o}{\omega} \sin \omega t$.

Chu kỳ dao động : ký hiệu là T, là thời gian cần thiết để thực hiện một dao động toàn phần, nghĩa là thời gian để khối lượng lặp lại quá trình dao động như trước.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Tần số dao động : ký hiệu là f, là số lần dao động trong một giây.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ (1/s)}$$

Tần số vòng hay tần số dao động riêng ký hiệu là ω là tần số tần hoàn của dao động riêng và gọi tắt là tần số dao động riêng.

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{g}{y_t}}$$

Với K là hệ số cứng của hệ.

g là gia tốc trọng trường.

y_t là chuyển vị của khối lượng M do lực G = M.g tác dụng tĩnh tại vị trí khối lượng gây ra.

Từ công thức trên ta thấy rằng: tần số dao động riêng của hệ không phụ thuộc vào các kích động ban đầu, nó chỉ phụ thuộc vào khối lượng và độ cứng của hệ.

Có thể xác định tần số dao động riêng của hệ đàn hồi bất kỳ theo phương pháp năng lượng, dựa trên định luật bảo toàn năng lượng: Trong quá trình dao động tổng động năng và thế năng của hệ là một đại lượng không đổi.

$$T + U = C = const$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 y^2_{\max} \cos^2(\omega t + \gamma) \quad (\text{với } y_{\max} = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega}\right)^2})$$

$$U = \frac{1}{2} K y^2 = \frac{1}{2} K y^2_{\max} \sin^2(\omega t + \gamma)$$

Từ hai biểu thức của động năng và thế năng, ta thấy khi thế năng biến dạng của hệ đạt giá trị lớn nhất thì động năng của hệ bằng không và ngược lại khi động của hệ đạt giá trị lớn nhất thì thế năng của hệ bằng không.

Ta có : $T_{max} = U_{max} = \frac{1}{2} K y^2_{\max}$

$$\overline{T} = \frac{1}{2} M y^2_{\max} \cos^2(\omega t + \gamma) \Rightarrow \overline{T_{\max}} = \frac{1}{2} M y^2_{\max}$$

$$\Rightarrow T_{\max} = \omega^2 \overline{T_{\max}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{U_{\max}}{\overline{T_{\max}}}}$$

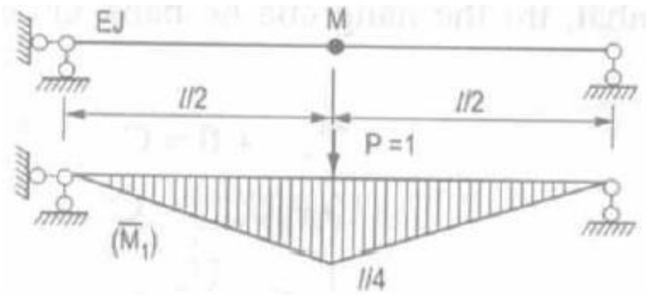
Xác định tần số dao động riêng của hệ như hình bên dưới. Biết hệ gồm khối lượng tập trung M đặt tại giữa dầm.

Trước hết ta xác định chuyển vị do lực đơn vị đặt tại khối lượng theo phương dao động của hệ. Ta xác định được :

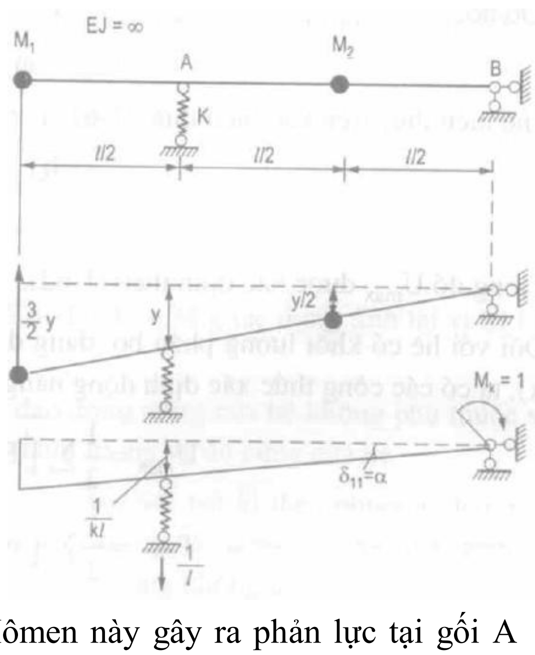
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{48EJ}$$

Từ đó ta xác định được tần số dao động riêng :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{48EJ}{Ml^3}}$$



Ví dụ 2 : Xác định tần số dao động riêng của hệ cho như hình bên dưới, độ cứng của liên kết đàn hồi là K.



Giải

Hệ này có hai khối lượng nhưng chỉ có một bậc tự do. Tham số đặc trưng cho dao động của hệ có thể chọn là góc xoay tương đối tại gối tựa bên phải α , đó chính là chuyển vị tổng quát của hệ.

Để xác định δ_{11} trong trường hợp này, phù hợp với chuyển vị tổng quát của hệ, ta cần đặt vào gối tựa B một mômen đơn vị M = 1. Mômen này gây ra phản lực tại gối A bằng $\frac{1}{l}$ phản lực tại gối A tương ứng tạo nên chuyển dịch thẳng theo phương đứng tại gối là $\frac{1}{kl}$. Do đó, chuyển vị đơn vị :

$$\delta_{11} = \frac{1}{kl^2}$$

Mômen quán tính khối lượng trong trường hợp này được tính như sau :

$$J_m(u) = M_1\left(\frac{3}{2}l\right)^2 + M_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2\left(\frac{9}{4}M_1 + \frac{1}{4}M_2\right)$$

Vậy, ta có : $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{J_m\delta_{11}}} = \sqrt{\dfrac{K}{\left(\dfrac{9}{4}M_1 + \dfrac{1}{4}M_2\right)}} = 2\sqrt{\dfrac{K}{9M_1 + M_2}}$

3.2.2. Dao động của hệ không bảo toàn

Bất kỳ một quá trình chuyển động nào của hệ đàn hồi trong thực tế đều chịu ảnh hưởng của lực cản. Lực cản xuất hiện do nhiều nguyên nhân khác nhau và ảnh hưởng của chúng đến các quá trình dao động rất phức tạp. Trong tính toán dao động kể đến tác dụng của lực cản, ở tài liệu này xin đưa ra một số giả thiết cơ bản : giả thiết lực cản tỉ lệ với vận tốc chuyển động của Phôi, giả thiết lực cản ma sát khô của Culông, giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi của Xôrôkin.

a. Dao động tự do kể đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết của Phôi

Giả thiết của Phôi xem rằng : lực cản các quá trình chuyển động tỉ lệ với vận tốc chuyển động. Lực cản được xác định theo giả thiết của Phôi :

$P_c = c\dot{y}$

Phương trình vi phân dao động tự do được mô tả theo phương trình :

$$M\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = 0$$

Để giải phương trình này ta sử dụng phép thế Ơle :

$$y(t) = D.e^{st}$$

$$\Rightarrow (Ms^2 + cs + K)D.e^{st} = 0 \Leftrightarrow s^2 + \frac{c}{M}s + \frac{K}{M} = 0 \Leftrightarrow s^2 + 2\alpha s + \omega^2 = 0$$

Với $2\alpha = \dfrac{c}{M}; \omega^2 = \dfrac{K}{M}$

Nghiệm của phương trình đặc trưng này là :

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} = -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2M}\right)^2 - \omega^2}$$

Vậy, giá trị của s phụ thuộc rất nhiều vào hệ số tắt dần c.

Để thuận tiện cho việc nghiên cứu, ta xét trường hợp giới hạn là trường hợp biểu thức trong căn của phương trình trên bằng 0, khi đó :

$$\frac{c}{2M} = \omega \Leftrightarrow \alpha = \omega$$

Hệ số c ứng với trường hợp giới hạn này gọi là đại lượng tắt dần tới hạn và ký hiệu là c^*, ta có :

$$c^* = 2M\omega$$

Để dễ khảo sát dao động tắt dần khi xét đến ảnh hưởng của lực cản, ta biểu thị sự tắt dần của dao động bằng quan hệ tỉ số giữa hệ số c với đại lượng tắt dần tới hạn c^*.

$$\varepsilon = \frac{c}{c^*} = \frac{c}{2M\omega}$$

ε được gọi là tham số tắt dần. Khi $\varepsilon = 0$ là trường hợp không xét đến lực cản, $\varepsilon = 1$ ứng với trường hợp giới hạn, $\varepsilon < 1$ ứng với trường hợp lực cản nhỏ, khi $\varepsilon > 1$ ứng với trường hợp lực cản lớn.

*** Trường hợp lực cản nhỏ $\varepsilon < 1$**

Ta có : $S = -\omega\varepsilon \pm \sqrt{(\omega\varepsilon)^2 - \omega^2}$

Khi $\varepsilon < 1$ ta có : $S = -\omega\varepsilon \pm \omega_c$

Trong đó : $\omega_c = \omega\sqrt{1 - \varepsilon^2}$

ω_c được gọi là tần số dao động tự do khi tính đến lực cản. Từ phương trình trên, biến đổi ta thu được :

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + \varepsilon^2 = 1$$

Biểu thức này cho ta sự phụ thuộc của quan hệ các tần số dao động riêng tính đến và không tính đến sự tắt dần với tham số tắt dần ε .

Đối với các kết cấu xây dựng thông thường, tham số tắt dần $\varepsilon < 20\%$, do đó sự khác biệt giữa tần số dao động riêng khi tính đến và không tính đến lực cản là không đáng kể.

Phương trình dao động tự do khi xét tới ảnh hưởng của lực cản :

$$y(t) = D_1 e^{(-\omega\varepsilon + i\omega_c)t} + D_2 e^{(-\omega\varepsilon - i\omega_c)t} = e^{-\omega\varepsilon t}(D_1 e^{i\omega_c t} + D_2 e^{-i\omega_c t})$$

Biểu thức trong ngoặc của phương trình này biểu thị dao động điều hòa đơn giản. Ta có thể viết phương trình này ở dạng hàm lượng giác :

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(B\sin\omega_c t + C\cos\omega_c t)$$

Các hằng số tích phân B và C được xác định từ điều kiện ban đầu, tại thời điểm ban đầu y(0) = y_o, $\dot{y}(0) = v_o$

Biểu thức vận tốc của chuyển động :

$$v(t) = \dot{y}(t) = -\omega\varepsilon y(t) + e^{-\omega\varepsilon t}\omega_c(-C\sin\omega_c t + B\cos\omega_c t)$$

Sử dụng các điều kiện ban đầu, ta xác định được :

$$C = y_o \,,\; B = \frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}$$

Vậy : $y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(\dfrac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}\sin\omega_c t + y_o\cos\omega_c t)$

Ta có thể viết phương trình trên ở dạng :

$$y(t) = Ae^{-\omega\varepsilon t}\sin(\omega_c t + \gamma_c)$$

Trong đó :

$$A = \sqrt{y_o^2 + \left(\frac{v_o + \omega\varepsilon y_o}{\omega_c}\right)^2}$$

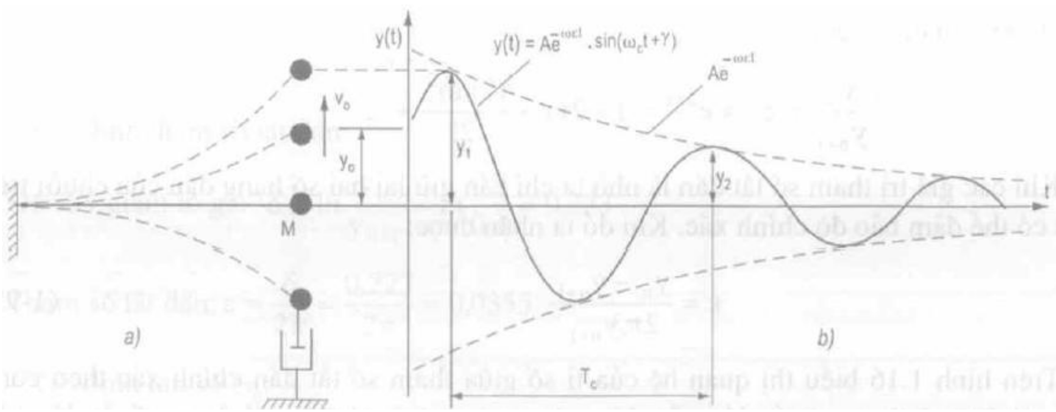
$$\gamma_c = \text{arctg}\frac{\omega y_o}{v_o + \omega\varepsilon y_o}$$

Từ biểu thức trên ta thấy dao động có lực cản là dao động tắt dần.

Chu kỳ của dao động có lực cản là :

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Tần số dao động : $f_c = \dfrac{1}{T_c} = \dfrac{\omega\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi}$



là dao động điều

*** Trường hợp lực cản lớn hơn 1 ($\varepsilon > 1$)**

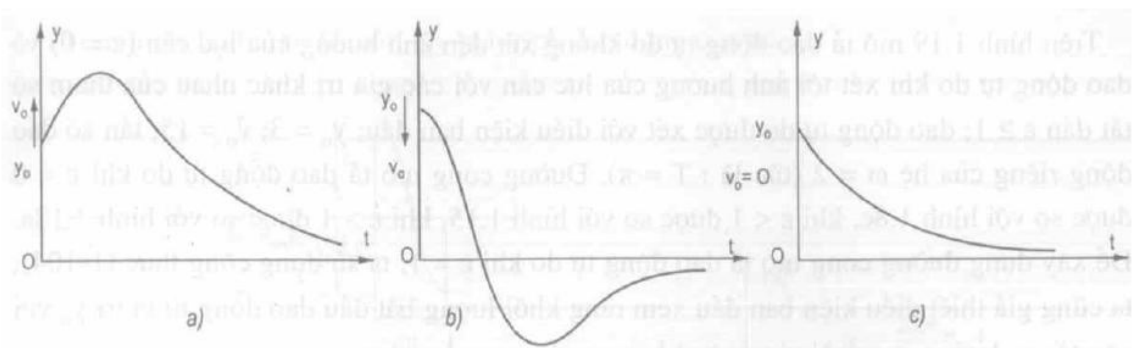
Trong trường hợp này, nghiệm của phương trình đặc trưng là :

$$S = -\omega\varepsilon \pm \omega\sqrt{\varepsilon^2 - 1} = -\omega\varepsilon \pm \lambda$$

Vậy :

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(D_1 e^{\lambda t} + D_2 e^{-\lambda t})$$

Ta thấy rằng



chuyển động của hệ trong trường hợp lực cản lớn là các chuyển động không tuần hoàn. Các chuyển động này có thể xảy ra ở những dạng khác nhau, nhưng dần tiệm cận đến vị trí cân bằng ban đầu. Chúng có thể tiệm cận đến vị trí cân bằng hoàn toàn từ một phía, hoặc tiệm cận có một lần đổi dấu, điều đó phụ thuộc cụ thể vào điều kiện ban đầu.

*** Trường hợp tắt dần tới hạn ($\varepsilon = 1$)**

Trong trường hợp này, nghiệm của phương trình đặc trưng là thực, âm và bằng nhau $S_1 = S_2 = -\omega\varepsilon$, khi đó chuyển động của hệ sẽ là :

$$y(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(D_1 + D_2 t)$$

Các hằng số D_1 và D_2 được xác định từ điều kiện ban đầu.

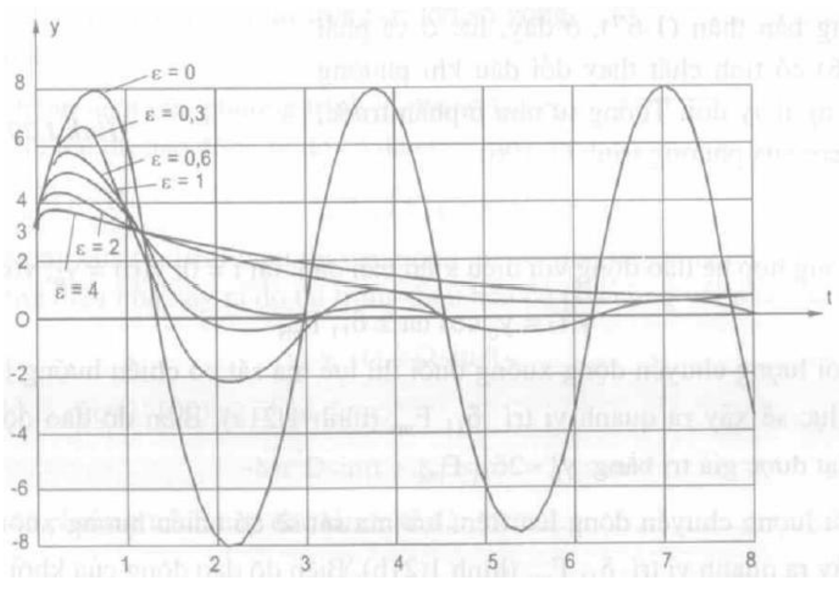
Tại t = 0, y(0) = y_o, $\dot{y}(0) = v_o$. Khi đó

$$D_1 = y_o,\ v_o = D_2 - \omega\varepsilon y_o \Rightarrow D_2 = v_o + \omega\varepsilon y_o$$

Thay các giá trị của D_1, D_2 vào phương trình trên ta được :

$$y(t) = \left[y_o(1 + \omega\varepsilon t) + v_o t\right]e^{-\omega\varepsilon t}$$

Chuyển động của hệ trong trường hợp này cũng không tuần hoàn và nó cũng có thể xảy ra ở một trong các dạng chuyển động đã gặp ở trường hợp trên.



b. Dao động tự do kể đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết Culông

Ta xét dao động tự do có tính đến ảnh hưởng của lực cản ma sát theo giả thiết Culông, trong đó ma sát là ma sát khô, lực cản ma sát F_{ms} tỉ lệ với áp lực vuông góc và có phương ngược với phương chuyển động. Ta thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo phương pháp tĩnh động, trong đó các lực đặt vào khối lượng bao gồm lực quán tính, lực đàn hồi và lực cản ma sát khô :

$$M\ddot{y}(t) + Ky(t) = \pm F_{ms} \Rightarrow \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \pm \frac{F_{ms}}{M}$$

Phương trình này có dạng tương tự như phương trình vi phân dao động tự do có kể đến trọng lượng bản thân. Nghiệm của phương trình có dạng :

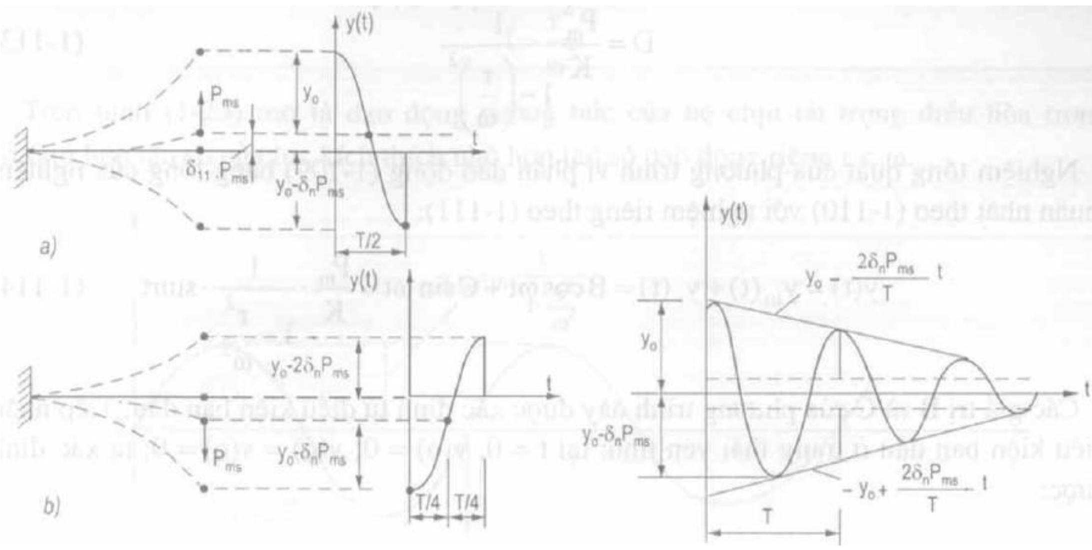
$$y(t) = A\sin(\omega t + \gamma) \pm \delta_{11} F_{ms}$$

Xét trường hợp hệ dao động với điều kiện ban đầu : y(0) = y_o, v(0) = 0 thì

$$y(t) = y_o \cos\omega t \pm \delta_{11} F_{ms}$$

Khi khối lượng chuyển động xuống dưới thì lực ma sát có chiều hướng lên trên. Dao động của lực sẽ xảy ra quanh vị trí $\delta_{11}F_{ms}$. Biên độ dao động của khối lượng sẽ đạt được giá trị bằng $y_o - 2\delta_{11}F_{ms}$.

Khi khối lượng chuyển động lên trên, lực ma sát sẽ có chiều hướng xuống dưới, dao động sẽ xảy ra quanh vị trí $\delta_{11}F_{ms}$. Biên độ dao động của khối lượng sẽ đạt được giá trị bằng $y_o - 2\delta_{11}F_{ms}$.



3.2.3. Dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa

a. Trường hợp không có lực cản

Phương trình vi phân dao động hệ một bậc tự do chịu tải trọng điều hòa P(t) = P_m sinrt trong trường hợp không xét tới ảnh hưởng của lực cản là :

$$M\ddot{y} + Ky = P_m \sin rt$$

Trong đó P_m là biên độ của tải trọng, r là tần số vòng của lực kích thích.

Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân chuyển động biểu thị dao động tự do có dạng :

$$y_{tn}(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân ở trên biểu thị dao động do kết quả tác động của tải trọng. Có thể xem dao động điều hòa xảy ra do tải trọng điều hòa có pha cùng với pha của tải trọng :

$$y_r(t) = D\sin rt$$

Thế vào ta được :

$$-Mr^2 D\sin rt + KD\sin rt = P_m \sin rt \Leftrightarrow D\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right) = \frac{P_m}{K}$$

$$\Rightarrow D = \frac{P_m}{K}\frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là :

$$y(t) = y_{tn}(t) + y_r(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t + \frac{P_m}{K}\frac{1}{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)}\sin rt$$

Các giá trị của B và C được xác định từ điều kiện ban đầu : y(0) = 0, v(0) = 0, ta xác định được :

$$C = -\frac{P_m}{K}\frac{\frac{r}{\omega}}{\left(1-\frac{r^2}{\omega^2}\right)}; B = 0$$

Vậy : $y(t) = \frac{P_m}{K}\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{\omega^2}\right)}(\sin rt + \frac{r}{\omega}\sin rt)$

Đây là phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của lực cản. Ta thấy phương trình dao động gồm hai thành phần : một thành phần dao động ứng với tần số của tải trọng điều hòa r, và một thành phần ứng với tần số của dao động tự do ω . Trong thực tế, các dao động đều chịu ảnh hưởng của lực cản, mặc dù lực cản gây ảnh hưởng không đáng kể đến tần số dao động riêng, nhưng khi đã có lực cản thì dù nhỏ cũng sẽ làm tắt dần dao động tự do sau một thời gian ngắn dao động. Sau đó hệ sẽ chuyển sang thời kỳ dao động ổn định có chu kỳ ứng với chu kỳ của tải trọng điều hòa :

$$y(t) = \frac{P_m}{K}\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{\omega^2}\right)}\sin rt \Leftrightarrow y(t) = y_T\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{\omega^2}\right)}\sin rt$$

Với $y_T = \frac{P_m}{K}$ là chuyển vị tại khối lượng do biên độ P_m của tải trọng điều hòa tác dụng tính gây ra.

Phương trình dao động có chứa chuyển vị tĩnh y_T sẽ đặt ra vấn đề về sự liên quan giữa chuyển vị động y(t) với chuyển vị tĩnh y_T đó. Sự liên quan này được xem xét từ hệ số động lực theo thời gian và hệ số động.

Hệ số động theo thời gian K(t) là tỉ số giữa chuyển vị động ứng với trạng thái chuyển động của hệ với chuyển vị tĩnh do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra :

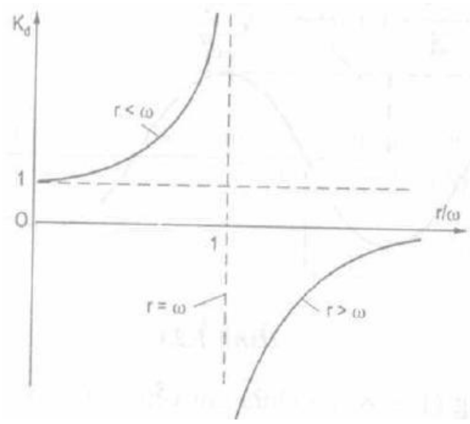
$$K(t) = \frac{y(t)}{y_T}$$

Hệ số động K_d là tỉ số giữa chuyển vị động cực đại của trạng thái chuyển động với chuyển vị tĩnh do biên độ của tải trọng động tác dụng tĩnh gây ra.

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T}$$

Với trường hợp hệ chịu tác dụng của tải trọng điều hòa, ta được hệ số động theo thời gian là :

$$K(t) = \frac{\sin rt}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}}$$



Hệ số động ứng với tải trọng điều hòa :

$$K_d = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - r^2}$$

b. Trường hợp có lực cản

* Tính lực cản theo giả thiết của Phôi

Phương trình vi phân dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của tải trọng điều hòa P(t) = $P_m$sinrt có xét đến ảnh hưởng của lực cản phù hợp với giả thiết của Phôi có dạng :

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P_m \sin rt \Leftrightarrow \ddot{y} + 2\omega\varepsilon\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \frac{P_m}{M}\sin rt$$

Ở đây xét với trường hợp lực cản nhỏ. Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân trên chính là phương trình dao động tự do.

$$y_{tn}(t) = e^{-\omega\varepsilon t}(B\sin\omega_c t + C\cos\omega_c t)$$

Nghiệm riêng do tác dụng của tải trọng điều hòa được xác định bằng biểu thức :

$$y_r(t) = D_1 \sin rt + D_2 \cos rt$$

Lấy đạo hàm rồi thế vào phương trình vi phân, biến đổi, ta được :

$$D_1 = \frac{P_m}{K}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}$$

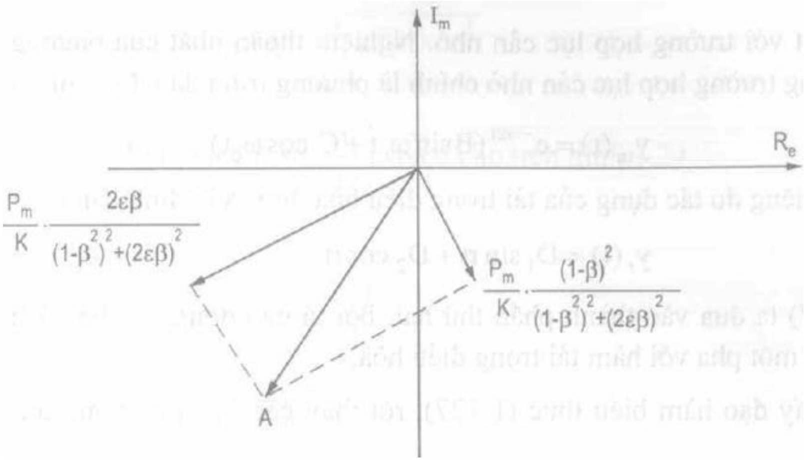
$$D_2 = \frac{P_m}{K} \frac{-2\varepsilon\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình vi phân là :

$$y(t) = e^{-\varepsilon\omega t}(B\sin\omega_c t + C\cos\omega_c t) + \frac{\frac{P_m}{K}}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}\left[\left(1-\beta^2\right)^2 \sin rt - 2\varepsilon\beta\cos rt\right]$$

Thành phần thứ nhất của vế phải chứa nhân tử $e^{-\varepsilon\omega t}$ biểu thị dao động tự do tắt dần. Thành phần thứ hai có cùng tần số với tải trọng điều hòa biểu thị dao động cưỡng bức, nó đặc trưng cho quá trình chuyển động ổn định của hệ.

Chuyển vị ở quá trình ổn định có thể biểu thị ở dạng hai véctơ.



Véctơ $\vec{A}$ biểu thị biên độ dao động của quá trình ổn định :

$$A = \frac{P_m}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}$$

Dao động ổn định của hệ được biểu thị ở dạng tương tự như đã xét ở phần trên.

$$y(t) = A\sin(rt - \theta) \text{ với } \theta = \mathrm{arctg}\frac{2\varepsilon\beta}{1-\beta^2} \text{ là độ lệch pha.}$$

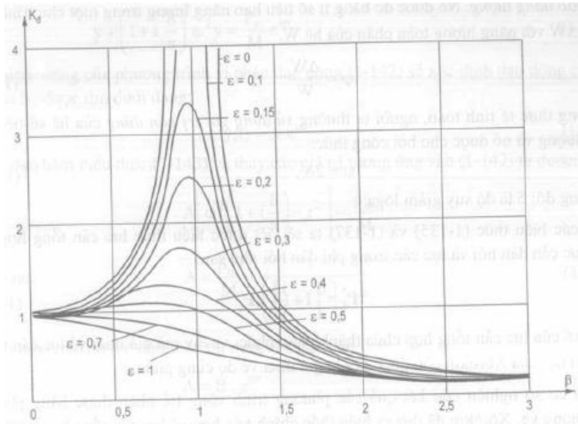
Hệ số động sẽ bằng : $K_d = \frac{A}{\frac{P_m}{K}} = \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\varepsilon\beta)^2}$

Từ phương trình trên ta thấy : Hệ số động phụ thuộc vào tỉ số các tần số của tải trọng điều hòa với tần số dao động riêng β và tham số tắt dần ε .

*** Tính lực cản theo giả thiết của Xôrôkin**

Giả thiết của Xôrôkin là giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi, hay còn gọi là giả thiết về độ cứng phức.

Lực cản trong phi đàn hồi là lực cản tính đến sự tiêu hao năng lượng trong hệ, được biểu thị trong việc làm tổn thất trễ năng lượng biến dạng trong quá trình dao động. Nó không phụ thuộc vào tốc độ biến dạng mà phụ thuộc vào giá trị biến dạng. Trong đó quan hệ giữa các biến dạng chung (độ võng, góc xoay) với tải trọng ngoài là quan hệ phi tuyến. Quan hệ này khi tăng tải và đỡ tải là khác nhau. Trong quá trình tăng tải và đỡ tải của một chu trình tải trọng, quan hệ này được biểu thị bằng một đường cong kín gọi là vòng trễ.



Xôrôkin dựa trên giả thiết vòng trễ có hình elíp và trong các dao động cưỡng bức ổn định dưới tác dụng của trải trọng kích động điều hòa, các dao động của hệ xảy ra cũng theo quy luật điều hòa. Ông đã đi đến kết luận rằng : Lực cản trong phi đàn hồi tỉ lệ với lực đàn hồi (lực hồi phục) nhưng lệch pha với lực đàn hồi một góc là $\frac{\pi}{2}$. Biểu thức toán học của lực cản trong được biểu thị bằng công thức :

$$P_c = i\frac{\psi}{2\pi}P_d$$

Trong đó P_d là lực đàn hồi. Việc nhân thêm với đơn vị ảo tương ứng với việc quay véctơ lực đàn hồi đi một góc $\frac{\pi}{2}$ bằng độ lệch pha của P_c, ψ là hệ số tiêu hao năng lượng. Nó được đo bằng tỉ số tiêu hao năng lượng trong một chu trình biến dạng ΔW với năng lượng toàn phần của hệ là W.

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}$$

Trong thực tế tính toán, người ta thường sử dụng giá trị gần đúng của hệ số tiêu hao năng lượng và nó được cho bởi công thức : $\psi = 2\delta$ với δ là độ suy giảm lôga.

Vậy biểu thức lực cản tổng hợp bao gồm lực cản đàn hồi và lực cản trong phi đàn hồi như sau :

$$P_d^* = \left(1 + \frac{i\delta}{\Pi}\right) P_d$$

Hệ số của lực cản tổng hợp chứa thành phần phức, vì vậy mà giả thiết về lực cản trong phi đàn hồi của Xôrôkin còn được gọi là giả thiết về độ cứng phức.

Trên cơ sở nghiên cứu kết quả các phương trình vòng trễ nhận được bằng phương pháp thống kê, Xôrôkin đã đưa ra biểu thức chính xác hơn về lực cản tổng hợp có thể áp dụng cho cả dao động cưỡng bức, cũng như các dao động tự do điều hòa.

$$P_d^* = (u + iv) P_d$$

Trong đó $u = \dfrac{1 - \dfrac{\gamma^2}{4}}{1 + \dfrac{\gamma^2}{4}}$, $v = \dfrac{\gamma}{1 + \dfrac{\gamma^2}{4}}$ và $\gamma = \dfrac{\delta}{\Pi}$

Để khảo sát phương trình dao động của hệ một bậc tự do có xét đến ảnh hưởng của lực cản theo giả thiết độ cứng phức của Xôrôkin, ta nên biểu thị lực kích động điều hòa dưới dạng phức :

$$P(t) = P_m.e^{irt}$$

Phương trình vi phân của hệ phù hợp với giả thiết Xôrôkin là :

$$M\ddot{y} + \left(1 + i\frac{\delta}{\pi}\right) K y = P_m e^{irt} \Leftrightarrow \ddot{y} + \left(1 + i\frac{\delta}{\pi}\right)\omega^2 y = \frac{P_m}{M} e^{irt}$$

Nghiệm riêng của phương trình vi phân dao động sẽ xác định dao động cưỡng bức của hệ tìm dưới dạng :

$$y(t) = A.e^{irt}$$

Lấy đạo hàm biểu thức trên và thế vào phương trình dao động, ta được :

$$A\left[\omega^2\left(1 + i\frac{\delta}{\pi}\right) - r^2\right] = \frac{P_m}{M} \Rightarrow A = \frac{P_m}{M}.\frac{1}{\omega^2\left(1 + i\dfrac{\delta}{\pi}\right) - r^2}$$

Biểu thức trên còn có thể được biểu thị như sau :

$$A = B.e^{i\varphi}$$

Trong đó : $B = \frac{P_m}{M}.\frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - r^2) + \frac{\delta^2}{\pi^2}\omega^4}}$; $\tan\varphi = \frac{\delta\omega^2}{\pi(\omega^2 - r^2)}$

Do đó, phương trình dao động cưỡng bức của hệ có dạng :

$$y(t) = B.e^{i(rt+\varphi)}$$

Dùng phần thực của biểu thức này làm nghiệm, ta có :

$$y(t) = B\cos(rt+\varphi) = \frac{P_m}{M}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - r^2\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2}\omega^4}}\cos(rt+\varphi)$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $r = \omega$, tức là $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ và $B = \frac{P_m}{M}\frac{\pi}{\delta\omega^2}$

Phương trình dao động : $y(t) = \frac{P_m}{M\omega^2}\frac{\pi}{\delta}\sin rt = y_T\frac{\pi}{\delta}\sin rt$

Như vậy, biên độ cộng hưởng bằng chuyển vị tĩnh nhân với hệ số $\frac{\pi}{\delta}$.

3.3. Dao động nhỏ của cơ hệ hai bậc tự do

3.3.1. Thành lập phương trình vi phân chuyển động

* Xây dựng phương trình vi phân dao động hệ hữu hạn bậc tự do theo phương pháp tĩnh

Xét hệ dầm có 2 khối lượng tập trung. Hệ chịu tác dụng của tải trọng động $P_1(t)$, $P_2(t)$,…, $P_n(t)$. Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm khi dao động, vị trí của mỗi khối lượng được xác định bằng một thông số là chuyển vị theo phương đứng. Vì vậy hệ có 2 bậc tự do.

Trước hết ta xét trường hợp bỏ qua ảnh hưởng của lực cản. Ta sẽ viết phương trình cân bằng lực với việc sử dụng nguyên lý Đalawmbe, trong đó các lực đặt vào khối lượng bao gồm: tải trọng tác dụng, lực quán tính và lực đàn hồi.

Phương trình cân bằng lực đối với khối lượng thứ K:

$$-P_{k.q} + P_{k.d} = P_k(t)$$

Trong đó: $P_{k.q} = -m_k \ddot{y}_k(t)$

$$P_{k.d} = r_{k1}y_1 + r_{k2}y_2 + \ldots + r_{kn}y_n$$

Thay các biểu thức này vào phương trình ở trên ta được :

$$m_k \ddot{y}_k(t) + \left(r_{k1}y_1 + r_{k2}y_2 + \ldots + r_{kn}y_n\right) = P_k(t) \text{ (k = 1, 2, …, n)}$$

Phương trình trên được viết cho tất cả các khối lượng của hệ như sau :

$$\begin{aligned}
&m_1 \ddot{y}_1(t) + \left(r_{11}y_1 + r_{12}y_2 + \ldots + r_{1n}y_n\right) = P_1(t) \\
&m_2 \ddot{y}_2(t) + \left(r_{21}y_1 + r_{22}y_2 + \ldots + r_{2n}y_n\right) = P_2(t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&m_n \ddot{y}_n(t) + \left(r_{n1}y_1 + r_{n2}y_2 + \ldots + r_{nn}y_n\right) = P_n(t)
\end{aligned}$$

Ta viết hệ phương trình trên dưới dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ldots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \ldots \\ P_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [M]\left\{\ddot{Y}(t)\right\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\}$$

Khi kể đến ảnh hưởng của lực cản, phương trình trên sẽ viết thành :

$$\Leftrightarrow [M]\left\{\ddot{Y}(t)\right\} + [C]\left\{\dot{Y}(t)\right\} + [K]\{Y(t)\} = \{P(t)\}$$

Với $[C]$ là ma trận tắt dần :

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử của ma trận tắt dần c_{km} gọi là các hệ số ảnh hưởng tắt dần, là lực tương ứng với tọa độ k do tốc độ chuyển dịch đơn vị tại tọa độ m gây ra.

Phương trình ở trên chính là điều kiện cân bằng tĩnh học của cả hệ. Viết một hàng của hệ này ta có :

$$m_k \ddot{y}_k(t)+\sum_{j=1}^{n} c_{kj} \dot{y}_j(t)+\sum_{j=1}^{n} r_{kj} y_j(t)=P_k(t)$$

Phương trình vi phân chuyển động còn viết được ở dạng nghịch như sau :

$$y_k(t)+\sum_{j=1}^{n}\delta_{kj} m_j \ddot{y}_j+\sum_{j=1}^{n}\delta_{kj} E_{jc}=\sum_{j=1}^{n}\delta_{kj} P_j(t)$$

Khi xem lực cản theo giả thiết lực cản trong phi đàn hồi của Xôrôkin, phương trình vi phân chuyển động sẽ có dạng :

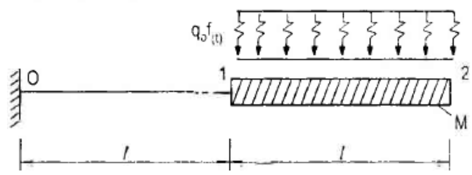
$$m_k \ddot{y}_k(t)+\left(1+\frac{i\delta}{\pi}\right)\sum_{j=1}^{n} r_{kj} y_j(t)=P_k(t)$$

Trong đó δ là độ suy giảm lôga.

Việc tính lực cản theo giả thiết Xôrôkin sẽ tạo nên lực cản tổng hợp là đẳng thức tuyến tính với lực đàn hồi. Điều đó cho phép khả năng tính dao động cưỡng bức của hệ với lực cản trong phi đàn hồi trong phạm vi lý thuyết tuyến tính.

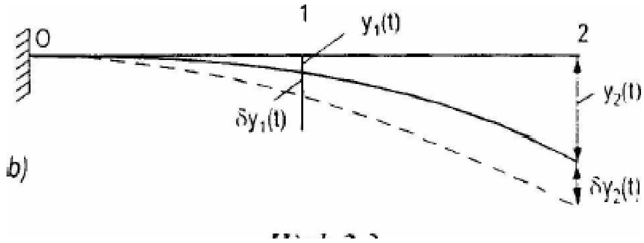
3.3.2. Ví dụ áp dụng

Ví dụ: Xây dựng phương trình vi phân dao động của hệ cho ở hình bên dưới. Hệ gồm một thanh cứng có khối lượng M, chiều dài l, thanh này được nối liền với một thanh không trọng lượng có độ dài l với đầu bị ngàm chặt. Khối lượng chịu tác dụng của tải trọng động phân bố đều có quy luật thay đổi theo thời gian f(t).



Ta xem chuyển vị theo phương đứng tại hai điểm đầu thanh cứng (điểm 1 và điểm 2) là các tọa độ tổng quát (chuyển vị $y_1(t)$ và $y_2(t)$).

Động năng toàn phần của thanh cứng (khối lượng M) bằng tổng động năng của chuyển vị thẳng và chuyển vị quay:



$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}_M^2(t) + \frac{1}{2} J_o \dot{\alpha}^2(t)$$

Trong đó: $\dot{y}_M(t) = \frac{1}{2}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$, $J_o = M\frac{l^2}{12}$ (là mômen quán tính của thanh cứng).

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{l}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

Thế vào phương trình trên ta được:

$$T = \frac{1}{2} M \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{l} \right)^2 = \frac{M}{6}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 + \dot{y}_2^2)$$

Ta coi các chuyển vị $y_1(t)$, $y_2(t)$ được tính từ vị trí cân bằng tĩnh ban đầu bằng không, vì thế thế năng chỉ được tính do năng lượng biến dạng tích lũy trong hệ. Có thể xác định thế năng từ ma trận cứng và các chuyển vị như sau:

Lực đàn hồi: $\{P_d\} = [K]\{Y\}$

Trong đó: $[K] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$, $\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$

Thế năng của hệ: $U = \frac{1}{2}\{Y\}^T\{P_d\} = \frac{1}{2}\{Y\}^T[K]\{Y\} = \frac{1}{2}\{y_1 \quad y_2\}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$

$$U = \frac{1}{2}(r_{11}y_1^2 + 2r_{12}y_1y_2 + r_{22}y_2^2)$$

Tính biến phân δR

$$\delta R = (q.f(t).l)\left(\frac{\delta y_1 + \delta y_2}{2}\right) = \frac{q.f_{(t)}.l}{2}(\delta y_1 + \delta y_2)$$

So sánh biểu thức này với phương trình trên ta được:

$$R_1(t) = R_2(t) = \frac{q.l}{2} f_{(t)}$$

Thế các biểu thức này vào phương trình Lagrăng ta nhận được phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\begin{cases} \frac{M}{6}(2\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + r_{11}y_1 + r_{12}y_{12} = \frac{ql}{2} f_{(t)} \\ \frac{M}{6}(\ddot{y}_1 + 2\ddot{y}_2) + r_{12}y_1 + r_{22}y_{12} = \frac{ql}{2} f_{(t)} \end{cases}$$

CHƯƠNG 4: VA CHẠM

4.1. Định nghĩa và các đặc điểm của va chạm

4.1.1. Định nghĩa

Va chạm là hiện tượng các vật chuyển động đến va vào nhau làm cho vận tốc của chúng biến đổi một lượng hữu hạn (cả về hướng và độ lớn) trong một khoảng thời gian rất nhỏ.

Khoảng thời gian này gọi là thời gian va chạm, ký hiệu là τ .

4.1.2. Các đặc điểm và giả thiết về va chạm

a. Đặc điểm thứ nhất

Va chạm xảy ra trong khoảng thời gian rất bé nhưng vận tốc lại biến đổi hữu hạn nên gia tốc va chạm rất lớn.

b. Đặc điểm thứ hai

Thời gian va chạm rất nhỏ nên trong quá trình va chạm, các vật của hệ di chuyển không đáng kể.

c. Đặc điểm thứ ba

Quá trình va chạm có thể chia thành hai giai đoạn: biến dạng và phục hồi. Giai đoạn biến dạng xảy ra từ lúc hai vật bắt đầu tiếp xúc nhau đến lúc dừng biến dạng. Giai đoạn phục hồi từ lúc biến dạng đến lúc kết thúc va chạm.

Căn cứ vào mức độ phục hồi lại hình dạng cũ của các vật va chạm, người ta phân ra hai loại va chạm.

Va chạm mềm (va chạm không đàn hồi): không có giai đoạn phục hồi, khi kết thúc quá trình va chạm, những phần tử của hai vật va vào nhau có cùng vận tốc pháp ở vùng tiếp xúc.

Va chạm đàn hồi: có giai đoạn phục hồi, kết thúc va chạm vận tốc pháp tuyến của các phần tử của hai vật ở vùng tiếp xúc khác nhau.

d. Các giả thiết của lý thuyết va chạm

Giả thiết 1: Vì lực va chạm rất lớn nên khi nghiên cứu va chạm, người ta bỏ qua các lực thông thường như trọng lực, áp lực… mà chỉ quan tâm đến lực va chạm.

Giả thiết 2: Trong quá trình va chạm, các vật di chuyển không đáng kể nên giả thiết rằng trong quá trình va chạm các vật đứng yên tại chỗ.

Giả thiết 3: Để đánh giá sự phục hồi của vật va chạm, người ta đưa vào hệ số phục hồi:

$$k = \frac{S_2}{S_1}$$

Với $\overrightarrow{S_1} = \int_0^{\tau_1} \overrightarrow{N_1} dt$; $\overrightarrow{S_2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overrightarrow{N_2} dt$ lần lượt là xung lượng va chạm trong giai đoạn biến dạng và phục hồi.

Dựa vào hệ số phục hồi mà ta có thể phân loại va chạm

$0 < k < 1$: va chạm đàn hồi;

$k = 1$: va chạm hoàn toàn đàn hồi;

4.2. Các định lý tổng quát của động lực học trong lý thuyết va chạm

4.2.1. Định lý động lượng

Ta có: $$\overrightarrow{Q_2} - \overrightarrow{Q_1} = \sum \overrightarrow{S_k^e}$$

Do cơ hệ va chạm thường là vật rắn hay hệ vật rắn nên

$\overrightarrow{Q_2} = M\overrightarrow{U_C}$; $\overrightarrow{Q_1} = M\overrightarrow{V_C}$ (với $\overrightarrow{U_C}$; $\overrightarrow{V_C}$ là vận tốc khối tâm của cơ hệ sau và trước va chạm)

Do đó: $$M\overrightarrow{U_C} - M\overrightarrow{V_C} = \sum \overrightarrow{S_k^e}$$

Vậy định lý động lượng có thể được phát biểu: Biến thiên động lượng của cơ hệ trong va chạm bằng tổng hình học xung lượng các lực va chạm ngoài.

4.2.2. Định lý mômen động lượng

Theo định lý mômen động lượng đối với cơ hệ, ta có:

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e}) \Leftrightarrow d\overrightarrow{L_O} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e})dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{\overrightarrow{L_O^1}}^{\overrightarrow{L_O^2}} d\overrightarrow{L_O} = \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k^e})dt \Leftrightarrow \overrightarrow{L_O^2} - \overrightarrow{L_O^1} = \int_0^t \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{F_k^e})dt$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{L_O^2} - \overrightarrow{L_O^1} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \wedge \int_0^t \overrightarrow{F_k^e}dt = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \wedge \overrightarrow{S_k^e} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{S_k^e})$$

Vậy: $$\overrightarrow{L_O^2} - \overrightarrow{L_O^1} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{S_k^e})$$

Nội dung định lý mômen động lượng: Biến thiên mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm (hay một trục) trong thời gian va chạm bằng tổng mômen xung lượng của các lực va chạm ngoài đối với tâm (hay trục) đó.

Nếu vật quay quanh một trục cố định ta có:

$$J_z\omega_2 - J_z\omega_1 = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_z}(\overrightarrow{S_k^e})$$

4.2.3. Định lý biến thiên động năng

Trong va chạm có một lượng động năng cung cấp cho quá trình biến dạng, và một phần động năng chuyển sang nhiệt năng. Vì vậy thông thường không sử dụng định lý động năng để khảo sát bài toán va chạm.

Sự mất động năng trong va chạm là do hiện tượng biến dạng dư qua va chạm, kèm theo sự biến đổi nội năng của cơ hệ.

Vì vậy để giải quyết bài toán va chạm thường chỉ sử dụng hai định lý: định lý động lượng và định lý mômen động lượng.

4.3. Các bài toán về va chạm

4.3.1. Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến

a. Bài toán

Xét hai vật có khối lượng m_1 và m_2 chuyển động tịnh tiến đến va chạm vào nhau với vận tốc $\vec{V_1}$ và $\vec{V_2}$ hướng dọc theo đường thẳng nối khối tâm hai vật. Biết hệ số phục hồi là k. Hãy xác định:

- Vận tốc khối tâm hai vật sau va chạm là $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$

- Xung lượng của các lực va chạm trong từng giai đoạn.

- Lượng mất động năng trong va chạm.

Giải

*** Tìm vận tốc khối tâm sau va chạm $\vec{u_1}$; $\vec{u_2}$ và xung lượng $\vec{S_1}$; $\vec{S_2}$ trong từng giai đoạn:**

- Trong giai đoạn biến dạng: Cả hai vật đều có cùng vận tốc là u.

+ Phương trình va chạm của vật thứ nhất: $m_1\vec{u} - m_1\vec{V_1} = \vec{S_1}$

+ Phương trình va chạm của vật thứ hai: $m_2\vec{u} - m_2\vec{V_2} = -\vec{S_1}$

- Trong giai đoạn phục hồi: Vật 1 có vận tốc là $\vec{u_1}$, vật 2 có vận tốc là $\vec{u_2}$

+ Phương trình va chạm của vật thứ nhất: $m_1\vec{u_1} - m_1\vec{u} = -\vec{S_2}$

+ Phương trình va chạm của vật thứ hai: $m_2\vec{u_2} - m_2\vec{u} = -\vec{S_2}$

Theo đề ta có: $\vec{S_2} = k\vec{S_1}$

Từ các phương trình (1)(2)(3)(4)(5) ta suy ra:

$u = \dfrac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$; $S_1 = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)$;

$S_2 = kS_1 = k\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)$; $u_1 = V_1 - (1+k)\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)$;

$u_2 = V_2 - (1+k)\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_2 - V_1)$; $k = \dfrac{u_2 - u_1}{V_2 - V_1} = \dfrac{u_r}{V_r}$

*** Tìm lượng mất động năng trong va chạm:**

Gọi T_1 và T_2 là động năng của cơ hệ trước và sau va chạm:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2;\ T_2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

Lượng động năng bị tiêu hao: $\Delta T = T_1 - T_2 = \dfrac{1}{2}(1-k)^2\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)^2$

Ta xét các trường hợp xảy ra:

- Nếu va chạm mềm k = 0 thì: $\Delta T = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2)^2$

- Nếu va chạm đàn hồi k = 1 thì: $\Delta T = 0$

- Nếu vật thứ nhất va vào vật thứ hai ban đầu đứng yên $V_2 = 0$ thì:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}(1-k)^2\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}V_1^2 = (1-k)^2\frac{m_2}{m_1 + m_2}T_o$$

Tỉ lệ giữa động năng bị mất đi trong va chạm so với động năng của cơ hệ trước khi va chạm được tính qua tỉ số: $\dfrac{\Delta T}{T_o} = (1-k)^2\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$

Trong rèn, dập, nhằm mục đích làm cho vật biến dạng càng nhiều càng tốt nên động năng bị mất đi càng nhiều càng lợi. Gọi hiệu suất của quá trình rèn, dập là η , ta có:

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_o} = (1-k)^2\frac{m_2}{m_1 + m_2} = (1-k)^2\frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

Để hiệu suất cao thì tỉ số $\frac{m_1}{m_2}$ phải nhỏ, tức là m_2 phải lớn hơn m_1 rất nhiều lần. Do đó khối lượng của đe phải lớn hơn khối lượng của búa nhiều lần.

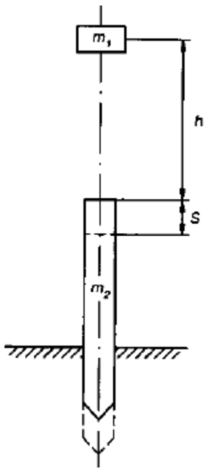
Trong đóng cọc, nhằm mục đích làm cho cọc di chuyển càng lún sâu vào đất càng tốt thì động năng bị tiêu hao trong va chạm phải càng nhỏ càng tốt. Khi đó, hiệu suất của quá trình đóng cọc là:

$$\eta = \frac{T_o - \Delta T}{T_o} = 1 - \frac{\Delta T}{T_o} = (1-k)^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = (1-k)^2 \frac{1}{\frac{m_2}{m_1} + 1}$$

Để hiệu suất đóng cọc cao thì m_1 của búa phải lớn hơn khối lượng cọc m_2 nhiều lần.

b. Bài tập vận dụng

Búa đóng cọc có khối lượng m_1 rơi tự do từ độ cao h so với đầu cọc. Khối lượng của cọc là m_2. Sau một lần va đập cọc đi xuống một đoạn là s. Tìm lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc, giả thiết là va chạm mềm k = 0.



Hiện tượng va chạm giữa búa và cọc xảy ra theo ba giai đoạn:

- Giai đoạn 1: kể từ khi búa rơi tự do từ độ cao h đến khi chạm vào đầu cọc với vận tốc V_1.

- Giai đoạn 2: là quá trình va đập giữa búa và cọc kể từ lúc búa đập vào đầu cọc với vận tốc V_1 và cọc có vận tốc $V_2 = 0$ cho đến khi kết thúc quá trình va đập búa và cọc có cùng vận tốc u.

- Giai đoạn 3: kể từ khi búa và cọc có cùng vận tốc u cùng lún sâu một đoạn s rồi dừng lại.

Trong giai đoạn 1: vận tốc V_1 của búa khi bắt đầu chạm vào đầu cọc là:

$$V_1 = \sqrt{2gh}$$

Quá trình va đập thẳng xuyên tâm của búa và cọc khi va chạm mềm k = 0 thì vận tốc u lúc kết thúc va chạm:

$$u = u_1 = u_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh}$$

Lực cản trung bình F_{tb} do nền đất tác dụng lên cọc được xác định:

$$\Delta T = T - T_o = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u_2^2 = \int \delta A = \int \vec{F}.\delta\vec{s} = -\int F.\delta s = -F.s$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2}\frac{(m_1 + m_2)u_2^2}{s} = g.\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}.\frac{h}{s}$$

4.3.2. Va chạm xiên

4.3.3. Va chạm của một vật quay quanh một trục cố định

Bài tập: Khảo sát một tấm phẳng quay quanh một trục cố định thẳng góc với mặt phẳng của tấm tại O. Xung lực va chạm S tác dụng trong mặt phẳng của tấm, nghiêng với đường nối điểm O và khối tâm C của tấm một góc α . Tại thời điểm va chạm, tấm có vận tốc góc ω_o . Tìm vận tốc góc ω của tấm sau va chạm và các xung lượng của các phản lực ở trục O. Cho biết tại thời điểm đầu OC trùng với đường thẳng đứng.

Khảo sát tấm quay. Xung lực va chạm ngoài tác dụng vào tấm là xung lực va chạm $\vec{S}$ và xung lực va chạm của phản lực tại O.

Áp dụng định lý động lượng và phương trình vật quay:

$$M\overrightarrow{U_c} - M\overrightarrow{V_c} = \vec{S} + \overrightarrow{S_o}$$
$$J_o\overline{\omega} - J_o\overline{\omega_o} = \overline{m_o}\left(\vec{S}\right)$$

Trong đó:

M là khối lượng của tấm.

$\overrightarrow{V_c};\overrightarrow{U_c}$ là vận tốc khối tâm C của tấm trước và sau va chạm.

$\overrightarrow{S_o}$ là xung lực va chạm của phản lực tại O.

J_o mômen quán tính của tấm đối với trục quay O.

$\overline{\omega_o}$ và $\overline{\omega}$ là vận tốc góc của tấm trước và sau va chạm.

Khi chiếu hai vế của đẳng thức lên các trục Ox và Oy, trong đó trục Oy trùng với đường OC, ta có:

$$MU_c - MV_c = S\sin\alpha + S_o$$
$$0 = S\cos\alpha + S_{Oy} \Rightarrow S_{Oy} = -S\cos\alpha$$

$$J_o\left(\overline{\omega} - \overline{\omega_o}\right) = S\sin\alpha.OI$$

Trong đó I là giao điểm của đường tác dụng của xung lực chạm $\vec{S}$ với đường OC.

Đặt OC = a, ta có $U_c = a\omega;\ \mathrm{V}_c = a\omega_o$

Phương trình trên có thể được viết lại:

$$\overline{\omega} = \overline{\omega_o} + \frac{S}{J_o}OI\sin\alpha$$

$$S_{Ox} = S\sin\alpha\left(\frac{Ma.OI}{J_o} - 1\right)$$

Như vậy, dưới tác dụng của xung lực va chạm $\vec{S}$ trục O sẽ chịu xung lực va chạm $\overrightarrow{S_o}$ được tính theo hai công thức trên.

Va chạm phát sinh tại ổ trục quay sẽ làm hư hỏng ổ đỡ và ngỗng trục. Do đó ta cần tìm điều kiện để tại ổ trục không xuất hiện xung lực va chạm phản lực, khi tấm chịu tác dụng của xung lực va chạm $\vec{S}$ có giá trị bất kỳ. Để thực hiện điều kiện này thì

$$S_{Oy} = -S\cos\alpha = 0$$

$$S_{Ox} = S\sin\alpha\left(\frac{Ma.OI}{J_o} - 1\right)$$

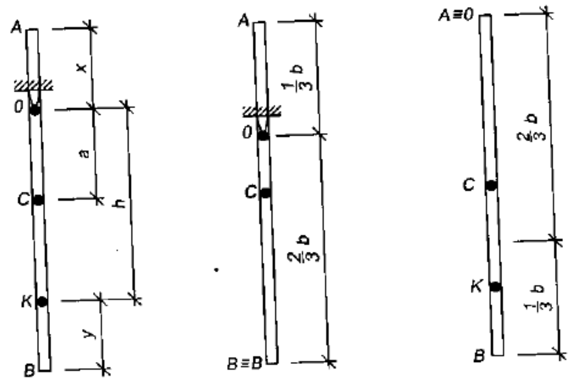
Từ phương trình trên ta có: $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{Ma.OI}{J_o} - 1 = 0 \Rightarrow OI = \frac{J_o}{Ma}$$

Để tại O không xuất hiện xung lực va chạm của phản lực khi tấm chịu tác dụng của xung lực va chạm có giá trị bất kỳ thì xung lực va chạm $\vec{S}$ phải tác dụng vuông góc với đường thẳng OC và đi qua điểm I nằm trên đường OC thỏa mãn điều kiện.

Điểm I được gọi là tâm va chạm.

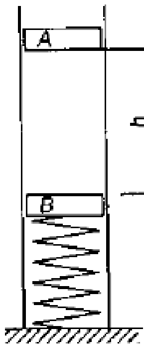
4.3.4. Va chạm của quả cầu với vật chuyển động quay quanh trục cố định



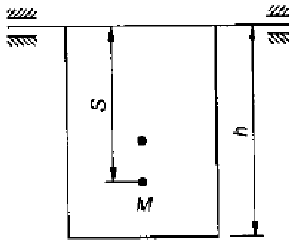
BÀI TẬP

Bài : Xác định tâm va chạm của một thanh đồng chất AB = b, quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh điểm O cố định.

Bài : Đầu búa A của máy đóng cọc rơi từ độ cao h = 4,905m và đập xuống cái đe B gắn trên một lò xo. Trọng lượng đầu búa là 10N, trọng lượng đe là 5N. Hãy tìm xem sau khi va chạm, đe chuyển động với vận tốc bằng bao nhiêu nếu như đầu búa cùng chuyển động với nó.

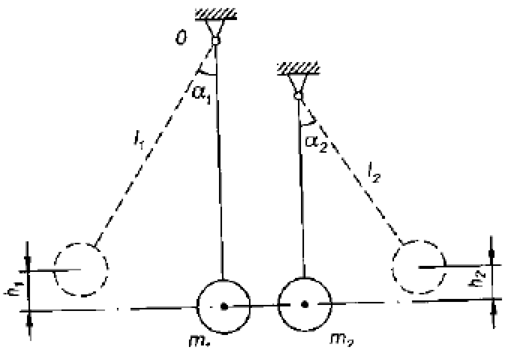


Bài : Để nén chặt đất dưới móng công trình người ta dùng búa đóng cọc, đóng các cọ có trọng lượng P_1 = 50N xuống đất. Đầu búa nặng P_2 = 450N rơi không vận tốc ban đầu từ độ cao h = 2m. Hệ số phụ hồi bằng không. Sau 10 lần va đập, sau cùng cọc xuống sâu được $\delta = 5cm$. Hãy xác định lực cản trung bình của đất khi đóng cọc.

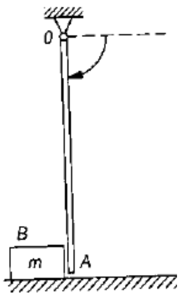


Bài : Hãy xác định tâm va chạm của bia bắn hình chữ nhật. Chiều cao của bia bằng h.

Bài : Hai quả cầu có khối lượng m_1 và m_2 trên hai sợi dây song song có chiều dài l_1 và l_2 sao cho tâm của chúng nằm trên cùng một độ cao. Quả cầu thứ nhất được đưa lệch khỏi đường thẳng đứng một góc α_1 rồi thả không vận tốc ban đầu. Xác định góc lệch giới hạn α_2 của quả cầu thứ hai nếu hệ số phục hồi bằng k.



Bài :



Thanh đồng chất OA = a khối lượng M đầu O được gắn bằng bản lề. Nó rơi không vận tốc ban đầu từ vị trí nằm ngang đến vị trí thẳng đứng đập vào vật B làm cho nó chuyển động trên mặt phẳng không nhẵn nằm ngang. Hệ số ma sát trượt là μ . Coi va chạm là không đàn hồi, vật B có khối lượng m. Xác định quãng đường mà vật B đi được.

MỤC LỤC